©2005. **В.П. Бурский, О.В. Самойлова**

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ ФОРМУЛЫ ФЕЙНМАНА-КАЦА В ВОПРОСАХ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Для системы параболических уравнений с матричным потенциалом вида $A/|x|^2$ находятся достаточные условия существования и достаточные условия несуществования положительного решения задачи Коши в $\mathbb{R}^N$ на коэффициенты постоянной матрицы A. Эти условия несколько различаются между собой.

В работе [1] была рассмотрена следующая задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + V(x)u & (x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0) \\ u(x,0) = f(x) & (x \in \mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{1}$$

$$0 \le f \in L^1(\mathbb{R}^N),\ ,\ V(x) = \frac{c}{|x|^2}$$

Интерес к задаче с указанным потенциалом вызван тем, что, как известно, при $0 \le V \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$, $V(x) \le c/|x|^{2-\varepsilon}$, $c > 0$, $\varepsilon > 0$ в окрестности нуля задача (1) имеет единственное неотрицательное решение в смысле распределений, а при $V(x) \ge c/|x|^{2+\varepsilon}$, $c > 0$, $\varepsilon > 0$ в некоторой окрестности нуля, задача (1), как показали Брезис и Лионс ($H.Brezis$ и $I.L.Lions$), не имеет неотрицательного решения.

Наряду с задачей (1) рассматривается задача (2), которая получается из (1) при замене $V(x)$ на $V_n(x)$, где $V_n(x)$ определяется следующим образом:

$$V_n(x) = \begin{cases} c/|x|^2, & |x| \ge 1/n \\ cn^2, & |x| < 1/n \end{cases}$$

т.е. (2) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} = \Delta u_n + V_n(x)u_n & (x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0) \\ u_n(x,0) = f(x) & (x \in \mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{2}$$

Результатом работы [1] является теорема:

Теорема 1. *Пусть $u_n(x,t)$ удовлетворяет (2).*

1. Пусть $c > c^* = c^*(N) = (N-2)^2/4$. Тогда $u_n(x,t) \to \infty$ для всех $x \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$. И поэтому задача (1) не имеет неотрицательного решения.

2. Пусть $0 \le c \le c^*$. Тогда u_n возрастает к решению u из (1) в смысле распределений тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условию $\int\limits_{R^n} |x|^{-\alpha} f(x)dx < \infty$, где α меньший действительный корень уравнения $(N-2-\alpha)\alpha = c$.

Настоящая работа является обобщением результатов, полученных в работе [1], на системы сингулярных параболических уравнений. Отметим также, что доказательство результатов существенно использует методику работы [1]. Будут доказаны следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $\overline{u}_n(x,t)$ *удовлетворяет задаче:*

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{u}_n}{\partial t} = \begin{pmatrix} q^1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & q^p \end{pmatrix} \Delta \overline{u}_n + \begin{pmatrix} V_n^{11}(x) & \dots & V_n^{1p}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ V_n^{p1}(x) & \dots & V_n^{pp}(x) \end{pmatrix} \overline{u}_n, \ (x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0) \\ \overline{u}_n(x,0) = \overline{u}_0(x) \ , \ (x \in \mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{3}$$

$$\overline{u}_n = \begin{pmatrix} u_n^1 \\ \vdots \\ u_n^p \end{pmatrix}, \ \overline{u}_0 = \begin{pmatrix} u_0^1 \\ \vdots \\ u_0^p \end{pmatrix}, \ V_n^{ij}(x) = \begin{cases} c^{ij}/|x|^2, & |x| \geq 1/n \\ c^{ij} n^2, & |x| < 1/n \end{cases}$$

$$u_0^j \geq 0, \ u_0^j = L^1_{loc}(\mathbb{R}^N), \ j = \overline{1,p}.$$

(При необходимости $V_n^{ij}(x)$ *можно выбрать сглаженными.) Пусть* $c^{ii} > \pi^2 N^2 q/8$, $q = \max\{q^i\}$, $q_i > 0$, $c^{ij} \geq 0$, $i,j = \overline{1,p}$
Тогда $\overline{u}_n(x,t) \to \infty \ \forall x \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$.

Теорема 3. *Пусть* $\overline{u}(x,t)$ *удовлетворяет задаче:*

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = \begin{pmatrix} q^1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & q^p \end{pmatrix} \Delta \overline{u} + \begin{pmatrix} V^{11} & \dots & V^{1p}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ V^{p1}(x) & \dots & V^{pp}(x) \end{pmatrix} \overline{u}, \ (x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0) \\ \overline{u}(x,0) = \overline{u}_0(x) \ , \ (x \in \mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{4}$$

$V^{ij}(x) = c^{ij}/|x|^2$. *Пусть* $S = \max_i S_i/q^i$, *где* S_i *- сумма элементов* i*-й строки матрицы* $\begin{pmatrix} c^{11} & \dots & c^{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ c^{pi} & \dots & c^{pp} \end{pmatrix}$. *Если* $S \leq (N-2)^2/4$, *то задача (4) имеет неотрицательное решение.*

