©2005. М.І. Іванчов

ЗАДАЧА З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ

Розглянуто задачу з вільною межею для одновимірного напівлінійного рівняння дифузії, в якій замість умови Стефана задано інтегральну умову. Встановлено умови глобального (по часу) існування та єдиності класичного розв'язку даної задачі.

При класичному формулюванні двофазної задачі з невідомою рухомою межею (задачі Стефана) для рівняння дифузії чи теплопровідності додаткова умова, що задається на невідомій межі, є наслідком закона збереження енергії. В однофазній задачі Стефана цю умову, взагалі кажучи, можна замінити іншою, наприклад, умовою контролю за енергією або за сумарною кількістю речовини в розчині, що має вигляд інтегральної умови [1]. Крім того, задачу з вільною межею можна розглядати як обернену задачу, невідомим параметром в якій є функція, що задає рівняння невідомої межі. Такий підхід був реалізований у працях [2-4], де розглядався випадок лінійного параболічного рівняння.

У даній роботі встановлено умови існування та єдиності класичного розв'язку для одновимірного напівлінійного параболічного рівняння в області з невідомою рухомою межею.

1. Формулювання задачі та основні припущення.

В області $\Omega_T \equiv \{(x,t) : 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$ з невідомою межею $x = h(t) > 0, t \in [0,T]$, розглянемо рівняння дифузії

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t,u) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le h(0), \tag{2}$$

та крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h(t),t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T]. \tag{3}$$

Як і у працях [2-4], додаткову умову задамо у вигляді

$$\int\limits_0^{h(t)} u(x,t)dx = \mu_3(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Заміною $y = \dfrac{x}{h(t)}, t = t$ задачу (1)–(4) зведемо до вигляду

$$v_t = \frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}v_{yy} + \frac{yh'(t)}{h(t)}v_y + b(yh(t),t,v), \quad (y,t) \in Q_T, \tag{5}$$

$$v(y,0) = \varphi(h(0)y), \quad y \in [0,1], \tag{6}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t), \quad v(1,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{7}$$

$$h(t)\int\limits_0^1 v(y,t)dy=\mu_3(t),\quad t\in[0,T],\tag{8}$$

де $v\left(\dfrac{x}{h(t)},t\right)\equiv u(x,t),\ Q_T\equiv\{(y,t):0<y<1,0<t<T\}$.

Задачу (5)–(8) розглядатимемо як коефіцієнтну обернену задачу у фіксованій області Q_T, а під її розв'язком будемо розуміти пару функцій $(h(t),v(y,t))$ з класу $C^1[0,T]\times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, $h(t)>0, t\in[0,T]$, що задовольняють умови (5)–(8). Очевидно, що задачі (1)–(4) та (5)–(8) є еквівалентними.

Стосовно вихідних даних будемо припускати, що виконуються такі умови:

(A1) $\varphi\in C[0,\infty),\mu_i\in C^1[0,T],i=1,2,3,a\in C([0,\infty)\times[0,T])$, функції $b_u(x,t,u)$, $b(x,t,0)$ є неперервними при $x\in[0,\infty),t\in[0,T],u\in\mathbb{R}$;

(A2) $\varphi(x)>0,x\in[0,\infty);\mu_i(t)>0,t\in[0,T],i=1,2,3;a(x,t)>0,b(x,t,0)\geq 0,(x,t)\in[0,\infty)\times[0,T];b_u(x,t,u)\leq -b_0<0,(x,t,u)\in[0,\infty)\times[0,T]\times\mathbb{R},b_0-\text{const}$;

(A3) $\varphi(0)=\mu_1(0),\varphi(h(0))=\mu_2(0),\ \int\limits_0^{h(0)}\varphi(x)dx=\mu_3(0),\mu_1'(0)=a(0,0)\varphi''(0)+b(0,0,\mu_1(0))$, $\mu_2'(0)=a(h(0),0)\varphi''(h(0))+b(h(0),0,\mu_2(0))$.

