Нелинейные граничные задачи **15**, 162-171 (2005)

©2005. **М.Г. Лепчинский , В.Н. Павленко**

АППРОКСИМАЦИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Рассматривается ситуация, когда резонансная эллиптическая краевая задача с разрывной нелинейностью является идеализацией распределенной системы с непрерывными по фазовой переменной нелинейностями, имеющих узкие участки в области изменения фазовой переменной, где отследить изменения нелинейных параметров невозможно. Изучается вопрос о близости множеств решений реальной и идеализированной систем.

Математические модели в гидродинамике, электрофизике, теории управления могут приводить к эллиптическим краевым задачам с разрывными нелинейностями. Примеры таких постановок прикладных задач можно найти в [1] и [2].

Разрывные нелинейности могут возникать как идеализации непрерывных процессов, у которых наблюдаются узкие интервалы в области значений фазовой переменной с быстрым изменением нелинейных параметров процесса. Так как структуру изменения параметра на таких интервалах отследить, как правило, невозможно, то заменяют параметры процесса на каждом из рассматриваемых интервалов на разрывную нелинейность. При этом возникает вопрос о близости множеств решений уравнения с идеализированными характеристиками и с исходными параметрами. Данная проблема была поставлена в работе М.А. Красносельского и А.В. Покровского [3] и для коэрцитивных эллиптических краевых задач изучалась вариационным методом в [4]. Более общий вопрос о близости множества решений возмущенного уравнения к множеству решений исходной задачи рассматривался в [5] в предположении, что нелинейности монотонны, и в [6] в случае, когда нелинейности удовлетворяют одностороннему условию Липшица.

В данной работе рассматриваются эллиптические краевые задачи в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с ограниченной разрывной нелинейностью, у которых соответствующая краевая задача для линейной части уравнения имеет ненулевые решения (резонансный случай), аппроксимации каратеодориевы и сходятся к нелинейности исходной краевой задачи в метрике $L_1(\Omega \times \mathbb{R})$. Доказывается теорема о существовании последовательности решений приближенных задач, сходящейся в $C_1(\overline{\Omega})$ к решению исходной граничной задачи. При этом для аппроксимирующих задач берутся решения, доставляющие абсолютный минимум соответствующего функционала, сопостовляемого краевой эллиптической задаче при вариационном подходе. Доказательство существования таких решений опирается на результаты, полученные в [7]. Отметим, что в [4] на нелинейность исходного уравнения и на аппроксимирующие нелинейности накладывались более жесткие ограничения, чем в данной работе, а в отличие от [5] и [6] не требуется от нелинейности выполнения одностороннего условия Липшица.

1.Постановка задачи и формулировка основных результатов.

Пусть Ω – ограниченная область $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ с границей Γ класса $C^{2,\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$,

$$Lu(x) \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} + c(x)u(x)$$

– равномерно эллиптический дифференциальный оператор на $\overline{\Omega}$ с коэффициентами

$a_{ij} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ на $\overline{\Omega}$, $c \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ [8].

Рассматривается краевая задача вида

$$\begin{aligned} Lu(x) &= g_0(x, u(x)),\ x \in \Omega, & (1)\\ Bu|_\Gamma &= 0, & (2) \end{aligned}$$

где (2) – одно из основных краевых условий: либо Дирихле ($Bu(x) = u(x)$); либо Неймана с конормальной производной ($Bu(x) = \dfrac{\partial u}{\partial n_L} \equiv \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i} \cos(n, x_j)$, $\cos(n, x_j)$ – направляющие косинусы внешней нормали к границе Γ); либо третье краевое условие ($Bu(x) = \dfrac{\partial u}{\partial n_L} + \sigma(x)u(x)$, $\sigma \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, неотрицательна на Γ и не равна тождественно нулю). Предполагается, что функция $g_0(x,u)$ удовлетворяет условию $(*)$:

$*1.$ функция $g_0 : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ борелева (mod 0) [9], то есть она отличается от некоторой борелевой на $\Omega \times \mathbb{R}$ функции лишь на множестве, проекция которого на Ω имеет нулевую меру;

$*2.$ для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g_0(x,\cdot)$ имеет на $\mathbb{R}$ разрывы только первого рода и $g_0(x,u) \in [g_-(x,u), g_+(x,u)]$, $g_-(x,u) = \liminf\limits_{s\to u} g_0(x,s)$, $g_+(x,u) = \limsup\limits_{s\to u} g_0(x,s)$;

$*3.$ для почти всех $x \in \Omega$ верна оценка $|g_0(x,u)| < a(x)\ \forall u \in \mathbb{R}$, где $a \in L_q(\Omega)$, $q > n$.

