

©2005. I.M. Конет

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЛЯ ІНВАРІАНТНИХ $\Lambda_{(\mu)}$ -ЕЛІПТИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ НА РІМАНОВИХ МНОГОВИДАХ

На спеціальних ріманових многовидах для інваріантних $\Lambda_{(\mu)}$ -еліптичних операторів запроваджено інтегральні перетворення з невідокремленими змінними, що дало можливість одержати аналітичні зображення фундаментальних розв'язків для $\Lambda_{(\mu)}$ -еліптичних рівнянь та систем рівнянь інваріантних відносно групи обертань навколо початку координат евклідового простору E_n .

Дослідження крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними методом відображення в областях з негладкою межею приводить до побудови фундаментальних розв'язків на ріманових многовидах спеціальної конструкції. Одержати аналітичне зображення фундаментальних розв'язків для достатньо широкого класу рівнянь можна методом інтегрального перетворення з невідокремленими змінними, заснованому на спеціальному зображенні міри Дірака (дельта-функції Дірака).

1. Інтегральне перетворення з невідокремленими змінними. Розглянемо евклідов простір $E_n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n); -\infty < x_j < +\infty; j = \overline{1, n}\}$ Віддаль між точками $x \in E_n$ та $\xi \in E_n$ позначимо через $R = |x - \xi| = \left[\sum_{j=1}^n (x_j - \xi_j)^2 \right]^{1/2}$, а через $\omega_n = 2(\pi)^{n/2} [\Gamma(n/2)]^{-1}$ позначимо величину площі одиничної сфери в E_n . В книзі [1] одержано інтегральне зображення міри Дірака в E_n :

$$\delta(x - \xi) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty j_{(n-2)/2}(\lambda R) \lambda^{n-1} d\lambda. \quad (1)$$

Тут бере участь нормована функція Бесселя 1-го роду [2]

$$j_\nu(x) = 2^\nu \Gamma(\nu + 1) x^{-\nu} J_\nu(x), \quad j_\nu(0) = 1, \quad j'_\nu(0) = 0, \quad 2\nu + 1 \geq 0.$$

При цьому справджується тотожня рівність [2];

$$\Delta_n [j_{(n-2)/2}(\lambda R)] \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} [j_{(n-2)/2}(\lambda R)] = -\lambda^2 j_{(n-2)/2}(\lambda R). \quad (2)$$

Розглянемо узагальнений диференціальний оператор Лежандра [3]

$$\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dy^2} + cthy \frac{d}{dy} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_1^2}{1 - chy} + \frac{\mu_2^2}{1 + chy} \right), \quad \mu_1 \geq \mu_2 \geq 0, \quad (\mu) = (\mu_1, \mu_2).$$

Визначимо величини та функції [3,4]:

$$\begin{aligned} \nu^\pm &= \frac{1}{2}(\mu_1 \pm \mu_2), \quad \Omega_{(\mu)}(\beta) = \beta \cdot 2^{\mu_1 - \mu_2} (2\pi^2)^{-1} sh 2\pi\beta \times \\ &\times \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu^+ + i\beta\right) \right|^2 \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu^- + i\beta\right) \right|^2, \end{aligned}$$

$\Gamma(x)$ - "гамма-функція" Ейлера, $\beta \in (0, \infty)$.

В монографії [4] одержано інтегральне зображення міри Дірака, породженої оператором $\Lambda_{(\mu)}$:

$$\delta(y - \eta) = \int_0^{\infty} P_{-1/2+i\beta}^{(\mu)}(chy) P_{-1/2+i\beta}^{(\mu)}(ch\eta) \Omega_{(\mu)}(\beta) d\beta \cdot sh\eta. \quad (3)$$

