

©2005. Д. А. Сапронов

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА ТИПА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИФФУЗИИ-АБСОРБЦИИ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Установлена абсолютная разрешимость задачи Коши с растущими на бесконечности начальными данными для многомерных квазилинейных дважды вырождающихся параболических уравнений произвольного порядка типа нестационарной упругой диффузии - сильной абсорбции с переменным коэффициентом.

В области $G = \mathbb{R}^n \times (0, T)$ рассматривается следующая задача Коши:

$$u_t + A_p^{(2m)}u + B_\lambda u \equiv u_t + (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D_x^\alpha a_\alpha(t, x, u, D_x u, \dots, D_x^m u) + C(x, t)b(t, u) = 0, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^n), \quad 0 \leq C(x, t) \in L_{\infty,loc}(G), \tag{2}$$

где каратеодориевы функции $a_\alpha(t, x, \xi)$ и непрерывная функция $b(t, s)$ удовлетворяют условиям :

$$a_\alpha(x, t, \xi^{(0)}, \dots, \xi^{(m-1)}, 0) = 0 \quad \forall (x, t, \xi^{(0)}, \dots, \xi^{(m-1)}) \in G \times \mathbb{R}^{N(m-1)}, \tag{3}$$

$$\sum_{|\alpha|=m} (a_\alpha(t, x, \xi) - a_\alpha(t, x, \eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geq d_0 |\xi^m - \eta^m|^{p+1}, \tag{4}$$

$$\forall (t, x, \xi) \in G \times \mathbb{R}^{N(m)}, \quad \forall (t, x, \eta) \in G \times \mathbb{R}^{N(m)}, \quad d_0 > 0, p > 1, |a_\alpha(t, x, \xi) - a_\alpha(t, x, \eta)| \leq d_1 |\xi - \eta| (|\xi| + |\eta|)^{p-1}, \tag{5}$$

$$\forall (t, x, \xi) \in G \times \mathbb{R}^{N(m)}, \quad \forall (t, x, \eta) \in G \times \mathbb{R}^{N(m)}, \quad d_1 < \infty, |b(s, t)| \leq d_2 |s|^\lambda \quad \forall (s, t) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}_+^1, \quad d_2 < \infty, \lambda > p, \tag{6}$$

$$(b(s, t) - b(v, t))(s - v) \geq d_3 |s - v| \tag{7}$$

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}_+^1, \quad \forall (v, t) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}_+^1, \quad d_3 > 0.$$

Здесь $N(m)$ - число различных m -мерных мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ длины $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq m$.

Изучение разрешимости граничных задач для этих уравнений было начато в статье [1], в которой было введено понятие непрерывного обобщенного решения задачи Коши для уравнения второго порядка, близкого по структуре к (1) с $C(x, t) \equiv 0$, а также установлены его существование и единственность. В дальнейшем теории вырождающихся параболических уравнений было посвящено множество работ (см. [2]- [4] и библиографию к ним). Хорошо также известна, основанная на методе монотонности, теория разрешимости граничных задач для общих уравнений (1) (см. [5], [6]). Некоторые результаты о разрешимости дважды вырождающихся уравнений структуры (1) с $p \neq 1$ при наличии младших членов (нелинейной абсорбции) установлены в [7], [8].

Точные классы разрешимости уравнений (1) при $C(x, t) \equiv 0$ с неограниченной энергией найдены в [9]. Существование и единственность решения задачи Коши для многомерного уравнения ньютоновской фильтрации

$$(|u|^{q-1}u)_t - \Delta u + C(x, t)|u|^{\lambda-1}u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T),$$

$$0 \leq u_0(x) = u(x, 0) \in C(\mathbb{R}^n), \quad 0 < q < 1 < \lambda,$$

$$0 < C(x, t) \in C_{loc}^\alpha(\mathbb{R}^n), \quad 0 < \alpha < 1,$$

при произвольно растущих на бесконечности начальных данных была установлена в [10].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Энергетическим обобщенным решением $u(x, t)$ задачи Коши (1)-(2) мы назовем функцию $u(x, t)$ такую, что в произвольной ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^n$