Теорема 4. *Пусть* $\overline{u}_n$ *удовлетворяет задаче:*

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{u}_n}{\partial t} = \Delta \overline{u}_n + \begin{pmatrix} 0 & V_n^1(x) \\ V_n^p(x) & 0 \end{pmatrix} \overline{u}_n, \ (x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0) \\ \overline{u}_n(x,0) = \overline{u}_0(x) \ , \ (x \in \mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{5}$$

где $\overline{u}_0 = \begin{pmatrix} u_0^1 \\ u_0^2 \end{pmatrix}$, $\quad \overline{u}_n = \begin{pmatrix} u_n^1 \\ u_n^2 \end{pmatrix}$,

$$V_n^i(x) = \begin{cases} C^i/|x|^2, & |x| \geq 1/n + \delta_n, \\ C^i \cdot n^2, & |x| < 1/n, \\ \text{сглаживание с малым } \delta_n, & 1/n \leq |x| \leq 1/n + \delta_n, \end{cases} \qquad i = 1,2.$$

Пусть $\sqrt{C^1 C^2} > \frac{\pi^2 N^2}{8}$. *Тогда* $\overline{u}_n \to \infty$ *для всех* $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

Теорема 5. *Если* $\sqrt{C^1C^2} \leq (\frac{N-2}{2})^2$, *то задача*

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = \Delta \overline{u} + \begin{pmatrix} 0 & V^1(x) \\ V^p(x) & 0 \end{pmatrix} \overline{u}, \ (x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0) \\ \overline{u}(x,0) = \overline{u}_0(x) \ , \ (x \in \mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{6}$$

где $\overline{u}_0 = \begin{pmatrix} u_0^1 \\ u_0^2 \end{pmatrix}, \quad \overline{u} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad V^i(x) = \frac{C^i}{|x|^2}, \quad u_0^i \in W_2^1(\mathbb{R}^n), \quad i = 1,2$
имеет неотрицательное решение.

Следуя работе [5], определим вероятностную меру $P_t(x,dy) := P_t(x-y)dy$, т.е. $P_t(x,\Gamma) = \int_\Gamma P_t(x-y)dy$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$, где $P_t(x) = (4\pi Dt)^{-N/2} \exp\{-|x|^2/4Dt\}$, $t>0$, $D>0$ плотность нормального распределения с параметрами $(0,2D)$. Пусть $\dot{\mathbb{R}}^N$- одноточечная компактификация $\mathbb{R}^N$, и пусть Ω ($\Omega \subset \prod\limits_{t \in R^+} \dot{\mathbb{R}}^N$)– множество всех непрерывных функций из $\mathbb{R}^+ = [0,\infty)$ в $\dot{\mathbb{R}}^N$.

Определим ограниченную функцию φ из $C(\Omega)$ в $\mathbb{R}$ для заданных n, Φ и t_j правилом: $\varphi(\omega) = \Phi(\omega(t_1), \ldots, \omega(t_n))$ для $\omega \in \Omega$, когда $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$, $\Phi \in C((\dot{\mathbb{R}}^N)^N, \mathbb{R})$.

Мера Винера W_x, определенная как мера Лебега на σ-алгебре цилиндрических множеств (см.[2]), обладает свойством

$$\int\limits_\Omega \varphi(\omega) W_x(d\omega) = \int\limits_{R^N} \ldots \int\limits_{R^N} \Phi(x_1, \ldots, x_n) P_{t_1}(x, dx_1) \ldots P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n).$$

Пусть непрерывная функция $\omega : \mathbb{R}^+ \to \dot{\mathbb{R}}^N$ удовлетворяет условию $\omega(0) = x$. Меру Винера можно понимать как распределение случайных траекторий частицы, начинающей свое движение в момент времени $t = 0$ из точки x.

Напомним, что набор вероятностных мер W_x на Ω определяет винеровский процесс $\omega(t)$, если выполняются следующие условия:

a) пространство Ω содержит только непрерывные функции;

b) $W_x\{\omega(0) = x\} = 1$;

c) случайное приращение $\omega(t+s) - \omega(s)$ при $s \geq 0$, $t > 0$, имеет симметричное нормальное распределение с плотностью $P_t(x)$ и это приращение не зависит от любых событий и любых случайных величин, определяемых по поведению траектории $\omega(t)$ до момента s.

В частности, для любой области $\Gamma \subset \mathbb{R}$ (см. [4]):

$$W_x\{\omega(t) \in \Gamma\} = W_x\{\omega(t) - \omega(0) \in \Gamma - x\} = \int\limits_{\Gamma - x} P_t(y)dy = \int\limits_\Gamma P_t(z-x)dz \ (t>0, \ x \in R)$$

Решением уравнения диффузии $\frac{\partial \psi}{\partial t} = a\Delta\psi + V(x,t)\psi$ является вероятность попадания частицы из начального состояния в точку (x,t). Рассматривая вклады отдельных траекторий в решение уравнения как значения плотности некоторой меры на соответствующих траекториях, получается представление решения в виде интеграла по этой мере, которое принято называть формулой Фейнмана-Каца. Эта формула влечёт формулу Ли-Троттера-Далецкого ($Lie - Trotter - Dalecky$), которую мы и будем использовать (см. ниже, формула (8)). Введем покоординатное частичное упорядочение в $\mathbb{R}^N$: $x \le y$, если $x^i \le y^i$.