Определение 1. *Сильным решением задачи (1)-(2) называется функция $u \in W_s^2(\Omega)$, $s \geq 1$, которая удовлетворяет уравнению (1) для почти всех $x \in \Omega$ и для которой след $Bu(x)$ на границу Γ области Ω равен нулю.*

Обозначим через $N(L)$ множество решений однородной краевой задачи

$$\begin{aligned} Lu &= 0,\ x \in \Omega & (3)\\ Bu|_\Gamma &= 0. & (4) \end{aligned}$$

Определение 2. *Задача (1)-(2) называется резонансной, если подпространство $N(L)$ ненулевое, и нерезонансной в противном случае.*

Аппроксимации исходной задачи (1)-(2) имеют вид

$$\begin{aligned} Lu(x) &= g(x, u(x)),\ x \in \Omega, & (5)\\ Bu|_\Gamma &= 0, & (6) \end{aligned}$$

где функции $g(x,u)$ – каратеодориевы и для них при почти всех $x \in \Omega$ верна оценка

$$|g(x,u)| < a(x)\ \forall u \in \mathbb{R},$$

и выполняется следующее условие близости

$$\int_\Omega dx \int_{\mathbb{R}} |g(x,s) - g_0(x,s)| ds < \delta, \text{ при некотором } \delta > 0. \qquad (7)$$

Заметим, что класс аппроксимаций состоит из резонансных или нерезонансных задач в зависимости от рода исходной задачи.

Положим $X = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, если (2) – граничное условие Дирихле, и $X = W_2^1(\Omega)$, если (2) – граничное условие Неймана с конормальной производной или третье краевое условие.

Каждая из задач (1)-(2) и (5)-(6) определяется входящей в нее нелинейностью. Свяжем с каждой такой задачей функционал, определенный на X и зависящий от этой нелинейности:

$$J_g(u) = J(u) - \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} g(x,s)ds, \ l = 0,1,2,\ldots,$$

где

$$J(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}dx + \frac{1}{2}\int_\Omega c(x)u^2(x)dx + \frac{1}{2}\int_\Gamma \sigma(s)u^2(s)ds \tag{8}$$

(для задачи Дирихле и задачи Неймана с конормальной производной полагаем $\sigma(s) \equiv 0$.

Дополнительно потребуем неотрицательности функционала $J(u)$ на X, а в резонансном случае еще и выполнения для нелинейности $g_0(x,u)$ следующего условия:

$$\lim_{u\in N(L), ||u||_X\to+\infty} \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} g_0(x,s)ds = -\infty. \tag{9}$$

Заметим, что из (7) и (9) немедленно следует, что для произвольной аппроксимирующей задачи с нелинейностью g выполняется

$$\lim_{u\in N(L), ||u||\to+\infty} \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} g(x,s)ds = -\infty, \tag{10}$$

поскольку для любого $u \in X$ верно

$$\left|\int_\Omega dx \int_0^{u(x)} g(x,s)ds - \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} g_0(x,s)ds\right| \le \int_\Omega dx \int_{\mathbb{R}} |g(x,s) - g_0(x,s)|\, ds. \tag{11}$$

Для аппроксимирующих задач (5)-(6) выполнены все условия теоремы 1.3 из [7], поэтому существует функция $u_g \in X$, на которой достигается абсолютный минимум $J_g(u)$ на X, причем любое такое u_g принадлежит $W_q^2(\Omega)$ и является сильным решением задачи (5)-(6).