Зауважимо, що з умови узгодження

$$\int\limits_0^{h(0)}\varphi(x)dx=\mu_3(0)\tag{9}$$

та припущень $\varphi(x)>0,x\in[0,\infty),\mu_3(t)>0,t\in[0,T]$, випливає існування єдиного значення $h(0)=h_0>0$, при якому рівність (9) справджується. Крім того, з врахуванням умови (A1) рівнянню (5) можна надати наступного вигляду:

$$v_t=\frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}v_{yy}+\frac{yh'(t)}{h(t)}v_y+b_1(yh(t),t,v)v+b(yh(t),t,0),\tag{10}$$

де

$$b_1(yh(t),t,v)=\int\limits_0^1 b_u(yh(t),t,u)|_{u=\sigma v}d\sigma.$$

За принципом максимуму [5] для розв'язку задачі (10), (6), (7) має місце оцінка

$$v(y,t)\geq M_0>0,\quad (y,t)\in\overline{Q}_T,\tag{11}$$

зі сталою $M_0=\min\left\{\min\limits_{[0,h_0]}\varphi(x),\min\limits_{[0,T]}\mu_1(t),\min\limits_{[0,T]}\mu_2(t)\right\}$. Тоді з умови (8) отримуємо оцінку

$$h(t)\leq H_1<\infty,\quad t\in[0,T],\tag{12}$$

де $H_1=\frac{1}{M_0}\max\limits_{[0,T]}\mu_3(t)$. При наявності оцінки (12) встановлюємо, що

$$v(y,t)\leq M_1<\infty,\quad (y,t)\in\overline{Q}_T,\tag{13}$$

де $M_1 = \max\left\{\max\limits_{[0,h_0]}\varphi(x), \max\limits_{[0,T]}\mu_1(t), \max\limits_{[0,T]}\mu_2(t), \frac{1}{b_0}\max\limits_{[0,H_1]\times[0,T]} b(x,t,0)\right\}$. У свою чергу, з (13) та (8) отримуємо

$$h(t) \geq H_0 > 0, \quad t\in[0,T], \tag{14}$$

де $H_0 = \frac{1}{M_1}\min\limits_{[0,T]}\mu_3(t)$.

Крім умов (A1)–(A3), будемо вважати виконаними такі умови:

(A4) $\varphi \in C^2[0,h_0], a_x \in C([0,H_1]\times[0,T]), b_x(x,t,u)\in C([0,H_1]\times[0,T]\times[M_0,M_1])$.

2. Зведення задачі (5)–(8) до системи рівнянь. Існування розв'язку..

Для встановлення умов існування розв'язку задачі (5)–(8) зведемо її до системи рівнянь відносно невідомих $(h(t), p(t), v(y,t), w(y,t), \omega(y,t))$, де $p(t) = h'(t), w(y,t) = v_y(y,t), \omega(y,t) = v_{yy}(y,t)$.

З рівняння (8) отримуємо

$$h(t) = \frac{\mu_3(t)}{\int\limits_0^1 v(y,t)dy}, \quad t\in[0,T]. \tag{15}$$

Диференціюючи (8) по t, приходимо до рівняння

$$p(t) = \frac{1}{\mu_2(t)}\left(\mu_3'(t) - h(t)\int\limits_0^1\left(\frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}\omega(y,t) + b(yh(t),t,v(y,t))\right)dy\right), \quad t\in[0,T]. \tag{16}$$

Для зображення розв'язку задачі (5)–(7) при заданій функції $h(t) > 0$ з класу $C^1[0,T]$ подамо рівняння (5) у вигляді

$$\begin{gathered} v_t = \tfrac{a(zh(t),t)}{h^2(t)}v_{yy} + \tfrac{zh'(t)}{h(t)}v_y + \tfrac{a(yh(t),t)-a(zh(t),t)}{h^2(t)}v_{yy} + \\ + \tfrac{(y-z)h'(t)}{h(t)}v_y + b(yh(t),t,v), \quad (y,t)\in Q_T, \end{gathered} \tag{17}$$