$$u(x, t) \in W = \left\{ \begin{array}{l} v(x, t) : v \in L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^m(\Omega)) \cap L_{\lambda+1}(\Omega \times (0, T)), \\ v_t \in L_{\frac{p+1}{p}}(0, T; W_{\frac{p+1}{p}}^{-m}(\Omega)) + L_{\frac{\lambda+1}{\lambda}}(\Omega \times (0, T)) \end{array} \right\},$$

а также удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^T (u_t, w) dt + \int_{(0, T) \times \Omega} \left[\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, t, u, D_x u, \dots, D_x^m u) D_x^\alpha (u \cdot w) + C(x, t)b(u, t)w \right] dx dt = 0 \quad (8)$$

при любой $w(x, t) \in L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^0(\Omega)) \cap L_{\lambda+1}(\Omega \times (0, T))$, а также условию (2) в смысле пространства $C([0, T]; L_2(\Omega))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из определения 1 следует справедливость следующего интегрального тождества:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_\Omega |u(x, T_0)|^2 \phi(x, T_0) dx + \int_{(0, T_0) \times \Omega} \left[-\frac{1}{2} |u(x, t)|^2 \phi'_t(x, t) + \right. \\ & \left. + \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(t, x, D_x u, \dots, D_x^m u) D_x^\alpha (u \cdot \phi) + C(x, t)b(u, t)\phi(x, t) \right] dx dt = \\ & = \frac{1}{2} \int_\Omega |u_0(x)|^2 \phi(x, 0) dx \end{aligned} \quad (9)$$

при произвольных $0 < T_0 < T < \infty$, $\phi \in C_{x,t}^{0, m, 1}(\bar{\Omega} \times [0, T_0])$.

Введем следующие семейства областей:

$$\Omega(s) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < s\}, \quad G_T(s) = \Omega(s) \times (0, T) \quad \forall s > 0, \quad 0 < T < \infty.$$

В дальнейшем через c будем обозначать различные положительные постоянные, зависящие только от известных параметров задачи и не зависящие от s и t .

ТЕОРЕМА. Пусть в (1) выполнено $\lambda \leq p + \frac{2m(p+1)}{n}$ и $C(x, t)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} \in L_{1,loc}(G)$. Тогда в G существует обобщенное энергетическое решение задачи (1) – (2) при любом $0 < T < \infty$ и для него справедлива следующая априорная оценка:

$$I_T(s) \equiv \int_{G_T(s)} |u|^{p+1} dx dt \leq c \left(\int_{G_T(s)} C(x, t)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} dx dt \right)^{\frac{\lambda-p}{\lambda+1}} \times \\ \times \left(s^{-\frac{m(p+1)(\lambda+1)}{\lambda-p}} \int_{G_T(2s)} C(x, t)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} dx dt + h(2s) \right)^{\frac{p+1}{\lambda+1}} \quad \forall s > 0. \quad (10)$$

Доказательство. Введем срезающую функцию $\zeta_j(x) \in C(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2, \dots$, удовлетворяющую следующим требованиям: $\zeta_j(x) = 1$ при $|x| \leq j$, $\zeta_j(x) = 0$ при $|x| \geq j+1$, $0 \leq \zeta_j(x) \leq 1$ при $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2, \dots$ и определим последовательность функций

$$u_0^{(j)}(x) = u_0(x)\zeta_j(x),$$

приближающих $u_0(x)$ в пространстве $L_{2,loc}(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим последовательность задач Коши–Дирихле вида

$$u_t^{(j)} + A_p^{(2m)} u^{(j)} + B_\lambda u^{(j)} = 0, \quad (x, t) \in G_T(j+1), \quad (11)$$