Определение 3. *Говорят, что для уравнения (1) выполнено* A1-условие *[7], если найдется не более чем счетное семейство поверхностей*

$$\{S_i, \ i\in I\}, \ S_i = \{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1} \,|\, u = \varphi_i(x), \ x\in\Omega\}, \ \varphi_i \in W_{loc,1}^2(\Omega)$$

таких, что для почти всех $x \in \Omega$ неравенство $g_0(x,u-) > g_0(x,u+)$ влечет существование $i \in I$, для которого $u = \varphi_i(x)$ и

$$(L\varphi_i(x) - g_0(x,\varphi_i(x)+))(L\varphi_i(x) - g_0(x,\varphi_i(x)-)) > 0$$

$$\text{или } L\varphi_i(x) - g_0(x,\varphi_i(x)) = 0.$$

Если предположить, что для уравнения (1) выполнено $A1$-условие, то в силу теоремы 1.3 из [7] найдется функция $u_0 \in X$, для которой $J_{g_0}(u_0) = \inf_X J_0(u)$, причем любое такое u_0 принадлежит $W_q^2(\Omega)$ и является сильным решением задачи (1)-(2).

Обозначим через $\mathfrak{M}_0$ множество сильных решений задачи (1)-(2), доставляющих абсолютный минимум функционалу J_{g_0}, через $\mathfrak{M}_g$ – множество сильных решений задачи (5)-(6), доставляющих абсолютный минимум J_g $(k = 1, 2, 3, \dots)$.

Рассмотрим последовательность аппроксимирующих задач с нелинейностями $g_k(x, u)$, $k = 1, 2, 3 \dots$, такими, что им соответсвует последовательность параметров близости δ_k (см. (7)), стремящаяся к нулю.

Изучается проблема близости $\mathfrak{M}_{g_0}$ и $\mathfrak{M}_{g_k}$ при $k \to +\infty$. Основной результат работы - существование у произвольной последовательности решений аппроксимирующих задач $\{u_k\}$ с $u_k \in \mathfrak{M}_{g_k}$, подпоследовательности сходящейся в $C^1(\overline{\Omega})$ к функции $u \in \mathfrak{M}_0$. Формулировке полученных теорем предпошлем понятие β-сходимости.

Определение 4. *Пусть $\{A_k\}$ – последовательность множеств в метрическом пространстве (Z, ρ) и $A \subset Z$. Говорят, что последовательность множеств $\{A_k\}$ β-сходится к множеству A по метрике ρ, если*

$$\sup_{x \in A_k} \inf_{y \in A} \rho(x, y) \to 0 \text{ при } k \to +\infty,$$

и пишут $A_k \xrightarrow{\beta} A$.

Теорема 1. *Предположим, что*

1) *для функции $g_0(x, u)$ в уравнении (1) выполнено условие $(*)$;*
2) *каратеодориевы аппроксимации $g_k(x, u)$ нелинейности $g_0(x, u)$ удовлетворяют неравенству (7) при $g(x, s) = g_k(x, s)$ и $\delta = \delta_k$ с $delta_k \to 0$;*
3) *функционал $J(u)$, определенный формулой (8), неотрицателен на X;*
4) *если подпространство $N(L)$ ненулевое, то имеет место равенство (9);*
5) *для уравнения (1) выполнено $A1$–условие.*

Тогда множества $\mathfrak{M}_{g_l}$ $(l = 0, 1, 2, \dots)$ непусты, причем $\mathfrak{M}_{g_k} \xrightarrow{\beta} \mathfrak{M}_{g_0}$ по метрике пространства $C^1(\overline{\Omega})$ при $k \to +\infty$. В том случае, когда $\mathfrak{M}_{g_0}$ состоит из одной точки u_0, любая последовательность $\{u_k\}$, где $u_k \in \mathfrak{M}_{g_k}$ сходится к u_0 по метрике $C^1(\overline{\Omega})$.