де $z\in[0,1]$ – довільна фіксована точка. Позначимо через $G_1(y,t,\eta,\tau;z)$ функцію Гріна першої крайової задачі для рівняння

$$v_t = \frac{a(zh(t),t)}{h^2(t)}v_{yy} + \frac{zh'(t)}{h(t)}v_y, \quad (y,t)\in Q_T. \tag{18}$$

Легко переконатись у тому, що функція Гріна визначається рівністю

$$\begin{gathered} G_1(y,t,\eta,\tau;z) = \tfrac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t,z)-\theta(\tau,z))}}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\tfrac{(y-\eta+2n+\beta(t,z)-\beta(\tau,z))^2}{4(\theta(t,z)-\theta(\tau,z))}\right) - \right. \\ \left. - \exp\left(-\tfrac{(y+\eta+2n+\beta(t,z)-\beta(\tau,z))^2}{4(\theta(t,z)-\theta(\tau,z))}\right)\right), \end{gathered}$$

де $\theta(t,z) = \int\limits_0^t \frac{a(zh(\tau),\tau)}{h^2(\tau)}d\tau, \quad \beta(t,z) = z\int\limits_0^t\frac{h'(\tau)}{h(\tau)}d\tau = z\ln\frac{h(t)}{h(0)}$.

За допомогою функції Гріна $G_1(y,t,\eta,\tau;z)$ задачу (5)–(7) зведемо до еквівалентної системи рівнянь

$$v(y,t)=v_0(y,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau;y)\left(\frac{a(\eta h(\tau),\tau)-a(yh(\tau),\tau)}{h^2(\tau)}\omega(\eta,\tau)+\right.$$
$$\left.+\frac{(\eta-y)p(\tau)}{h(\tau)}w(\eta,\tau)+b(\eta h(\tau),\tau,v(\eta,\tau))\right)d\eta d\tau,\quad (y,t)\in\overline{Q}_T, \tag{19}$$

$$w(y,t)=v_{0y}(y,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau;z)\Big|_{z=y}\left(\frac{a(\eta h(\tau),\tau)-a(yh(\tau),\tau)}{h^2(\tau)}\omega(\eta,\tau)+\right.$$
$$\left.+\frac{(\eta-y)p(\tau)}{h(\tau)}w(\eta,\tau)+b\left(\eta h(\tau),\tau,v(\eta,\tau)\right)\right)d\eta d\tau,\quad (y,t)\in\overline{Q}_T, \tag{20}$$

$$\omega(y,t)=v_{0yy}(y,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1yy}(y,t,\eta,\tau;z)\Big|_{z=y}\left(\frac{a(\eta h(\tau),\tau)-a(yh(\tau),\tau)}{h^2(\tau)}\omega(\eta,\tau)+\right.$$
$$\left.+\frac{(\eta-y)p(\tau)}{h(\tau)}w(\eta,\tau)\right)d\eta d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1\eta}(y,t,\eta,\tau;y)\Big(h(\tau)b_x(\eta h(\tau),\tau,v(\eta,\tau))+$$
$$+b_v(\eta h(\tau),\tau,v(\eta,\tau))w(\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau+\int\limits_0^t\Big(G_{1\eta}(y,t,1,\tau;y)b(h(\tau),\tau,\mu_2(\tau))-$$
$$-G_{1\eta}(y,t,0,\tau;y)b(0,\tau,\mu_1(\tau))\Big)d\tau,\quad (y,t)\in\overline{Q}_T, \tag{21}$$