У рівності (3) бере участь узагальнена приєднана функція Лежандра першого роду $P_{-1/2+i\beta}^{(\mu)}(chy)$ як обмежений на множині $(0, \infty)$ розв'язок узагальненого диференціального рівняння Лежандра [3]

$$\left(\Lambda_{(\mu)} + \beta^2\right)u(y) = 0. \quad (4)$$

Якщо тепер розглянути евклідов простір $E_{n+1}^+ = \{(x, y) : x_j \in (-\infty, \infty), j = \overline{1, n}; y \in (0, \infty)\}$, то на основі тензорного добутку узагальнених функцій [5] маємо інтегральне зображення міри Дірака в E_{n+1}^+ :

$$\begin{aligned} \delta(x - \xi) \otimes \delta(y - \eta) &\equiv \delta(x - \xi, y - \eta) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^{\infty} j_{(n-2)/2}(\lambda R) \lambda^{n-1} d\lambda \times \\ &\times \int_0^{\infty} \varphi_{\mu}(y, \eta, \beta) d\beta sh\eta = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi_{\mu}(y, \eta, \beta) j_{(n-2)/2}(\lambda R) \lambda^{n-1} d\lambda d\beta sh\eta. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут прийнято позначення:

$$\varphi_{\mu}(y, \eta, \beta) = P_{-1/2+i\beta}^{(\mu)}(chy) P_{-1/2+i\beta}^{(\mu)}(ch\eta) \Omega_{(\mu)}(\beta).$$

Інтегральне зображення (5) міри Дірака визначає пряме $H_{n,(\mu)}$ і обернене $H_{n,(\mu)}^{-1}$ інтегральне перетворення типу Бохнера-Лежандра [6]:

$$\begin{aligned} H_{n,(\mu)}[f(\xi, \eta)] &= \int_0^{\infty} \int_{E_n} f(\xi, \eta) j_{(n-2)/2}(\lambda R(x, \xi)) P_{-1/2+i\beta}^{(\mu)}(ch\eta) d\xi sh\eta d\eta \equiv \\ &\equiv \tilde{f}(\lambda, x, \beta), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} H_{n,(\mu)}^{-1}[\tilde{f}(\lambda, x, \beta)] &= \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \tilde{f}(\lambda, x, \beta) P_{-1/2+i\beta}^{(\mu)}(chy) \Omega_{(\mu)}(\beta) \lambda^{n-1} d\lambda d\beta \equiv \\ &\equiv f(x, y). \end{aligned} \quad (7)$$

При цьому мають місце тотожності:

$$H_{n,(\mu)}[\Lambda_{(\mu)}[f]] = -\beta^2 \tilde{f}, \quad H_{n,(\mu)}[\Delta_n f] = -\lambda^2 \tilde{f}. \quad (8)$$

Ми вважаємо, що функція $f(x, y)$ володіє потрібними властивостями.

Узагальнимо запроваджене формулами (6), (7) інтегральне перетворення на випадок спеціального ріманового многовиду $R_{n+1}^{+(m)}$, побудованого в роботі [2].

Нехай $R_2^{(m)}$ - ріманова поверхня функції $\omega = \sqrt[m]{z} \equiv \sqrt[m]{x_1 + ix_2}$ для $m \in [2, \infty)$, $R_2^{(\infty)}$ - ріманова поверхня функції $w = \ln z = \lim_{m \rightarrow \infty} m \left(\sqrt[m]{z} - 1 \right)$. В $R_2^{(m)}$ будемо користуватися полярними координатами (r, φ) : $r \in (0, \infty)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi m$; $\varphi = \varphi \text{ mod } (2\pi m)$. Якщо E_{n-1}^+ - евклідов півпростір точок $\{(x_3, x_4, \dots, x_n, y) : x_j \in (-\infty, +\infty), j = \overline{3, n}; y \in (0, \infty)\}$, то ріманів многовид

$$R_{n+1}^{+(m)} = R_2^{(m)} \times E_{n-1}^+, \quad R_{n+1}^{+(\infty)} = R_2^{(\infty)} \times E_{n-1}^+.$$

Таким чином, положення змінної точки в $R_{n+1}^{+(m)}$ визначається параметрами $(r, \varphi, x_3, x_4, \dots, x_n, y)$, а положення фіксованої точки (ξ, η) - параметрами $(\rho, \varphi_0, \xi_3, \xi_4, \dots, \xi_n, \eta)$. Точку, яка лежить на k -ім екземплярі $R_{n+1}^{+(k)} = R_2^{(k)} \times E_{n-1}^+$ ріманового многовиду $R_{n+1}^{+(m)}$ позначимо через (x^k, y) . При цьому перший екземпляр ріманового многовиду $R_{n+1}^{+(k)}$ будемо ототожнювати з евклідовим півпростором E_{n+1}^+ [2].