$$u^{(j)}(x, 0) = u_0^{(j)}(x) \in L_2(\Omega(j+1)) \quad (12)$$

$$u^{(j)}|_{\partial\Omega(j+1)} = 0 \quad \forall t \in (0, T). \quad (13)$$

Согласно интерполяционному неравенству Ниренберга–Гальярдо (см. [9],[11]), характеризующему вложение $L_2(\Omega) \cap W_{p+1}^m(\Omega) \subset L_{\lambda+1}(\Omega)$, теории нелинейных эволюционных уравнений с монотонными операторами [5], [6], лемме 3 (см. ниже), задача (11) – (13) при $\lambda \leq p + \frac{2m(p+1)}{n}$ имеет решение

$$u^{(j)}(x, t) \in L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^m(\Omega(j+1))), \quad u_t^{(j)} \in L_{\frac{p+1}{p}}(0, T; W_{\frac{p+1}{p}}^{-m}(\Omega(j+1)))$$

при $\forall j = 1, 2, \dots$ Далее нам понадобятся следующие утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть $u^{(j)}(x, t)$ – энергетическое решение задачи (11) – (13). Тогда имеет место следующее соотношение:

$$\int_{\Omega_T(s-\delta)} |u^{(j)}|^2 dx + T^{-1} \int_{G_T(s-\delta)} |u^{(j)}|^2 dx dt + \int_{G_T(s-\delta)} |\nabla_x^m u^{(j)}|^{p+1} dx dt + \\ + \int_{G_T(s-\delta)} C(x, t) |u^{(j)}|^{\lambda+1} dx dt \leq c(\delta^{-m(p+1)} \int_{G_T(s)} |u^{(j)}|^{p+1} dx dt + h(s)) \quad (14)$$

$\forall 0 < s < j+1, \forall 0 < \delta < s$, где $h(s) = \int_{\Omega(s)} |u_0|^2 dx$.

Доказательство. Введем срезающую функцию $\eta(\tau) \in C^m(\mathbb{R}^1)$, удовлетворяющую следующим требованиям:

$$\eta(\tau) = 1 \quad \forall \tau \leq 0, \quad \eta(\tau) = 0 \quad \forall \tau \geq 1, \quad 0 \leq \eta(\tau) \leq 1 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}^1,$$

$$|D^i \eta(\tau)| \leq d_4 < \infty, \quad |i| = 1, 2, \dots, m.$$

Подставим в интегральное тождество (9) в качестве срезающей функции

$$\phi(x, t) = \exp(-tT^{-1}) \eta^{m(p+1)} \left(\frac{\tau - |x| + \delta}{\delta} \right).$$

После преобразований с использованием оценок (3) – (7), свойств функции $\eta(\tau)$, неравенства Ниренберга – Гальярдо, характеризующего вложение $W_{p+1}^m(\Omega) \subset W_{p+1}^i(\Omega)$ при $i < m$, а также неравенств Гельдера и Юнга с ε , приходим к соотношению:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_T(s)} |u^{(j)}|^2 dx + T^{-1} \int_{G_T(s)} |u^{(j)}|^2 dx dt + \int_{G_T(s)} |\nabla_x^m u^{(j)}|^{p+1} dx dt + \\ & + \int_{G_T(s)} C(x, t) |u^{(j)}|^{\lambda+1} dx dt \leq \varepsilon \int_{G_T(s+\delta)} |\nabla_x^m u^{(j)}|^{p+1} dx dt + \\ & + c(\varepsilon) \delta^{-m(p+1)} \int_{G_T(s+\delta)} |u^{(j)}|^{p+1} dx dt + ch(s + \delta) \end{aligned} \quad (15)$$