Утверждение 6.

$$\overline{u}_n(x,t) \ge \int\limits_{\Omega} \begin{pmatrix} W_x^{q^1}(d\omega) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & W_x^{q^p}(d\omega) \end{pmatrix} \cdot \\ \cdot \exp\left\{ \int\limits_0^t \begin{pmatrix} V_n^{11}(s) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & V_n^{pp}(s) \end{pmatrix} ds \right\} \overline{u}_0(\omega(t)), \tag{7}$$

Доказательство утверждения 6. Запишем (3) в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{u}_n}{\partial t} = A\overline{u}_n + B_n\overline{u}_n \\ \overline{u}_n(x,0) = \overline{u}_0(x) \end{cases}$$

По формуле Ли-Троттера-Далецкого (см.[2], с.59) мы имеем

$$\overline{u}_n(t) = \lim_{m\to\infty} (e^{\frac{t}{m}A} e^{\frac{t}{m}B_n})^m \overline{u}_0 \tag{8}$$

где операторы полугрупп заданы равенствами:

$$e^{sA}\overline{u}_0(x) = \begin{pmatrix} (4\pi s q^1)^{-N/2} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\{-|x-y|^2/4sq^1\} u_0^1(y)dy \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (4\pi s q^p)^{-N/2} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\{-|x-y|^2/4sq^p\} u_0^p(y)dy \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$e^{sB_n}\overline{u}_0(x) = \exp\left\{ s \cdot \begin{pmatrix} V_n^{11}(x) & \dots & V_n^{1p}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ V_n^{p1}(x) & \dots & V_n^{pp}(x) \end{pmatrix} \right\} \tag{10}$$

и (9) является решением задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{u}_n}{\partial t} = A\overline{u}_n = \begin{pmatrix} q^1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & q^p \end{pmatrix} \Delta \overline{u}_n \\ \overline{u}_n(x,0) = \overline{u}_0(x), \end{cases}$$

а (10) является решением задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{u}_n}{\partial t} = B_n\overline{u}_n = \begin{pmatrix} V_n^{11}(x) & \dots & V_n^{1p}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ V_n^{p1}(x) & \dots & V_n^{pp}(x) \end{pmatrix} \overline{u}_n \\ \overline{u}_n(x,0) = \overline{u}_0(x). \end{cases}$$

Из равенств (9),(10) видно, что

$$(e^{\frac{t}{m}A}e^{\frac{t}{m}B_n}\overline{u}_0)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\begin{pmatrix}(4\pi\frac{t}{m}q^1)^{-N/2}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t/mq^1}} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & (4\pi\frac{t}{m}q^p)^{-N/2}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t/mq^p}}\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{t}{m}\begin{pmatrix}V_n^{11}(y) & \dots & V_n^{1p}(y)\\ \dots & \dots & \dots\\ V_n^{p1}(y) & \dots & V_n^{pp}(y)\end{pmatrix}\right\}\overline{u}_0(y)dy.$$

Тогда $(e^{\frac{t}{m}A}e^{\frac{t}{m}B_n})^m\overline{u}_0(x)=$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\begin{pmatrix}(4\pi\frac{t}{m}q^1)^{-N/2}\exp\{-\frac{|x-x_1|^2}{4t/mq^1}\} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & (4\pi\frac{t}{m}q^p)^{-N/2}\exp\{-\frac{|x-x_1|^2}{4t/mq^p}\}\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{t}{m}\begin{pmatrix}V_n^{11}(x_1) & \dots & V_n^{1p}(x_1)\\ \dots & \dots & \dots\\ V_n^{p1}(x_1) & \dots & V_n^{pp}(x_1)\end{pmatrix}\right\}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\dots$$

$$\dots\int\limits_{\mathbb{R}^N}\begin{pmatrix}(4\pi\frac{t}{m}q^1)^{-N/2}\exp\{-\frac{|x_m-x_{m-1}|^2}{4t/mq^1}\} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & (4\pi\frac{t}{m}q^p)^{-N/2}\exp\{-\frac{|x_m-x_{m-1}|^2}{4t/mq^p}\}\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{t}{m}\begin{pmatrix}V_n^{11}(x_m) & \dots & V_n^{1p}(x_m)\\ \dots & \dots & \dots\\ V_n^{p1}(x_m) & \dots & V_n^{pp}(x_m)\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}u_0^1(x_m)\\ \vdots\\ u_0^p(x_m)\end{pmatrix}dx_m\dots dx_1\geq$$

$$\geq\int\limits_{\mathbb{R}^N}\begin{pmatrix}(4\pi\frac{t}{m}q^1)^{-N/2}\exp\{-\frac{|x-x_1|^2}{4t/mq^1}\} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & (4\pi\frac{t}{m}q^p)^{-N/2}\exp\{-\frac{|x-x_1|^2}{4t/mq^p}\}\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{t}{m}\begin{pmatrix}V_n^{11}(x_1) & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & V_n^{pp}(x_1)\end{pmatrix}\right\}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\dots$$