Згідно з роботою [2] визначимо функції:

$$R(x, \xi) = \left[r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \varphi_0) + \sum_{k=3}^n (x_k - \xi_k)^2 \right]^{1/2},$$

$$R_1(x, \xi) = \left[r^2 + \rho^2 + 2r\rho \operatorname{ch} \alpha + \sum_{k=3}^n (x_k - \xi_k)^2 \right]^{1/2},$$

$$K_m(\alpha, \varphi - \varphi_0) = \frac{\sin \frac{\pi + \varphi - \varphi_0}{m}}{\operatorname{ch} \frac{\alpha}{m} - \cos \frac{\pi + \varphi - \varphi_0}{m}} + \frac{\sin \frac{\pi - (\varphi - \varphi_0)}{m}}{\operatorname{ch} \frac{\alpha}{m} - \cos \frac{\pi - (\varphi - \varphi_0)}{m}},$$

$$J(\varphi - \varphi_0) = \begin{cases} 1, & |\varphi - \varphi_0| < \pi \\ 0, & |\varphi - \varphi_0| > \pi \end{cases},$$

$$K_{(\infty)}(\alpha, \varphi - \varphi_0) = \frac{\pi + (\varphi - \varphi_0)}{\alpha^2 + (\pi + \varphi - \varphi_0)^2} + \frac{\pi - (\varphi - \varphi_0)}{\alpha^2 + [\pi - (\varphi - \varphi_0)]^2},$$

$$\begin{aligned} \Phi_{(m)} &= j_{(n-2)/2}(\lambda R) J(\varphi - \varphi_0) - \frac{1}{2\pi m} \int_0^\infty j_{(n-2)/2}(\lambda R_1) K_m(\alpha, \varphi - \varphi_0) d\alpha \equiv \\ &\equiv \frac{1}{m} \left[j_{(n-2)/2}(\lambda R) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left(j_{(n-2)/2}(\lambda R) - j_{(n-2)/2}(\lambda R_1) \right) K_m(\alpha, \varphi - \varphi_0) d\alpha \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{(\infty)} &= j_{(n-2)/2}(\lambda R) J(\varphi - \varphi_0) - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty j_{(n-2)/2}(\lambda R_1) K_{(\infty)}(\alpha, \varphi - \varphi_0) d\alpha \equiv \\ &\equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(j_{(n-2)/2}(\lambda R) - j_{(n-2)/2}(\lambda R_1) \right) K_{(\infty)}(\alpha, \varphi - \varphi_0) d\alpha. \end{aligned} \quad (10)$$

Згідно з роботою [2] маємо:

1) інтегральне зображення міри Дірака на рімановім многовиді $R_{n+1}^{+(m)}$

$$\tilde{\delta}_{(\xi,\eta)} = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_{(\mu)}(y, \eta, \beta) \Phi_{(m)}(\lambda, R, \varphi - \varphi_0) \lambda^{n-1} d\lambda d\beta, \quad (11)$$

2) інтегральне зображення міри Дірака на рімановім многовиді $R_{n+1}^{+(\infty)}$

$$\tilde{\delta}_{(\xi,\eta)} = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_{(\mu)}(y, \eta, \beta) \Phi_{(\infty)}(\lambda, R, \varphi - \varphi_0) \lambda^{n-1} d\lambda d\beta, \quad (12)$$