де у зображенні розв'язку $v_0(y,t)$ задачі (18), (6), (7) ([6]) за допомогою функції Гріна $G_1(y,t,\eta,\tau;z)$ покладено $z=y$:

$$v_0(y,t)=\int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,0;y)\varphi(h_0\eta)d\eta+\int\limits_0^t G_{1\eta}(y,t,0,\tau;y)\frac{a(yh(\tau),\tau)}{h^2(\tau)}\mu_1(\tau)d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t G_{1\eta}(y,t,1,\tau;y)\frac{a(yh(\tau),\tau)}{h^2(\tau)}\mu_2(\tau)d\tau.$$

Звідси знаходимо похідні v_{0y},v_{0yy} :

$$v_{0y}(y,t)=h_0\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,0;y)\varphi'(h_0\eta)d\eta-\int\limits_0^t G_2(y,t,0,\tau;y)\mu_1'(\tau)d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t G_2(y,t,1,\tau;y)\mu_2'(\tau)d\tau,$$

$$v_{0yy}(y,t)=h_0^2\int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,0;y)\varphi''(h_0\eta)d\eta+\int\limits_0^t G_{1\eta}(y,t,0,\tau;y)\mu_1'(\tau)d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t G_{1\eta}(y,t,1,\tau;y)\mu_2'(\tau)d\tau,\quad (y,t)\in\overline{Q}_T.$$

Отже, задачу (5)–(8) звели до системи рівнянь (15), (16), (19)–(21). До цієї системи рівнянь застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора.

Спочатку встановимо оцінки розв'язків системи рівнянь (15), (16), (19)–(21). Позначимо $V(t)=\max\limits_{y\in[0,1]}|w(y,t)|, W(t)=\max\limits_{y\in[0,1]}|\omega(y,t)|$. Виходячи з зображення функції Гріна $G_1(y,t,\eta,\tau;z)$, оцінимо її похідні. Використаємо також нерівність

$$|a(\eta h(\tau),\tau)-a(yh(\tau),\tau)|\le M_2|\eta-y|.$$

Тоді з рівнянь (16), (20), (21), з врахуванням умов (A2), (A4), знаходимо

$$|p(t)| \le C_1 + C_2 W(t), \tag{22}$$

$$V(t) \le C_3 + C_4 \int\limits_0^t (|p(\tau)|V(\tau) + W(\tau))d\tau, \tag{23}$$

$$W(t) \le C_5 + C_6 \int\limits_0^t \frac{(V(\tau) + W(\tau) + |p(\tau)|V(\tau))d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad t \in [0,T]. \tag{24}$$

Зведемо систему нерівностей (22)–(24) до однієї нерівності стосовно невідомої $W_1(t) \equiv V(t) + W(t)$:

$$W_1(t) \le C_7 + C_8 \int\limits_0^t \frac{W_1^2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad t \in [0,T]. \tag{25}$$

Як показано в [7], нерівність (25) легко звести до вигляду

$$W_1(t) \le C_9 + C_{10} \int\limits_0^t W_1^4(\tau)d\tau, \quad t \in [0,T].$$

Методом Гронуолла-Беллмана звідси отримується оцінка

$$W_1(t) \le \frac{C_9}{\sqrt[3]{1 - 3C_9^3 C_{10} T_0}}, \quad t \in [0,T_0],$$

в якій число T_0 задовольняє умову

$$1 - 3C_9^3 C_{10} T_0 > 0.$$

Тоді справджуються оцінки

$$|v_y(y,t)| \le M_3, \quad |v_{yy}(y,t)| \le M_3, \quad (y,t) \in \overline{Q}_{T_0}, \quad |p(t)| \le M_4, \quad t \in [0,T_0]. \tag{26}$$