$$\dots\int\limits_{\mathbb{R}^N}\begin{pmatrix}(4\pi\frac{t}{m}q^1)^{-N/2}\exp\{-\frac{|x_m-x_{m-1}|^2}{4t/mq^1}\} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & (4\pi\frac{t}{m}q^p)^{-N/2}\exp\{-\frac{|x_m-x_{m-1}|^2}{4t/mq^p}\}\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{t}{m}\begin{pmatrix}V_n^{11}(x_m) & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & V_n^{pp}(x_m)\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}u_0^1(x_m)\\ \vdots\\ u_0^p(x_m)\end{pmatrix}dx_m\dots dx_1=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\dots\int\limits_{\mathbb{R}^N}\begin{pmatrix}(4\pi\frac{t}{m}q^1)^{-N/2}\exp\{-\frac{|x-x_1|^2}{4t/mq^1}\} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & (4\pi\frac{t}{m}q^p)^{-N/2}\exp\{-\frac{|x-x_1|^2}{4t/mq^p}\}\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdots\cdot\begin{pmatrix}(4\pi\frac{t}{m}q^1)^{-N/2}\exp\{-\frac{|x_m-x_{m-1}|^2}{4t/mq^1}\} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & (4\pi\frac{t}{m}q^p)^{-N/2}\exp\{-\frac{|x_m-x_{m-1}|^2}{4t/mq^p}\}\end{pmatrix}\cdot$$

$$\exp\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{t}{m}\begin{pmatrix}V_n^{11}(x_j) & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & V_n^{pp}(x_j)\end{pmatrix}\right\}\overline{u_0}(x_m)dx_m\dots dx_1=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\dots$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\begin{pmatrix}P_{\frac{t}{m}q^1}(x,dx_1)\cdot..\cdot P_{\frac{t}{m}q^1}(x_{m-1},dx_m) & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & P_{\frac{t}{m}q^p}(x,dx_1)\cdot..\cdot P_{\frac{t}{m}q^p}(x_{m-1},dx_m)\end{pmatrix}$$

$$\exp\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{t}{m}\begin{pmatrix}V_n^{11}(x_j) & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & V_n^{pp}(x_j)\end{pmatrix}\right\}\overline{u}_0(x_m)\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\to\int\limits_{\Omega}\begin{pmatrix}W_x^{q^1}(d\omega) & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & W_x^{q^p}(d\omega)\end{pmatrix}\exp\left\{\int\limits_0^t\begin{pmatrix}V_n^{11}(s) & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & V_n^{pp}(s)\end{pmatrix}ds\right\}\overline{u}_0(\omega(t)),\qquad(11)$$

где $W_x^{q^i}$ удовлетворяет свойству:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\dots\int\limits_{\mathbb{R}^N}\Phi(x_1,\dots,x_n)P_{t_1q^i}(x,dx_1)\cdot\dots\cdot P_{(t_n-t_{n-1}q^i}(x_{n-1},dx_n)=\int\limits_{\Omega}\varphi(\omega)W_x^{q^i}(d\omega).$$

Предел левой части (11) при $m\to\infty$ равен $\overline{u}_n(x,t)$, как это следует из (8).

Утверждение 7. *Если функция $\overline{u}(x,t)$ является решением задачи (4) и $v^{ij}(x)\cdot u^k(x,t)\in L_2(\mathbb{R}^N)$, то $\overline{u}(x,t)\in W_2^2(\mathbb{R}^N)$ и $\overline{u}(x,t)\geq\overline{u}_n(x,t)$, где $\overline{u}_n(x,t)$ является решением задачи (3) и функция $\overline{u}_0\geq0$, $\overline{u}_0\in W_2^1(\mathbb{R}^N)$.*

Доказательство утверждения 7. Из априорной оценки решения (см.[3],с.173) имеем принадлежность решения $\overline{u}(x,t)$ задачи (4) соболевскому пространству $W_2^2(\mathbb{R}^N)$ и для разности $\overline{v}_n(x,t)=\overline{u}(x,t)-\overline{u}_n(x,t)\in W_2^2(\mathbb{R}^N)$ получаем систему уравнений с задачей Коши

$$\begin{cases}\frac{\partial\overline{v}_n}{\partial t}=\begin{pmatrix}q^1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & q^p\end{pmatrix}\Delta\overline{v}_n+\begin{pmatrix}V_n^{11} & \dots & V_n^{1p}\\ \dots & \dots & \dots\\ V_n^{p1} & \dots & V_n^{pp}\end{pmatrix}\overline{v}_n+\overline{f}_n\\ \overline{u}_n(x,0)=0\end{cases}\qquad(12)$$

Рассуждая для системы (10) как и в скалярном случае (см. [1]), получим, что $\overline{v}_n(x,t)\geq0$, откуда следует заключение утверждения.