Рассмотрим случай, когда пространство решений задачи (3)-(4) одномерно, и для функции $g_0(x, u)$ в уравнении (1) кроме условия $(*)$ выполняются следующие требования:

(i) для почти всех $x \in \Omega$ существуют пределы

$$\overline{g}_{\pm}(x) = \lim_{u \to \pm\infty} \frac{1}{u} \int_0^u g_0(x, s) ds;$$

(ii) выполнено двойное неравенство

$$\int_{\psi<0}\overline{g}_+(x)\psi(x)dx+\int_{\psi>0}\overline{g}_-(x)\psi(x)dx>0>\int_{\psi>0}\overline{g}_+(x)\psi(x)dx+\int_{\psi<0}\overline{g}_-(x)\psi(x)dx, \quad (12)$$

где $\psi(x)$– базисная функция пространства $N(L)$.

Замечание 1. *Требование (i) с учетом условия $(*)$ влечет принадлежность функций $\overline{g}_\pm(x)$, фигурирующих в условии (i), к пространству $L_q(\Omega)$. Из чего следует существование интегралов в неравенстве (12).*

Замечание 2. *Ограничения (i) и (ii) обобщают классическое условие Ландесмана-Лазера [10], в котором вместо функций $\overline{g}_\pm(x)$ предполагается существование пределов $g_\pm=\lim\limits_{s\to\pm\infty}g_0(x,s)$. Например, если функция $g_0(x,u)$ периодическая по фазовой переменной u, то условие (i) выполняется, а пределы $g_0(x,s)$ при $s\to\pm\infty$, вообще говоря, не существуют.*

Замечание 3. *Условия (i) и (ii) являюся достаточными для выполнения равенства (9). Действительно,*

$$\lim_{u\in N(L),||u||\to+\infty}\int_\Omega dx\int_0^{u(x)}g_0(x,s)ds=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[t\times\int_\Omega dx\ \psi(x)\cdot\frac{1}{t\psi(x)}\int_0^{t\psi(x)}g_0(x,s)ds\right]=-\infty$$

по теореме Лебега о переходе к пределу под знак интеграла, поскольку подынтегральная функция по модулю ограничена суммируемой функцией $a(x)|\psi(x)|$ при всех $t\in\mathbb{R}$ и почти всех $x\in\Omega$ и поточечно сходится при $t\to+\infty$ к

$$\int_{\psi>0}\overline{g}_+(x)\psi(x)dx+\int_{\psi<0}\overline{g}_-(x)\psi(x)dx<0,$$

а при $t\to-\infty$ – к

$$\int_{\psi<0}\overline{g}_+(x)\psi(x)dx+\int_{\psi>0}\overline{g}_-(x)\psi(x)dx>0.$$

С учетом замечания 4 как следствие теоремы 1 получаем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть в теореме 1 вместо условия 4 выполнены условия (i) и (ii). Тогда утверждение теоремы 1 остается верным.*

Замечание 4. *В силу замечания 3 теорема 2 обобщает основной результат по рассматриваемой проблеме из [11] (теорему 4.3.1). Кроме того, выбор аппроксимаций нелинейности в [11] такой же как в [4].*

При доказательстве теоремы 1 потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Предположим, что функционал $J(u)$, определенный равенством (8), неотрицательный. Тогда существует положительная константа C такая, что $J(v)>$*

$C||v||_X^2$ $\forall v \in N^{\perp}(L)$, где $N^{\perp}(L)$ – ортогональное дополнение к пространству решений $N(L)$ задачи (3)-(4) в гильбертовом пространстве X.

Доказательство. Предположим противное, тогда существует последовательность $\{v_n\} \subset N^{\perp}(L)$ такая, что $||v_n||_X = 1$, а $J(v_n) \to 0$. Так как последовательность $\{v_n\}$ ограничена в рефлексивном пространстве X, то из $\{v_n\}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность, которую мы переобозначим за $\{v_n\}$. Пусть $v_n \rightharpoonup v$. Определим на $X \times X$ функционал

$$J(u,w) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij}u_{x_i}w_{x_j}dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} c(x)u(x)w(x)dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma}\sigma(s)u(s)w(s)ds.$$

Заметим, что это билинейный коммутативный функционал на $X \times X$, причем $J(u,u) = J(u) \geq 0$ $\forall u \in X$, поэтому для произвольных $u, v \in X$ верно неравенство

$$J^2(u,w) \leq J(u,u)\cdot J(w,w). \tag{13}$$

При фиксированном w функционал $J(u,w)$ – линейный и непрерывный на X.