Позначимо $\mathcal{N} \equiv \{(h(t), p(t), v(y,t), w(y,t), \omega(y,t)) \in (C[0,T_0])^2 \times (C(\overline{Q}_{T_0}))^3 : H_0 \le h(t) \le H_1, |p(t)| \le M_4, M_0 \le v(y,t) \le M_1, |w(y,t)| \le M_3, |\omega(y,t)| \le M_3\}$. Запишемо систему рівнянь (15), (16), (19)–(21) як операторне рівняння

$$\gamma = P\gamma, \tag{27}$$

де $\gamma = (h,p,v,w,\omega)$, а оператор P визначається правими частинами рівнянь (15), (16), (19)–(21). Очевидно, що оператор P переводить множину $\mathcal{N}$ в себе. Аналогічно до [6], легко встановити, що оператор P є цілком неперервним. Отже, за теоремою Шаудера існує неперервний розв'язок системи рівнянь (15), (16), (19)–(21). З (19) випливає, що функція $v(y,t)$ є неперервно диференційовною. Порівнюючи $w(y,t)$ з функцією $v_y(y,t)$, знайденою з (19), приходимо до висновку, що $w(y,t) \equiv v_y(y,t)$. Аналогічно переконуємось у тому, що $\omega(y,t) \equiv v_{yy}(y,t)$. Тоді $v(y,t)$ є розв'язком рівняння

$$v_t = \frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)} v_{yy} + \frac{yp(t)}{h(t)} v_y + b(yh(t),t,v), \quad (y,t) \in Q_T, \tag{28}$$

який задовольняє умови (6), (7). Диференціюючи (15) по t і враховуючи (28), отримуємо

$$h'(t) = \frac{1}{\mu_2(t)} \Bigg(\mu_3'(t) - \frac{\mu_3(t)}{h(t)} (h'(t) - p(t)) -$$
$$- h(t) \int_0^1 \left(\frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)} v_{yy}(y,t) + b(yh(t),t,v(y,t)) \right) dy \Bigg), \quad \in [0,T].$$

Віднімаючи звідси рівняння (16), встановлюємо рівність $p(t) \equiv h'(t)$. Отже, рівняння (28) співпадає з рівнянням (5). Крім того, $h \in C^1[0,T_0]$, і належну гладкість функцій h, v встановлено. Виконання умови (8) є очевидним. Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови (A1)–(A4). Тоді можна вказати таке число $T_0, 0 < T_0 \le T$, що розв'язок задачі (5)–(8) існує при $y \in [0,1], t \in [0,T_0]$.*

З доведення теореми 1 випливає, що звуження часового проміжку, на якому існує розв'язок, відбувається при встановленні оцінки (26), пов'язаної з розв'язанням нелінійної інтегральної нерівності (25). При цьому довжина проміжка $[0,T_0]$ визначається тільки сталими C_7, C_8 з (25). Зважаючи на те, що оцінки (11)–(14) і нерівності (22)–(24) справджуються при всіх $t \in [0,T]$, і розглядаючи задачу (5)–(8) в області $[0,1] \times [T_0,T]$, аналогічними міркуваннями ми прийдемо до системи нерівностей (22)–(24) з тими самими значеннями сталих $C_1 - C_6$. Звідси випливатимуть аналогічні до (26) оцінки на проміжку $[T_0, 2T_0]$, а разом з тим існування розв'язку задачі (5)–(8) при $y \in [0,1], t \in [0,2T_0]$. Це означає, що розв'язок може бути продовжений на весь часовий проміжок $[0,T]$. Тому правильною є наступна теорема.

Теорема 2. *При виконанні умов теореми 1 розв'язок задачі (5)–(8) може бути продовжений по часу, так що він існуватиме при $y \in [0,1], t \in [0,T]$.*

3. Єдиність розв'язку задачі (5)–(8) .

Умови єдиності розв'язку задачі (5)–(8) встановлюються наступною теоремою.

Теорема 3. *Припустимо, що виконуються умови:*

(B1) $a, a_x \in C[0,\infty) \times [0,T]), \varphi \in C[0,\infty)$; функції $b(x,t,u), b_u(x,t,u), b_x(x,t,u)$ є неперервними при $x \in [0,\infty), t \in [0,T], u \in \mathbb{R}$.