Доказательство теоремы 2: Следуя работе [5], фиксируем $t>0$, $x\in\mathbb{R}^N$ и предполагаем, что $u_0^j\geq\varepsilon_0$ для $|x-x_0|\leq\delta_0$, $\varepsilon_0>0$, $\delta_0>0$, $j=\overline{1,p}$, $0<\alpha<1/2$.

$$\Omega_n=\{\omega\in\Omega:\omega(0)=x,\ |\omega(t)-x_0|\leq\delta_0,\ |\omega(s)|<1/n\text{ при }s\in I=[\alpha t,(1-\alpha)t]\}.$$

Оценим $\overline{u}_n$ снизу, продолжая оценку (9), полученную в утверждении 6.

$$\overline{u}_n(x,t) \geq$$

$$\int\limits_{\Omega_n} \begin{pmatrix} W_x^{q^1}(d\omega) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & W_x^{q^p}(d\omega) \end{pmatrix} \cdot \exp\left\{ \int\limits_{\alpha t}^{(1-\alpha)t} \begin{pmatrix} V_n^{11}(s) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & V_n^{pp}(s) \end{pmatrix} ds \right\} \overline{u}_0(\omega(t)) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_n} \begin{pmatrix} W_x^{q^1}(d\omega) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & W_x^{q^p}(d\omega) \end{pmatrix} \exp\left\{ \gamma t n^2 \begin{pmatrix} c^{11} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & c^{pp} \end{pmatrix} \right\} \overline{u}_0(\omega(t)) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_n} \begin{pmatrix} W_x^{q^1}(d\omega) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & W_x^{q^p}(d\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp\{\gamma t n^2 c^{11}\} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \exp\{\gamma t n^2 c^{pp}\} \end{pmatrix} \overline{u}_0(\omega(t)) =$$

$$= \begin{pmatrix} \int\limits_{\Omega_n} \exp\{\gamma t n^2 c^{11}\} u_0^1(\omega(t)) w_x^{q^1}(d\omega) \\ \dots \\ \int\limits_{\Omega_n} \exp\{\gamma t n^2 c^{11}\} u_0^1(\omega(t)) w_x^{q^1}(d\omega) \end{pmatrix} \geq \varepsilon_0 \cdot e^{\gamma t n^2 c} \begin{pmatrix} W_x^{q^1}(\Omega_n) \\ \vdots \\ W_x^{q^p}(\Omega_n) \end{pmatrix},$$

где $c = \min\{c^{ii}\}_{i=1}^p$, $\gamma = 1 - 2\alpha$.

Пусть $N = 1, -\infty < a < b < +\infty$. $r = r([a,b])$ - время выхода траектории за пределы $[a,b]$ для одномерного броуновского распределения с началом в точке x (см.[7]). Т.е. $r(\omega) = \inf\{t > 0 : \omega(t) = a$ или $b, \omega(0) = x\}$. Известно, (см.[8]), что $W^{q^i}(x,t) = W_x^{q^i}\{\omega \in \Omega, r(\omega) > t\} = w_x^{q^i}\{r > t\}$ является решением задачи

$$\begin{cases} \frac{1}{q^i}\frac{\partial W^{q^i}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W^{q^i}}{\partial x^2}, & 0 < x < 2b,\ t > 0 \\ W^{q^i}(t,0) = W^{q^i}(t,2b) = 0, & t > 0 \\ W^{q^i}(0,x) = 1, & 0 < x < 2b \end{cases}$$

Тогда $W^{q^i}(x,t) = \sum\limits_{n-\text{нечет}} \frac{4}{\pi n} \exp\{-\frac{\pi^2 n^2 q^i t}{8b^2}\} \sin(\frac{\pi n x}{2b})$. Следовательно,

$$W^{q^i}(\frac{1}{n},t) \geq c_1 \exp\{-\frac{\pi^2 n^2 t q^i}{8}\},\ c_1 < 4/\pi \tag{13}$$

Известно (см. [1]), что при $x, x_0 \in \mathbb{R}^N,\ t > 0,\ \delta_0 > 0,\ 0 < \alpha_1 < 1$

$$\begin{gathered} W_x^{q^i}(\Omega_n) \geq W_x^{q^i}\{\omega(\alpha t) < \alpha_1/n\} \cdot \\ W_0^{q^I}\{|\omega(s)| < (1-\alpha_1)/n, s \in [0,(1-2\alpha)t]\} \cdot \\ \cdot P\{|\omega(\alpha t) - x_0| \leq \delta_0 / |\omega(0)| < 1/n\} = p_1^{q^i} p_2^{q^i} p_3^{q^i}. \end{gathered}$$

Пусть $t_1 = \alpha t$. Тогда $p_1^{q^i}$ и $p_2^{q^i}$ могут быть вычислены и оценены снизу, используя нормальное распределение. Оценка для $p_2^{q^i}$ получается при помощи неравенства (13).

$$p_1^{q^i} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t_1 q^i}} \int\limits_{-\alpha_1/n}^{\alpha_1/n} \exp\{-\frac{|s-x|^2}{4 t_1 q^i}\} ds \geq$$

$$\geq (4\pi t \alpha q^i)^{-1/2} \cdot \frac{2\alpha_1}{n} \exp\{-\frac{x^2}{4\alpha t q^i} - \varepsilon_2\},\ \varepsilon_2 > 0,\ n > N_2(\varepsilon_2, x, t, \alpha).$$

$$p_3^{q^i} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t_1 q^i}} \int\limits_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} \exp\{-\tfrac{(s-\omega(0))^2}{4t_1 q^i}\} ds \geq$$
$$\geq (4\pi t\alpha q^i)^{-1/2} \cdot 2\delta_0 \exp\{\tfrac{(x_0+\delta_0)^2}{4\alpha t q^i} - \varepsilon_3\},\ \varepsilon_3 > 0,\ n > N_3(\varepsilon_3, x, t, \alpha).$$

$$p_2^{q^i} = W_0^{q^i}\{r([-\tfrac{(1-\alpha_1)}{n}; \tfrac{(1-\alpha_1)}{n}]) > (1-2\alpha)t\} =$$
$$= W_{\frac{1-\alpha_1}{n}}^{q^i}\{r([0, \tfrac{2(1-\alpha_1)}{n}]) > (1-2\alpha)t\} = W^{q^i}(\tfrac{1-\alpha_1}{n}, (1-2\alpha)t) \geq$$
$$\geq \tfrac{4-\varepsilon_4}{\pi} \exp\{\tfrac{\pi^2 n^2 t(1-2\alpha)q^i}{(1-\alpha_1)^2 8}\}.$$