Имеем, согласно предположению $J(v_n, v_n) \to 0$, а $J(v_n, v) \to J(v,v)$ (в силу слабой сходимости последовательности v_n), но $J^2(v_n, v) \leq J(v_n, v_n)\cdot J(v,v)$, откуда следует, что $0 = J(v,v) = J(v)$. А, значит, как следует из неравенства 13, $J(u,v) = 0$ для любого $u \in X$. Таким образом получаем, что v – слабое решение однородной краевой задачи (3)-(4). Согласно теоремам о регулярности [8], v – сильное решение этой задачи. Итак, $v \in N(L)$. Отсюда, с учетом принадлежности v_n к $N^{\perp}(L)$ получим

$$0 = \int_{\Omega}(\nabla v_n \nabla v + v_n v)\,dx \to \int_{\Omega}\left((\nabla v)^2 + v^2\right)dx,$$

и, значит, $v \equiv 0$.

Согласно теоремам вложения Соболева, пространство X компактно вложено в $L_2(\Omega)$, поэтому $v_n \to 0$ в $L_2(\Omega)$. В силу равномерной эллиптичности L имеет место неравенство

$$2\cdot J(v_n) \geq \chi\int_{\Omega}(\nabla v_n(x))^2dx - c\int_{\Omega}v_n^2(x)dx,$$

где c – максимум $|c(x)|$ на $\overline{\Omega}$ и χ – константа равномерной эллиптичности. Последний интеграл стремится к 0, т.к. $v_n \to 0$ в L_2, и поэтому же первое слагаемое стремится к $\chi > 0$ (ведь $||v_n||_X = 1$). Получено противоречие с тем, что $J(v_n) \to 0$.

Лемма 1 доказана.

2. Доказательство теоремы 1.

Для простоты обозначений положим $\mathfrak{M}_l = \mathfrak{M}_{g_l}$, $l = 0, 1, 2, \ldots$.

Непустота множеств $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ была установлена выше. Сразу отметим, что в силу теоремы вложения Соболева пространство $W_q^2(\Omega)$ компактно вкладывается в пространство $C^1(\overline{\Omega})$ (т.к. по предположению $q > n$). Поэтому в перечисленных множествах лежат непрерывно дифференцируемые функции.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что для произвольной возрастающей последовательности натуральных чисел $\{n_k\}$ из любой последовательности $\{u_k\}$

такой, что $u_k \in \mathfrak{M}_{n_k}$ можно выделить подпоследовательности, сходящуюся в $C^1(\overline{\Omega})$ к некоторой точке из $\mathfrak{M}_0$.

Покажем сначала, что последовательность $\{u_k\}$ ограничена в пространстве $C^1(\overline{\Omega})$. Предположим противное, т.е. что последовательность $\{u_k\}$ неограничена в $C^1(\overline{\Omega})$. Тогда из нее можно выделить подпоследовательность $\{u_{k_l}\}$ такую, что $||u_{k_l}||_{C^1} \to +\infty$. Переобозначим эту подпоследовательность за $\{u_k\}$ и рассмотрим $v_k = u_k/||u_k||_{C^1}$.