(B2) $a(x,t) > 0, (x,t) \in [0,\infty) \times [0,T]; \varphi(x) > 0, x \in [0,\infty); \mu_3(t) > 0, \mu_2(t) \ne 0, t \in [0,T]$.

Тоді розв'язок задачі (5)–(8) єдиний.

Доведення. Нехай $(h_i(t), v_i(y,t)), i = 1,2,$ – два розв'язки задачі (5)–(8). Позначимо $h(t) = h_1(t) - h_2(t), v(y,t) = v_1(y,t) - v_2(y,t)$. Пара функцій $(h(t), v(y,t))$ задовольняє умови

$$v_t = \tfrac{a(yh_1(t),t)}{h_1^2(t)} v_{yy} + \tfrac{yh_1'(t)}{h_1(t)} v_y +$$
$$+\left(\tfrac{a(yh_1(t),t)}{h_1^2(t)} - \tfrac{a(yh_2(t),t)}{h_2^2(t)}\right) v_{2yy}(y,t) + +\left(\tfrac{h_1'(t)}{h_1^2(t)} - \tfrac{h_2'(t)}{h_2^2(t)}\right) yv_{2y}(y,t) + \tag{29}$$
$$+b(yh_1(t),t,v_1(y,t)) - b(yh_2(t),t,v_2(y,t)), \quad (y,t)\in Q_T,$$

$$v(y,0)=0, \quad y\in[0,1], \quad v(0,t)=v(1,t)=0, \quad t\in[0,T], \tag{30}$$

$$h(t) = -\frac{h_1(t)h_2(t)}{\mu_3(t)} \int\limits_0^1 v(y,t)dy, \quad t\in[0,T]. \tag{31}$$

При цьому було враховано, що з умов теореми $h_1(0) = h_2(0)$.

Позначимо через $G^\star(y,t,\eta,\tau)$ функцію Гріна першої крайової задачі для рівняння

$$v_t = \frac{a(yh_1(t),t)}{h_1^2(t)} v_{yy} + \frac{yh_1'(t)}{h_1(t)} v_y \tag{32}$$

і з її допомогою знайдемо розв'язок задачі (29), (30):

$$v(y,t) = \int\limits_0^t\int\limits_0^1 G^\star(y,t,\eta,\tau)\Bigg(\left(\tfrac{a(\eta h_1(\tau),\tau)}{h_1^2(\tau)} - \tfrac{a(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_2^2(\tau)}\right) v_{2\eta\eta}(\eta,\tau) +$$
$$+\left(\tfrac{h_1'(\tau)}{h_1^2(\tau)} - \tfrac{h_2'(\tau)}{h_2^2(\tau)}\right)\eta v_{2\eta}(\eta,\tau) + b(\eta h_1(\tau),\tau,v_1(\eta,\tau)) - \tag{33}$$
$$-b(\eta h_2(\tau),\tau,v_2(\eta,\tau))\Bigg) d\eta d\tau.$$

Для перетворення підінтегрального виразу в (33) скористаємось формулою Лагранжа

$$f(\omega_1(t)) - f(\omega_2(t)) = (\omega_1(t) - (\omega_2(t)) \int\limits_0^1 f'(z)\Big|_{z=\omega_2(t)+\sigma(\omega_1(t)-\omega_2(t))} d\sigma. \tag{34}$$

Тоді (33) можна подати у вигляді рівняння

$$v(y,t) = \int\limits_0^t\int\limits_0^1 G^\star(y,t,\eta,\tau)(K_1(\eta,\tau)v(\eta,\tau) + K_2(\eta,\tau)h(\tau) +$$
$$+K_3(\eta,\tau)p(\tau))d\eta d\tau, \quad (y,t)\in \overline{Q}_T, \tag{35}$$

де $p(t) \equiv h'(t)$, а коефіцієнти $K_i(y,t), i=\overline{1,4}$, виражаються через відомі величини, розв'язки $(h_i(t), v_i(y,t))$ та їх похідні $(h_i'(t), v_{iy}(y,t)), i=1,2$.