Таким образом, получаем оценку: $\forall i$

$$W_x^{q^i}(\Omega_n) \geq \tfrac{4\alpha_1\delta_0}{\pi\alpha t q^i} \cdot \tfrac{1}{n} \exp\{-\tfrac{q^i\pi^2 n^2 t(1-2\alpha)}{8-\varepsilon}\} \cdot \exp\{-(\tfrac{x^2}{4\alpha t q^i} + \tfrac{(x_0+\delta_0)^2}{4\alpha t q^i} + \varepsilon_5)\} \geq$$
$$\geq \tfrac{4\alpha_1\delta_0}{\pi\alpha t q} \cdot \tfrac{1}{n} \exp\{-\tfrac{q\pi^2 n^2 t(1-2\alpha)}{8-\varepsilon}\} \exp\{-(\tfrac{x^2}{4\alpha t q} + \tfrac{(x_0+\delta_0)^2}{4\alpha t q} + \varepsilon_6)\} =$$
$$= k_0 \cdot \tfrac{1}{n} \cdot \exp\{-\tfrac{q\pi^2 n^2 t(1-2\alpha)}{8-\varepsilon}\}.$$

Пусть $N > 1$. Тогда, применяя N-мерное нормальное броуновское распределение (см.[1],[7]), получаем оценку:

$$W_x^{q^i} \geq \left(\frac{1}{n}\right)^N k_0 \exp\left\{-\frac{q\pi^2 n^2(1-2\alpha)N^2 t}{8-\varepsilon}\right\},$$

где

$$k_0 = \left(\frac{4\alpha_1\delta_0}{\sqrt{N}\pi\alpha t q}\right)^N \exp\left\{-\frac{N|x|^2}{4\alpha t q} - \frac{(N|x|^2+\delta_0^2)}{4\alpha t q} - \varepsilon\right\}.$$

Используя полученную оценку для $W_x^{q^i}(\Omega_n)$ получаем

$$\overline{u}_n(x,t) \geq \left(\frac{1}{n}\right)^N \cdot k_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \exp\{(1-2\alpha)tn^2 c\} \exp\left\{-\frac{q\pi^2 n^2(1-2\alpha)N^2 t}{8-\varepsilon}\right\}. \tag{14}$$

Теорему 2 доказывает переход к пределу в неравенстве (14) при $n \to \infty$.

Доказательство теоремы 3: Будем искать неотрицательное решение (4) в виде $\overline{u} = r^{-\alpha}\begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^p \end{pmatrix}$. Тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} c^{11}b^1 - q^1\alpha(n-2-\alpha)b^1 + c^{12}b^2 + \cdots + c^{1p}b^p = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c^{p1}b^1 + c^{p2}b^2 + \cdots + c^{pp}b^p - q^p\alpha(N-2-\alpha)b^p = 0 \end{cases}$$

Приравнивая к нулю определитель данной системы и обозначая $\alpha(N-2-\alpha) = \lambda$ получим:

$$\begin{vmatrix} c^{11}/q^1 - \lambda & c^{12}q^1 & \dots & c^{1p}/q^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c^{p1}/q^p & c^{p2}/q^p & \dots & c^{pp}q^p - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

По теореме Перрона - Фробениуса (см.[6]) для неотрицательных матриц максимальному характеристическому числу матрицы соответствует положительный собственный вектор. Пусть λ- максимальное характеристическое число матрицы

$$\begin{pmatrix} c^{11}/q^1 & \dots & c^{1p}/q^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ c^{p1}q^p & \dots & c^{pp}/q^p \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\alpha \in R$ при $\lambda \leq (N-2)^2/4$. По теореме Фробениуса (см.[6]) для неотрицательных матриц справедливы неравенства $s \leq \lambda \leq S$, где $s = \min_i \{s_i/q^i\}$, $S = \max_i \{s_i/q^i\}$, s_i- сумма элементов i-й строки матрицы $\begin{pmatrix} c^{11} & \dots & c^{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ c^{p1} & \dots & c^{pp} \end{pmatrix}$. Это доказывает теорему 3.