В силу того, что u_k – решение краевой задачи (5)-(6), имеем

$$\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}v_{kx_i})_{x_j} = -c(x)v_k(x) - \frac{g_k(x,u_k(x))}{||u_k(x)||_{C^1}}.$$

Функции $v_k(x)$ ограничены на Ω единицей, по условию $|g_k(x,u_k(x))| < a(x) \in L_q(\Omega)$, а $||u_k(x)||_{C^1} \to +\infty$, поэтому норма правой части последнего тождества ограничена в $L_q(\Omega)$ константой не зависящей от k. Всё это влечет ограниченность в $W_q^2(\Omega)$ последовательности $\{v_k\}$ [12]. Т.к. $W_q^2(\Omega)$ – рефлексивное пространство, то в ограниченной последовательности v_k обязана содержаться слабо сходящаяся подпоследовательность. Без ущерба для общности будем считать, что сама $\{v_k\}$ слабо сходится к некоторому v. Мы уже отмечали, что в нашем случае $W_q^2(\Omega)$ компактно вложено в $C^1(\overline{\Omega})$, поэтому $v_k \to v$ в $C^1(\overline{\Omega})$, а т.к. $||v_k||_{C^1} = 1$, то и $||v||_{C^1} = 1$, т.е. $v(x)$ – ненулевая функция. Заметим, что для v_k как и для u_k выполняется граничное условие (2), а значит оно выполняется и для v, т.к. $v_k \to v$ в пространстве $C^1(\overline{\Omega})$.

Так как $v_k \rightharpoonup v$ в $W_q^2(\Omega)$, то $Lv_k \rightharpoonup Lv$ в $L_q(\Omega)$. Но $Lv_k(x) = \dfrac{g_0(x,u_k(x))}{||u_k(x)||_{C^1}}$, где правая часть вследствие неравенства $|g_0(x,s)| < a(x)$ для п.в. $s \in \mathbb{R}$ и того, что $||u_k(x)||_{C^1} \to +\infty$, стремится к нулю в $L_q(\Omega)$. Значит при предельном переходе $k \to +\infty$ мы получим равенство $Lv(x) = 0$ п.в. на Ω. Выше отмечалось, что v – ненулевая функция, удовлетворяющая краевому условию (2), поэтому v – нетривиальное решение однородной краевой задачи (3)-(4).

Если ядро $N(L)$ нулевое, то противоречие получено уже на этом шаге. Далее предполагаем, что $N(L)$ нетривиально.

Теперь разложим u_k как $u_{k1} + u_{k2}$, где первое слагаемое из $N(L)$, а второе из ортогонального дополнения к $N(L)$ в смысле $W_2^1(\Omega)$.

Заметим, что последовательность $J_k(u_k)$ ограничена сверху нулем. Действительно, т.к. u_k – точка минимума функционала J_k, то верно неравенство $J_k(u_k) \le J_k(0(x)) = 0$, где $0(x)$ – нулевая на Ω функция. С другой стороны

$$\begin{aligned}
J_k(u_k) = J(u_k) - \int_\Omega dx \int_0^{u_k(x)} g_k(x,s)ds = \\
J(u_{k2}) - \int_\Omega dx \int_0^{(u_{k1}+u_{k2})(x)} g_k(x,s)ds = \\
J(u_{k2}) - \int_\Omega dx \left(\int_0^{u_{k1}(x)} g_k(x,s)ds + \int_{u_{k1}(x)}^{(u_{k1}+u_{k2})(x)} g_k(x,s)ds \right) \ge \\
J(u_{k2}) - \int_\Omega a(x)|u_{k2}(x)|dx - \int_\Omega dx \int_0^{u_{k1}(x)} g_k(x,s)ds.
\end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что $J(u_{k1}+u_{k2}) = J(u_{k2})$, т.к. $u_{k1} \in N(L)$, а $J(u) = \frac{1}{2}(Lu, u)$ на $W_q^2(\Omega)$.

Рассмотрим получившуюся оценку. Слагаемое

$$J(u_{k2}) - \int_\Omega a(x)|u_{k2}(x)|dx$$

ограничено снизу. Действительно, согласно лемме 1 существует положительная константа C такая, что

$$J(u_{k2}) > C||u_{k2}||^2_{W_2^1(\Omega)} \geq C\int_\Omega u_{k2}^2(x)dx.$$

Поэтому

$$J(u_{k2}) - \int_\Omega a(x)|u_{k2}(x)|dx \geq \int_\Omega (Cu_{k2}^2(x) - a(x)|u_{k2}(x)|)dx \geq \int_\Omega \frac{-a^2(x)}{4C}dx$$

(в последнем неравенстве воспользовались ограниченностью снизу квадратичной функции с положительным старшим коэффициентом). Т.к. $a \in L_q(\Omega)$, где $q > n \geq 2$, то последний интеграл конечен.