Інтегральне зображення (11) міри Дірака породжує пряме $H_{n,(\mu)}^{(m)}$ і обернене $H_{n,(\mu)}^{-(m)}$ інтегральне перетворення типу Бохнера-Шестопаля на $R_{n+1}^{+(m)}$ ($m \in [2, \infty)$):

$$\begin{aligned} H_{n,(\mu)}^{(m)}[g(\xi, \eta)] &= \int_0^\infty \int_{R_{n+1}^{+(m)}} g(\xi, \eta) P_{-1/2+i\beta}^{(\mu)}(ch\eta) \Phi_{(m)}(\lambda, R, \varphi - \varphi_0) sh\eta d\eta d\sigma \equiv \\ &\equiv \tilde{g}(\lambda, x, \beta), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} H_{n,(\mu)}^{-(m)}[\tilde{g}(\lambda, x, \beta)] &= \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{g}(\lambda, x, \beta) P_{-1/2+i\beta}^{(\mu)}(chy) \Omega_{(\mu)}(\beta) \lambda^{n-1} d\beta d\lambda \equiv \\ &\equiv g(x, y). \end{aligned} \quad (14)$$

Інтегральне зображення (12) міри Дірака породжує відповідно пряме $H_{n,(\mu)}^{(\infty)}$ і обернене $H_{n,(\mu)}^{-(\infty)}$ інтегральне перетворення типу Бохнера-Шестопаля на $R_{n+1}^{+(\infty)}$:

$$\begin{aligned} H_{n,(\mu)}^{(\infty)}[g(\xi, \eta)] &= \int_0^\infty \int_{R_{n+1}^{+(\infty)}} g(\xi, \eta) P_{-1/2+i\beta}^{(\mu)}(ch\eta) \Phi_{(\infty)}(\lambda, R, \varphi - \varphi_0) \times \\ &\times sh\eta d\eta d\sigma \equiv \tilde{g}(\lambda, x, \beta), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} H_{n,(\mu)}^{-(\infty)}[\tilde{g}(\lambda, x, \beta)] &= \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{g}(\lambda, x, \beta) P_{-1/2+i\beta}^{(\mu)}(chy) \times \\ &\times \Omega_{(\mu)}(\beta) \lambda^{n-1} d\lambda d\beta \equiv g(x, y). \end{aligned} \quad (16)$$

У рівностях (13), (15) $d\sigma$ - елемент площі на рімановім многовиді.

При цьому для $m \in [2, \infty]$ мають місце тотожності:

$$H_{n,(\mu)}^{(m)}[\Delta_n g] = -\lambda^2 H_{n,(\mu)}^{(m)}[g]; \quad H_{n,(\mu)}^{(m)}[\Lambda_{(\mu)} g] = -\beta^2 H_{n,(\mu)}^{(m)}[g]. \quad (17)$$

2. Побудова фундаментальних розв'язків для інваріантних $\Lambda_{(\mu)}$ -еліптичних операторів.

В E_{n+1}^+ розглянемо інваріантне відносно групи обертань $O(n)$ $\Lambda_{(\mu)}$ -еліптичне рівняння

$$L[u] \equiv \sum_{k=0}^{\ell} A_k(\Delta_n, \Lambda_{(\mu)})u = f(x, y), \quad (18)$$

де $A_\ell = 1$, $A_k(z_1, z_2)$ зображаються всюди збіжними рядами в просторі \mathbb{C}^2 комплексних змінних (z_1, z_2) .