$\forall s > 0, \forall \delta > 0 : s + \delta < j + 1, \forall \varepsilon > 0$. Полагая последовательно в (15) $\delta_i = 2^{-i} \delta$, $s_i = s_0 + \delta_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$ и итерируя полученные неравенства по i k раз, получаем соотношение:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_T(s)} |u^{(j)}|^2 dx + T^{-1} \int_{G_T(s)} |u^{(j)}|^2 dx dt + \int_{G_T(s)} |\nabla_x^m u^{(j)}|^{p+1} dx dt + \\ & \int_{G_T(s)} C(x, t) |u^{(j)}|^{\lambda+1} dx dt \leq \varepsilon^{k+1} \int_{G_T(s+2\delta)} |\nabla_x^m u^{(j)}|^{p+1} dx dt + \\ & + c(\varepsilon) \sum_{i=0}^k (2^{m(p+1)} \varepsilon)^i \delta^{-m(p+1)} \int_{G_T(s+2\delta)} |u^{(j)}|^{p+1} dx dt + c \sum_{i=0}^k \varepsilon^i h(s + 2\delta) \end{aligned} \quad (16)$$

$\forall s > 0, \forall \delta > 0 : s + \delta < j + 1, \forall \varepsilon > 0$. Полагая в (16) $\varepsilon = 2^{-m(p+1)-1}$ и устремляя в полученном $k \rightarrow \infty$, после замены аргументов получим требуемую оценку. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $u^{(j)}(x, t)$ – энергетическое решение задачи (11) – (13). Тогда для семейства $u^{(j)}(x, t)$ справедлива следующая равномерная оценка:

$$\begin{aligned} I_T^{(j)}(s) & \equiv \int_{G_T(s)} |u^{(j)}|^{p+1} dx dt \leq c \left(\int_{G_T(s)} C(x, t)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} dx dt \right)^{\frac{\lambda-p}{\lambda+1}} \times \\ & \times \left(s^{-\frac{m(p+1)(\lambda+1)}{\lambda-p}} \int_{G_T(2s)} C(x, t)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} dx dt + h(2s) \right)^{\frac{p+1}{\lambda+1}}, \end{aligned} \quad (17)$$

$\forall s > 0 : 2s < j + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим к правой части соотношения (14) неравенство Юнга с ε . В результате получим:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_T(s)} |u^{(j)}|^2 dx + T^{-1} \int_{G_T(s)} |u^{(j)}|^2 dx dt + \int_{G_T(s)} |\nabla_x^m u^{(j)}|^{p+1} dx dt \\ & \int_{G_T(s)} C(x, t) |u^{(j)}|^{\lambda+1} dx dt \leq \varepsilon \int_{G_T(s+\delta)} C(x, t) |u^{(j)}|^{\lambda+1} dx dt \\ & + c(\varepsilon) \delta^{-\frac{m(p+1)(\lambda+1)}{\lambda-p}} \int_{G_T(s+\delta)} C(x, t)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} dx dt + ch(s + \delta) \end{aligned} \quad (18)$$

$\forall s > 0, \delta > 0 : s + \delta < j + 1$. Применяя к соотношению (18) итеративную процедуру, аналогичную той, которая позволила нам вывести неравенство (14), после замены в полученном s на δ приходим к следующему неравенству:

$$\int_{G_T(s)} C(x, t) |u^{(j)}|^{\lambda+1} dx dt \leq c \left(s^{-\frac{m(p+1)(\lambda+1)}{\lambda-p}} \int_{G_T(2s)} C(x, t)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} dx dt + h(2s) \right), \quad (19)$$

$\forall s > 0 : 2s < j + 1$. В силу неравенства Гельдера имеем:

$$I_T^{(j)}(s) \leq \left(\int_{G_T(s)} C(x, t)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} dx dt \right)^{\frac{\lambda-p}{\lambda+1}} \left(\int_{G_T(s)} C(x, t) |u^{(j)}|^{\lambda+1} dx dt \right)^{\frac{p+1}{\lambda+1}} \forall s > 0. \quad (20)$$