Теперь обратимся к слагаемому $-\int_\Omega dx \int_0^{u_{k1}(x)} g_k(x,s)ds$ в оценке для $J_k(u_k)$. Это слагаемое отличается от

$$I_k = -\int_\Omega dx \int_0^{u_{k1}(x)} g_0(x,s)ds$$

на величину, стремящуюся к 0 при $k \to +\infty$. Это следует из оценки (11). Установим, что $I_k \to +\infty$.

Действительно, норма $||u_{k1}||_{W_2^1(\Omega)}$ стремится к $+\infty$ с ростом k. В противном случае для некоторой подпоследовательности u_{k_l} норма $u_{k_l 1}$ в пространстве $W_2^1(\Omega)$ была бы ограничена. Вспомним, что $v_k \rightharpoonup v$ в $W_q^2(\Omega)$, но т.к. по теореме вложения Соболева пространство $W_q^2(\Omega)$ компактно вложено в $W_2^1(\Omega)$, то $v_{k_l} \to v$ в $W_2^1(\Omega)$. В силу ограниченности u_{k1} получаем, что

$$\frac{u_{k_l 2}}{||u_{k_l}||_{C^1}} \to v(x) \text{ в } W_2^1(\Omega),$$

как и

$$v_{k_l} = \frac{u_{k_l}}{||u_{k_l}||_{C^1}} = \frac{u_{k_l 1} + u_{k_l 2}}{||u_{k_l}||_{C^1}}$$

(пользуемся тем, что $||u_k||_{C^1} \to +\infty$). Последнее означает, что последовательность элементов $\frac{u_{k_l 2}}{||u_{k_l}||_{C^1}}$ ортогонального дополнения $N^\perp(L)$ сходится к ненулевому элементу v ядра $N(L)$, чего не может быть, значит $||u_{k1}||_{W_2^1(\Omega)} \to +\infty$.

Этот вывод вместе с включением $u_{k1} \in N(L)$ немедленно влечет за собой то, что $I_k \to +\infty$ в силу условия (9)). Окончательно, получаем

$$-\int_\Omega dx \int_0^{u_{k1}(x)} g_k(x,s)ds \to +\infty.$$

Таким образом, члены числовой последовательности $\{J_k(u_k)\}$ могут быть представлены суммой двух слагаемых, одно из которых ограничено снизу, а другое неограничено сверху, поэтому сама $\{J_k(u_k)\}$ не может быть ограничена сверху, что противоречит ранее установленному неравенству $J_k(u_k) \leq 0$. Значит исходное предположение о том, что последовательность $u_k(x)$ неограничена в $C^1(\overline{\Omega})$, неверно.

Для последовательности u_k, как последовательности решений краевой задачи (5)-(6), выполняются равенства

$$-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{kx_i})_{x_j} = -c(x)u_k(x) + g_k(x, u_k(x)),$$

$$Bu_k|_\Gamma = 0.$$

Правая часть предпоследнего равенства ограничена в $L_q(\Omega)$ в силу того, что $u_k(x)$ – ограничена в $C^1(\overline{\Omega})$ и $|g(x,s)| < a(x)\ \forall s \in \mathbb{R}$ $(a \in L_q(\Omega))$. Это влечет ограниченность в $W_q^2(\Omega)$ последовательности u_k [12]. Пространство $W_q^2(\Omega)$ – рефлексивное, поэтому из ограниченной последовательности u_k можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность, которую мы будем попрежнему обозначать u_k. Пусть $u_k \rightharpoonup \hat{u}$. Как и раньше мы пользуемся компактностью вложения пространства $W_q^2(\Omega)$ в пространство $C^1(\overline{\Omega})$ и получаем, что $u_k \to \hat{u}$ в $C^1(\overline{\Omega})$, а т.к. $Bu_k|_\Gamma = 0$, то это нам дает $B\hat{u}|_\Gamma = 0$.