У результаті застосування до рівняння (18) інтегрального оператора $H_{n,(\mu)}$ за правилом (6) одержуємо алгебраїчне рівняння

$$\sum_{k=0}^{\ell} A_k(-\lambda^2, -\beta^2)\tilde{u} = -\tilde{f}.$$

Звідси знаходимо, що функція

$$\tilde{u} = -\frac{\tilde{f}(\lambda, x, \beta)}{P_\ell(-\lambda^2, -\beta^2)}, \quad P_\ell(-\lambda^2, -\beta^2) = \sum_{k=0}^{\ell} A_k(-\lambda^2, -\beta^2). \quad (19)$$

Застосувавши до функції \tilde{u} , визначеної формулою (19), за правилом (7) оператор $H_{n,(\mu)}^{-1}$, маємо єдиний розв'язок рівняння (18):

$$u(x, y) = \int_0^\infty \int_{E_n} \mathcal{E}(x, \xi, y, \eta) f(\xi, \eta) sh\eta d\xi d\eta. \quad (20)$$

Тут бере участь фундаментальна функція

$$\mathcal{E}(x, \xi, y, \eta) = -\frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\varphi_{(\mu)}(y, \eta, \beta)}{P_\ell(-\lambda^2, -\beta^2)} j_{(n-2)/2}(\lambda R(x, \xi)) \lambda^{n-1} d\lambda d\beta \quad (21)$$

оператора L .

Для рівняння Лапласа з оператором $\Lambda_{(\mu)}$

$$(\Delta_n + \Lambda_{(\mu)})u = 0 \quad (22)$$

фундаментальний розв'язок згідно формули (21) має структуру:

$$\mathcal{E}(x, \xi, y, \eta) \equiv \mathcal{E}(R, y, \eta) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\varphi_{(\mu)}(y, \eta, \beta)}{\lambda^2 + \beta^2} j_{(n-2)/2}(\lambda R) \lambda^{n-1} d\lambda d\beta. \quad (23)$$

За викладеною вище схемою методом інтегрального перетворення типу Бохнера-Шестопада будуються фундаментальні розв'язки для рівняння (18) на ріманових многовидах $R_{n+1}^{+(m)}$ для $m \in [2, \infty]$:

$$\mathcal{E}_{(m)}(x, \xi; y, \eta) = -\frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\varphi_{(\mu)}(y, \eta, \beta)}{P_\ell(-\lambda^2, -\beta^2)} \Phi_{(m)}(\lambda, R, \varphi - \varphi_0) \lambda^{n-1} d\beta d\lambda. \quad (24)$$

Якщо в рівності (23) покласти $P_\ell = -(\lambda^2 + \beta^2)$, то одержимо структуру фундаментального розв'язку для рівняння Лапласа (23) на рімановім многовиді $R_{n+1}^{+(m)}$ для $m \in [2, \infty)$ та на рімановім многовиді $R_{n+1}^{+(\infty)}$, замінивши формально $\Phi_{(m)}$ на $\Phi_{(\infty)}$.

Розглянемо тепер строго еліптичну за І.Г. Петровським інваріантну відносно групи обертань $O(n)$ систему рівнянь з оператором $\Lambda_{(\mu)}$ ($\Lambda_{(\mu)}$ - еліптична система рівнянь):

$$\sum_{j=1}^{\ell} P_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \Lambda_{(\mu)} \right) u_j(x_1, x_2, \dots, x_n; y) = -f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, y), \quad i = \overline{1, \ell} \quad (25)$$

У формулі (25) беруть участь диференціальні многочлени

$$P_{ij} = \sum_{2|k|+k_{n+1} \leq 2m} a_{k_1 k_2 \dots k_n k_{n+1}} D_{x_1}^{k_1} D_{x_2}^{k_2} \dots D_{x_n}^{k_n} \Lambda_{(\mu)}^{k_{n+1}}, \quad i, j = \overline{1, \ell},$$

$$|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n.$$

ОЗНАЧЕННЯ 1. $\Lambda_{(\mu)}$ -еліптична система (25) називається інваріантною відносно групи обертань $O(n)$, якщо характеристичний многочлен матриці системи

$$\det A(-i\lambda_1, -i\lambda_2, \dots, -i\lambda_n, -\beta^2) \equiv \det \left\{ P_{ij}(-i\lambda_1, \dots, -i\lambda_n, -\beta^2) \right\}_{i,j=1}^{\ell} = P_{2m\ell}(-\lambda^2, -\beta^2). \quad (26)$$

Тут $\lambda^2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2$, $P_{2m\ell}$ - многочлен степеня $2m\ell$ від двох змінних (z_1, z_2) .