Підставляючи (35) у формулу (31), отримуємо

$$h(t) = \int\limits_0^t\int\limits_0^1 (K_4(t,\eta,\tau)v(\eta,\tau) + K_5(t,\eta,\tau)h(\tau) + K_8(t,\eta,\tau)p(\tau))d\eta d\tau, \quad t\in[0,T]. \tag{36}$$

Диференціюючи (35) по y та вводячи позначення $w(y,t) \equiv v_y(y,t)$, маємо

$$w(y,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_y^\star(y,t,\eta,\tau)(K_1(\eta,\tau)v(\eta,\tau) + K_2(\eta,\tau)h(\tau)+ \\ +K_3(\eta,\tau)p(\tau))d\eta d\tau, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T. \tag{37}$$

Як було встановлено вище, функції $h_i'(t)$ є розв'язками рівняння вигляду (16):

$$h_i'(t) = \frac{1}{\mu_2(t)}\left(\mu_3'(t) - h_i(t)\int\limits_0^1\left(\frac{a(yh_i(t),t)}{h_i^2(t)}v_{iyy}(y,t) + b(yh_i(t),t,v_i(y,t))\right)dy\right).$$

Інтегруючи по частинах, надамо цим рівнянням такого вигляду:

$$h_i'(t) = \frac{1}{\mu_2(t)}\left(\mu_3'(t) + \frac{a(0,t)v_{iy}(0,t) - a(h_i(t),t)v_{iy}(h_i(t),t)}{h_i(t)} + \right.$$
$$\left. + \int\limits_0^1\left(a_x(yh_i(t),t)v_{iy}(y,t) - h_i(t)b(yh_i(t),t,v_i(y,t))\right)dy\right), \quad t \in [0,T], \quad i = 1,2.$$

Віднімаючи дані рівності, застосовуючи формулу (34) і підставляючи замість v, w та h їх значення з (35)–(37), приходимо до рівняння

$$p(t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^1 (K_6(t,\eta,\tau)v(\eta,\tau) + K_7(t,\eta,\tau)h(\tau) + K_8(t,\eta,\tau)w(\eta,\tau)+ \\ +K_9(t,\eta,\tau)p(\tau))d\eta d\tau, \quad t \in [0,T]. \tag{38}$$

Отже, задачу (29)–31) зведено до системи однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду (35)–(38). Як видно зі способу їх отримання та оцінок функції Гріна, ядра цих рівнянь є інтегровними. Тому система рівнянь (35)–(38) має єдиний розв'язок, що є тривіальним: $h(t) \equiv 0, p(t) \equiv 0, t \in [0,T], v(y,t) \equiv 0, w(y,t) \equiv 0, (y,t) \in \overline{Q}_T$, і теорему доведено.

1. *Cannon J.R., Van Der Hoek J.* The one phase Stefan problem subject to thetae specification of energy // J. Math. Anal. and Appl. - 1982.- 281-291.
2. *Иванчов Н.И.* Обратная задача теплопроводности со свободной границей // Обратные задачи и информ. технологии. -2002.- 1.- no. 2.- 69-81.
3. *Іванчов М.І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн.- 2003.- 55.- no. 7.- 901-910.
4. *Іванчов М.І.* Редукція задачі з вільною межею для параболічного рівняння до оберненої задачі // Нелинейные граничные задачи.- 2002.- 12.- 73-83.
5. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа // М.: Наука.- 1967.- 736 с.
6. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type // VNTL Publishers.- 2003.- 238 p.
7. *Иванчов Н.И., Пабыривска Н.В.* Об определении двух зависящих от времени коэффициентов в параболическом уравнении // Сиб. мат. журнал.- 2002.- 43.- no. 2.- 406-413.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул.Університетська, 1,
79602, Львів, Україна
ivanchov@franko.lviv.ua

Отримано 20.04.2004