Теперь покажем, что

$$J_0(\hat{u}) = \inf_{w\in X} J_0(w) = d_0.$$

Выберем произвольное u_0 из множества $\mathfrak{M}_0$.

Обозначим

$$\gamma_k = \int_\Omega dx \int_\mathbb{R} |g_k(x,s) - g_0(x,s)|ds.$$

Имеем $\forall u \in W_2^1(\Omega)$ в силу оценки (11)

$$|J_0(u) - J_k(u)| = \left|\int_\Omega dx \int_0^{u(x)} (g_k(x,s) - g_0(x,s))ds\right| \leq \gamma_k.$$

Теперь, используя последнее неравенство и определение u_k и u_0 как функций, доставляющих минимум соответствующим функционалам, получаем следующую цепочку неравенств:

$$d_0 - \gamma_k = J_0(u_0) - \gamma_k \leq J_0(u_k) - \gamma_k \leq J_k(u_k) \leq J_k(u_0) \leq J_0(u_0) + \gamma_k = d_0 + \gamma_k.$$

Поэтому $J_k(u_k) \to d_0$, т.к. $\gamma_k \to 0$ при $k \to +\infty$ по условию. Заметим также, что $J_k(u_k) \to J_0(\hat{u})$, что следует из соотношений $J_0(u_k) \to J_0(\hat{u})$ (т.к. функционал J_0 непрерывен на $C^1(\overline{\Omega})$) и $|J_k(u_k) - J_0(u_k)| \leq \gamma_k \to 0$. В итоге, $J_0(\hat{u}) = d_0 = \inf\limits_{w\in X} J_0(w)$. Как уже отмечалось выше, последнее влечет, что $\hat{u}$ является сильным решением краевой задачи (1)-(2) из $W_q^2(\Omega)$. Если же решение исходной задачи, доставляющее минимум функционалу J_0 единственно, то это влечет сходимость в $C^1(\overline{\Omega})$ первоначальной последовательности $\{u_k\}$ к этому решению.

1. *Гольдштик М.А.* Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости. // Докл. АН СССР. – 1962. – Т.147. – №6. – С.1310-1313.
2. *Chang K.C.* Free boundary problems and the set-valued mappings // J. Differential Equations. – 1983. – V.49. – №1. – P.1-28

3. *Красносельский М.А., Покровский А.В.* Уравнениях с разрывными нелинейностями // Докл. АН СССР. – 1979. – Т.248. – №5. – С.1056-1059.
4. *Павленко В.Н., Искаков Р.С.* Непрерывные аппроксимации разрывных нелинейностей полулинейных уравнений эллиптического типа // Укр. матем. журн. – 1999. – Т.51. – №2. – С.224-233.
5. *Красносельский М.А., Покровский А.В.* Правильные решения уравнений с разрывными нелинейностями // ДАН СССР. – 1976. – Т.226. – №3. – С.506-509.
6. *Красносельский М.А., Покровский А.В.* Правильные решения уравнений с разрывными нелинейностями // Труды Всесоюзн. конф. по уравнениям с частными производными, посвященной 75-летию со дня рождения академика И.Г. Петровского. – М.: Изд-во Моск. ун-та. – 1978. – С.346-347.
7. *Павленко В.Н., Винокур В.В.* Резонансные краевые задачи для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Известия ВУЗов. – Математика. – 2001. – №5. – С.45-58.
8. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1964. – 540 с.
9. *Красносельский М.А., Покровский А.В.* Системы с гистерезисом. – М.: Наука, 1983. – 272 с.
10. *Landesman E., Lazer A.* Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance // J. Math. and Mech. – 1970. – V.19. – №7. – P.609-623.
11. *Потапов Д.К.* Задачи на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Екатеринбург, 2003. – 101с.
12. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. – М.: Ин. лит., 1962. – 205с.

Челябинский Государственный униввреситет,
ул. Братьев Кашириных, 129
454021, г.Челябинск, Россия
`myth@csu.ru`
`pavlenko@csu.ru`

Получено 30.08.2004