Доказательство теоремы 4: При доказательстве теоремы 4 будем использовать схему доказательства утверждения 6. Вычисляя выражения (9), (10) в нашем случае, получим

$$(e^{\frac{t}{m}A}e^{\frac{t}{m}B}\overline{u}_0)(x) = (4\pi\frac{t}{m})^{-\frac{N}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4\frac{t}{m}}\right\} \exp\left\{\frac{t}{m}\begin{pmatrix} 0 & V_n^1(x) \\ V_n^2(x) & 0 \end{pmatrix}\right\} \overline{u}_0(y)\, dy.$$

Тогда

$$(e^{\frac{t}{m}A}e^{\frac{t}{m}B})^m\overline{u}_0)(x) = \left(\left(4\pi\frac{t}{m}\right)^{-\frac{N}{2}}\right)^m \int\limits_{\mathbb{R}^N} \dots \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left\{\sum_{j=1}^m \begin{pmatrix} 0 & V_n^1(x_j) \\ V_n^2(x_j) & 0 \end{pmatrix} \frac{t}{m}\right\} \cdot \overline{u}_0(x_m)\cdot$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{|x-x_1|^2}{4\frac{t}{m}}\right\} \cdot \ldots \cdot \exp\left\{-\frac{|x-x_m|^2}{4\frac{t}{m}}\right\} dx_m \dots dx_1 =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \dots \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left\{\sum_{j=1}^m \begin{pmatrix} 0 & V_n^1(x_j) \\ V_n^2(x_j) & 0 \end{pmatrix} \frac{t}{m}\right\} \cdot \overline{u}_0(x_m) \cdot P_{\frac{t}{m}}(x, dx_1) \cdot \ldots \cdot P_{\frac{t}{m}}(x_{m-1}, dx_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \dots \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left\{\int\limits_0^t \begin{pmatrix} 0 & V_n^1 \\ V_n^2 & 0 \end{pmatrix} dS\right\} \cdot \overline{u}_0(x_m) \cdot P_{\frac{t}{m}}(x, dx_1) \cdot \ldots \cdot P_{\frac{t}{m}}(x_{m-1}, dx_m) =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \exp\left\{\int\limits_0^t \begin{pmatrix} 0 & V_n^1(w(S)) \\ V_n^2(w(S)) & 0 \end{pmatrix} dS\right\} \overline{u}_0(w(t))W_x(dw) = \overline{u}_n. \tag{15}$$

Это следует из свойства меры Винера и формулы (8). Этот континуальный интеграл является решением задачи (5) (см. формулу Фейнмана-Каца [1]). Следуя работе [2], фиксируем $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$ и предполагаем, что $u_0^j \geq \varepsilon_0$ для

$$|x - x_0| \leq \delta_0 \quad (j = 1, 2),\ \varepsilon_0 > 0,\ \delta_0 > 0 \tag{16}$$

Пусть, как и в [2], $0 < \alpha < 1/2$ и

$$\Omega_n = \{w \in \Omega; \quad w(0) = x,\ |w(t) - x_0| \le \delta_0,\ |w(S)| < \frac{1}{n} \ \text{при}\ \ S \in J = [\alpha t,\ (1-\alpha)t]\}. \tag{17}$$

Оценим $\overline{u}_n(x,t)$ снизу. Как и выше, в пространстве $\mathbb{R}^N$ вводим отношение частичной упорядоченности: $(a^1, a^2) \ge (b^1, b^2)$, если $a^1 \ge b^1,\ a^2 \ge b^2$.

$$\overline{u}_n(x,t) \ge \int\limits_{\Omega_n} \exp\left\{ \int\limits_{\alpha t}^{(1-\alpha)t} \begin{pmatrix} 0 & V_n^1(\omega(S)) \\ V_n^2(\omega(S)) & 0 \end{pmatrix} dS \right\} \overline{u}_0 W_x(d\omega) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_n} \exp\left\{ \int\limits_{\alpha t}^{(1-\alpha)t} \begin{pmatrix} 0 & C^1 \\ C^2 & 0 \end{pmatrix} dS \right\} \overline{u}_0 W_x(d\omega) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_n} \exp\left\{ (1-2\alpha)tn^2 \begin{pmatrix} 0 & C^1 \\ C^2 & 0 \end{pmatrix} \right\} \overline{u}_0(\omega(t)) W_x(d\omega). \tag{18}$$

Обозначим $\gamma = 1 - 2\alpha$.

1) Пусть $C^1 = C^2 = C$, тогда, обозначая

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \text{получим}$$

$$\exp\left\{ \begin{pmatrix} 0 & t\gamma n^2 C \\ t\gamma n^2 C & 0 \end{pmatrix} \right\} = I + t\gamma n^2 C \cdot J + \frac{(t\gamma n^2 C)^2}{2!} \cdot I +$$

$$+ \frac{(t\gamma n^2 C)^3}{3!} \cdot J + \ldots = ch(t\gamma n^2 C) \cdot I + sh(t\gamma n^2 C) \cdot J =$$

$$= \begin{pmatrix} ch(t\gamma n^2 C) & sh(t\gamma n^2 C) \\ ch(t\gamma n^2 C) & sh(t\gamma n^2 C) \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Используя (19) при $C^1 = C^2 = C$ получаем

$$\overline{u}_n(x,t) \ge \int\limits_{\Omega} \exp\left\{ \gamma t n^2 \begin{pmatrix} 0 & C^1 \\ C^2 & 0 \end{pmatrix} \right\} \overline{u}_0(\omega(t)) W_x(d\omega) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_n} \begin{pmatrix} ch(\gamma n^2 Ct) u_0^1(\omega(t)) + sh(\gamma n^2 Ct) u_0^2(\omega(t)) \\ sh(\gamma n^2 Ct) u_0^1(\omega(t)) + ch(\gamma n^2 Ct) u_0^2(\omega(t)) \end{pmatrix} W_x(d\omega) \ \ge$$

$$\ge \int\limits_{\Omega_n} \varepsilon_0 \cdot \begin{pmatrix} ch(\gamma n^2 Ct) + sh(\gamma n^2 Ct) \\ sh(\gamma n^2 Ct) + ch(\gamma n^2 Ct) \end{pmatrix} W_x(d\omega) \ =$$

$$= \varepsilon_0 \cdot \exp\{\gamma n^2 Ct\} \cdot W_x(\Omega_n) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