Оценивая правую часть (19) с помощью неравенства (20), приходим к (17). Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть Ω – произвольная ограниченная область в \mathbb{R}^n . Тогда, если $p > 1$, $\lambda \leq p + \frac{2m(p+1)}{n}$, то имеет место вложение

$$C([0, T]; L_2(\Omega)) \cap L_{p+1}(0, T; \overset{0}{W}_{p+1}^m(\Omega)) \subset L_{\lambda+1}((0, T) \times \Omega). \quad (21)$$

Доказательство. Для данной области Ω справедливо интерполяционное неравенство Гальярдо– Ниренберга вида

$$\|u\|_{L_{\lambda+1}(\Omega)} \leq d_5 \|D_x^m u\|_{L_{p+1}(\Omega)}^\theta \|u\|_{L_{q+1}(\Omega)}^{1-\theta}, \quad (22)$$

где $u(x, t)$ – произвольная по x функция из пространства $\overset{0}{W}_{p+1}^m(\Omega) \cap L_2(\Omega)$, $0 < d_5 < \infty$,

$$0 < \theta = \frac{n(\lambda - 1)(p + 1)}{(\lambda + 1)(n(p - 1) + 2m(p + 1))} \leq 1.$$

Возведя неравенство (22) в степень $\lambda + 1$, проинтегрировав полученное соотношение по t и применив неравенство Гельдера, после очевидных преобразований придем к выражению вида

$$\|u\|_{L_{\lambda+1}((0, T) \times \Omega)} \leq d_5 T^{\frac{1-\theta}{\lambda+1}} \|D_x^m u\|_{L_{p+1}((0, T) \times \Omega)}^\theta \|u\|_{C([0, T]; L_{q+1}(\Omega))}^{1-\theta},$$

$0 < \sigma = \theta \frac{\lambda+1}{p+1} < 1$, откуда следует (21). Лемма доказана.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. В силу леммы 2 имеем оценку

$$\|u^{(j)}\|_{L_{p+1}(0,T;W_{p+1}^m(\Omega(s)))} \leq C(s) < \infty \quad \forall s < 2(j+1), \quad (23)$$

причем $C(s)$ не зависит от j . Поскольку $u^{(j)}$ – решение задачи (11) – (13), а оператор $A + B$ – нелинейный ограниченный оператор:

$$A + B : L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^m(\Omega(s))) \longrightarrow L_{\frac{p+1}{p}}(0, T; W_{\frac{p+1}{p}}^{-m}(\Omega(s)))$$

то в силу (23) имеем также

$$\|u_t^{(j)}\|_{L_{\frac{p+1}{p}}(0,T;W_{\frac{p+1}{p}}^{-m}(\Omega(s)))} \leq C_1(s) < \infty \quad \forall s < 2(j+1).$$

Обозначим через $V(\Omega(s))$ банахово пространство с нормой

$$\|v\|_{V(\Omega(s))} = \|v\|_{L_{p+1}(0,T;W_{p+1}^m(\Omega(s)))} + \|v\|_{L_{\frac{p+1}{p}}(0,T;W_{\frac{p+1}{p}}^{-m}(\Omega(s)))}.$$

В силу ограниченности $\|u^{(j)}\|_{V(\Omega(s))} \forall s < 2(j+1)$ из последовательности $u^{(j)}$ можно извлечь слабо сходящуюся в $V(\Omega(s))$ подпоследовательность, которая, в свою очередь, благодаря компактности вложения

$$V(\Omega(s)) \subset L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^{m-1}(\Omega(s)))$$