Для інваріантних систем (25) завжди можна знайти єдину диференціальну матрицю Θ розміру $\ell \times \ell$ таку, що система набуде канонічної форми

$$Au = A\Theta v = P_{2m\ell}(\Delta_n, \Lambda_{(\mu)}) E_\ell v, \quad (27)$$

де E_ℓ - одинична матриця розміру $\ell \times \ell$.

Рівність (27) означає, що інваріантна відносно групи обертань $O(n)$ строго $\Lambda_{(\mu)}$ -еліптична за І.Г. Петровським система рівнянь (25) приводиться до одного рівняння вигляду

$$P_{2m\ell}(\Delta_n, \Lambda_{(\mu)}) v_j \equiv \left(\sum_{i=0}^{2m\ell} b_i \Delta_n^{2m\ell-i} \Lambda_{(\mu)}^i \right) v_j = -f_j; \quad j = \overline{1, \ell}. \quad (28)$$

ОЗНАЧЕННЯ 2. Фундаментальною матрицею розв'язків для системи (25) назовемо таку матрицю $E(x, \xi; y, \eta)$ розміру $\ell \times \ell$, яка в розумінні теорії узагальнених функцій задовольняє рівняння

$$A \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}; \Lambda_{(\mu)} \right) E = -\delta(x - \xi) \otimes (sh\eta)^{-1} \delta(y - \eta) E_\ell \equiv \delta(x_1 - \xi_1) \otimes \delta(x_2 - \xi_2) \otimes \dots \otimes \delta(x_n - \xi_n) \otimes (sh\eta)^{-1} \delta(y - \eta) E_\ell, \quad (29)$$

де знак \otimes означає тензорний добуток функціоналів.

ТЕОРЕМА 1. Якщо $G(R(x, \xi), y, \eta)$ - фундаментальний розв'язок для $\Lambda_{(\mu)}$ -еліптичного рівняння (28), то фундаментальна матриця розв'язків для системи (25) має структуру:

$$E(x, \xi, y, \eta) = \Theta\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}; \Lambda_{(\mu)}\right) G(R(x, \xi), y, \eta). \quad (30)$$

Доведення. Згідно формули (21) фундаментальний розв'язок

$$G(R(x, \xi), y, \eta) = -\frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\varphi_{(\mu)}(y, \beta, \beta)}{P_{2m\ell}(-\lambda^2, -\beta^2)} j_{(n-2)/2}(\lambda R(x, \xi)) \lambda^{n-1} d\lambda d\beta, \quad (31)$$

Тоді безпосередньо одержуємо, що

$$\begin{aligned} AE &= A\Theta G = P_{2m\ell}(\Delta_n, \Lambda_{(\mu)}) G E_\ell = \\ &= -\delta(x - \xi) \otimes (sh\eta)^{-1} \delta(y - \eta) E_\ell \equiv -\delta_{(\xi, \eta)} E_\ell. \end{aligned}$$

Аналогічно одержуються теореми про структуру фундаментальних матриць розв'язків для інваріантних систем (25) на ріманових многовидах $R_{n+1}^{+(m)}$.

ОЗНАЧЕННЯ 3. m -розгалуженою (нескінченно розгалуженою) фундаментальною матрицею розв'язків з гіперплощиною галуження $(0, 0) \times E_{n-1}^+$ для системи (25) називається така фундаментальна матриця розв'язків $E_{(m)}(x, \xi, y, \eta)$ ($E_{(\infty)}(x, \xi, y, \eta)$), яка в $R_{n+1}^{+(m)}$ визначена всюди, крім гіперплощини галуження, й задовольняє такі умови:

- 1) $E_{(m)}(x, \xi, y, \eta)$ має в $R_{n+1}^{+(m)}$ одну характеристичну особливість в точці $(\xi, \eta) \in R_{n+1}^{+(1)} \equiv E_{n+1}^+$;
- 2) $E_{(m)}$ ($m \in [2, \infty]$) нескінченно диференційована всюди, крім точки $(\xi, \eta) \in E_{n+1}^+$ та гіперплощини галуження;
- 3) $\sum_{k=1}^m E_{(m)}(x, \xi^k, y, \eta) = E(x, \xi, y, \eta)$

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} E_{(\infty)}(x, \xi^k, y, \eta) = E(x, \xi, y, \eta) \right),$$

де $(\xi^1, \eta) \equiv (\xi, \eta)$, а точки $(\xi^k, \eta) \in R_{n+1}^{+(k)}$ лежать на тому ж місці, що й точка (ξ, η) , але в екземплярі $R_{n+1}^{+(k)}$; $E(x, \xi, y, \eta)$ - звичайна фундаментальна матриця розв'язків.

ТЕОРЕМА 2. Якщо $G_{(m)}(R(x, \xi), y, \eta)$ є m -розгалужений фундаментальний розв'язок для $\Lambda_{(\mu)}$ -еліптичного рівняння (28), то m -розгалужена фундаментальна матриця розв'язків $E_{(m)}$ для системи (25) визначається формулою:

$$E_{(m)}(x, \xi, y, \eta) = \Theta\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}; \Lambda_{(\mu)}\right) G_{(m)}(R(x, \xi), y, \eta). \quad (32)$$

Доведення. Згідно формули (24) фундаментальний розв'язок

$$G_{(m)}(R(x, \xi), y, \eta) = -\frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\varphi_{(\mu)}(y, \beta, \beta)}{P_{2m\ell}(-\lambda^2, -\beta^2)} \Phi_m(\lambda, R, \varphi - \varphi_0) \lambda^{n-1} d\beta d\lambda. \quad (33)$$

Безпосередньо маємо, що

$$\begin{aligned} AE_m &= A\Theta G_{(m)} = P_{2m\ell}(\Delta, \Lambda_{(\mu)}) G_{(m)}(R(x, \xi), y, \eta) E_\ell = \\ &= -\tilde{\delta}(x - \xi) \otimes (sh\eta)^{-1} \delta(y - \eta) E_\ell \equiv -\tilde{\delta}_{(\xi, \eta)} E_\ell. \end{aligned}$$

Властивості 1) та 2) очевидні. Доведення властивості 3) проводиться так, як в роботі [7].

ТЕОРЕМА 3. *Якщо $G_{(\infty)}(R(x, \xi), y, \eta)$ є нескінченно розгалужений фундаментальний розв'язок для $\Lambda_{(\mu)}$ -еліптичного рівняння (28), то нескінченно розгалужена фундаментальна матриця розв'язків $E_{(\infty)}$ для системи (25) визначається формулою*

$$E_{(\infty)}(x, \xi, y, \eta) = \Theta\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}; \Lambda_{(\mu)}\right) G_{(\infty)}(R(x, \xi), y, \eta). \quad (34)$$

Доведення проводиться за логічною схемою роботи [7].

1. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. -М.: Наука, 1965. -328с.
2. Шестопал А.Ф. Интегральные преобразования с неразделенными переменными. -Киев, 1973. -46. -(Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 73.6).
3. Вирченко Н.А., Федотова И.А. Обобщенные функции Лежандра и их применение. -Киев, 1998. -158с.
4. Конет І.М., Ленюк М.П. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока. -Чернівці: Прут, 2002. -248с.
5. Шварц Л. Математические методы для физических наук. -М.: Мир, 1965. -412с.
6. Бохнер С. Лекции об интегралах Фурье. -М.: Физматгиз, 1962г. -360с.
7. Ленюк М.П. Розгалужені фундаментальні розв'язки задачі Коші для інваріантних параболічних рівнянь і систем рівнянь // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. -Київ: Ін-т математики, 1995. -Вип.8. -С.105-114.

Чернівецький національний університет
вул.Коцюбинського, 2
58012, м. Чернівці, Україна

Отримано 17.01.2005