будет фундаментальной в $L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^{m-1}(\Omega(s)))$. Назовем выбранную подпоследовательность снова $u^{(j)}$ и докажем ее сходимость в пространстве $L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^m(\Omega(s)))$. Обозначим $v_{ij} = u^{(i)} - u^{(j)}$, $i, j > 2^{-1}s - 1$ и подставим в интегральное тождество (9) в качестве пробной функции

$$w = v_{ij} \eta^{m(p+1)}(s - |x| + 1).$$

После преобразований с использованием оценок (4)–(7) и свойств функции η получаем:

$$\begin{aligned} \int_{G_T(s-1)} |\nabla_x^m v_{ij}|^{p+1} dx dt &\leq c(R_T(s))^{\frac{p}{p+1}} \sum_{|\alpha| < m} \left(\int_{G_T(s)} |D_x^m v_{ij}|^{p+1} dx dt \right)^{\frac{1}{p+1}} + \\ &+ R_T(s)^{\frac{p-1}{p+1}} \left(\sum_{|\alpha| < m} \int_{G_T(s)} |D_x^m v_{ij}|^{p+1} dx dt \right)^{\frac{2}{p+1}} \forall s < 2(i+1), \forall s < 2(j+1), \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$R_T(s) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{G_T(s)} (|D_x^\alpha u^{(i)}| + |D_x^\alpha u^{(j)}|)^{p+1} dx dt$$

Из (24) в силу (23) и фундаментальности $u^{(j)}$ в пространстве

$$L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^{m-1}(\Omega(s)))$$

получаем сходимость $u^{(j)}$ в пространстве $L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^m(\Omega(s-1)))$. Поскольку оператор

$$A + B : L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^m(\Omega(s))) \longrightarrow L_{\frac{p+1}{p}}(0, T; W_{\frac{p+1}{p}}^{-m}(\Omega(s)))$$

непрерывен, то имеет место следующая сходимость:

$$\|u^{(i)} - u^{(j)}\|_{L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^m(\Omega(s-1)))} \rightarrow 0, \quad i, j \rightarrow \infty.$$

Зафиксируем теперь последовательность $s_i = \frac{i+1}{4}$. С помощью диагонального процесса выберем теперь последовательность $u^{(j)}$, $j > i + 1$ фундаментальную в пространстве $V(\Omega(s_i))$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Предел этой последовательности $\lim_{j \rightarrow \infty} u^{(j)} = u(x, t) \in V_{loc}(\mathbb{R}^n)$ в силу непрерывности вложения

$$V(\Omega(s)) \subset C(0, T; L_2(\Omega(s)))$$

будет удовлетворять интегральному тождеству (8) и начальному условию (2), и поэтому будет являться энергетическим обобщенным решением задачи (1)–(2). Теорема доказана.

1. Олейник О.А., Калашников А.С., Чжоу Юй-лин. Задача Коши и краевые задачи для уравнения типа нестационарной фильтрации // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22. N 8. С. 667-704.
2. Калашников А.С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // УМН. 1987. Т. 42. N 2. С. 135-176.
3. Di Benedetto E. Degenerate parabolic equations // New York: Springer - Verlag. 1993.
4. Калашников А.С. О характере распространения возмущений в процессах, описываемых квазилинейными параболическими уравнениями // Труды сем. им. Г.И. Петровского. 1975. N. 1. С. 135-144.
5. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач // М.: "Мир", 1972.
6. Дубинский Ю.А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Современные проблемы математики. Т. 9. М.: ВИНТИ, 1976. С.5-130.
7. Grange O., Mignot F. Sur la Resolution d'une Equation et d'une Inequation Paraboliques non Lineaires // J. Funct. Anal. 1972. V. 11. N 1, P. 77-92.
8. Bernis F. Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains // Math. Ann. 279, No.3, 373-394 (1988).
9. Шшиков А.Е. Эволюция носителя решения с неограниченной энергией квазилинейного вырождающегося параболического уравнения произвольного порядка // Мат. сборник. 1995. Т. 186. N 12. С. 151-172.
10. Гладков А.Л. Об уравнении фильтрации - абсорбции с переменным коэффициентом // Дифф. уравнения. 1991. т. 37. N 1. С. 42-47.
11. Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева // Изд-во ЛГУ, 1985.

Донецкий национальный университет
ул. Университетская, 24
83055, Донецк, Украина

Получено 22.12.2004