2) Пусть $C^1 \ne C^2$. Используя разложение в ряд Тейлора для экспоненты, аналогично (19) получаем

$$\exp\left\{ \begin{pmatrix} 0 & t\gamma n^2 C \\ t\gamma n^2 C & 0 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} u_0^1(\omega(t)) \\ u_0^2(\omega(t)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_0^1(\omega(t))ch(t\gamma n^2\sqrt{C^1C^2}) + \sqrt{\frac{C^1}{C^2}}u_0^2(\omega(t))sh(t\gamma n^2\sqrt{C^1C^2}) \\ \sqrt{\frac{C^2}{C^1}}u_0^1(\omega(t))sh(t\gamma n^2\sqrt{C^1C^2}) + u_0^2(\omega(t))ch(t\gamma n^2\sqrt{C^1C^2}) \end{pmatrix}. \qquad (21)$$

Тогда из (21) следует, что при $C^1 \neq C^2$

$$\overline{u}_n(x,t) \geq \int_{\Omega_n} \varepsilon \begin{pmatrix} u_0^1(\omega(t))ch(t\gamma n^2\sqrt{C^1C^2}) + \sqrt{\frac{C^1}{C^2}}u_0^2(\omega(t))sh(t\gamma n^2\sqrt{C^1C^2}) \\ \sqrt{\frac{C^2}{C^1}}u_0^1(\omega(t))sh(t\gamma n^2\sqrt{C^1C^2}) + u_0^2(\omega(t))ch(t\gamma n^2\sqrt{C^1C^2}) \end{pmatrix} W_x(d\omega) \geq$$

$$\geq K \cdot \varepsilon \cdot \exp\{t\gamma n^2\sqrt{C^1C^2}\} \cdot W_x(\Omega_n) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (22)$$

$$K = \min\{\sqrt{\frac{C^1}{C^2}}, \sqrt{\frac{C^2}{C^1}}\}.$$

Далее будет показано, что основными оценками при $C^1 = C^2 = $ C и в случае $C^1 \neq C^2$ будут являться соответственно следующие:

$$\overline{u}_n(x,t) \geq \varepsilon \cdot K_0 \cdot \exp\{t\gamma n^2 C\} \cdot \exp\{-\frac{\pi^2 N^2 \gamma t n^2}{8-\varepsilon}\} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (23)$$

$$\overline{u}_n(x,t) \geq \varepsilon \cdot \widetilde{K_0} \cdot \exp\{t\gamma n^2\sqrt{C^1C^2}\} \cdot \exp\{-\frac{\pi^2 N^2 \gamma t n^2}{8-\varepsilon}\} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (24)$$

из которых и следует утверждение теоремы.

Получим (23) и (24), следуя работе [2]. Для простоты будем находиться в пространстве размерности $N = 1$.

Пусть $-\infty < a < b < +\infty$. $\quad r = r([a,b])$ - время выхода траектории за пределы $[a,b]$ для одномерного броуновского движения с началом в точке x, [5]. Т. е. $r(\omega) = \inf\{t > 0 : \quad \omega(t) = a; \quad b, \quad \omega(0) = x\}$. Тогда, из [6] следует, что $W(x,t) = W_x\{\omega \in \Omega; \quad r(\omega) > t\} = W_x\{r > t\}$ является решением задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad a < x < b, \quad t > 0 \\ W(t,a) = W(t,b) = 0, \quad t > 0 \\ W(0,x) = 1, \quad a < x < b. \end{cases} \qquad (25)$$

Для $b, t_0 > 0 \quad W_0\{|\omega(s)| < b$ для $0 \leq s \leq t_0\} = W_0\{r([-b,b]) > t_0\} = W_b\{r([0,2b]) > t_0\} = W(b,t_0)$, где W удовлетворяет (25) при $[a,b]$ замененном на $[0,2b]$, т. е. W являет-сяся решением

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2b, \quad t > 0 \\ W(t,a) = W(t,2b) = 0, \quad t > 0 \\ W(0,x) = 1, \quad 0 < x < 2b. \end{cases} \qquad (26)$$

Решая (26), получаем

$$W(x,t) = \sum_{n \text{нечет.}} \frac{4}{\pi n} \exp\{-\frac{\pi^2 n^2 t}{8b^2}\} \sin(\frac{\pi n x}{2b})$$

$$W(b,t_0)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2K+1)}(-1)^K\exp\{-(2K+1)^2\frac{\pi^2 t_0}{8b^2}\}\geq$$

$$\frac{4}{\pi}(\exp\{-\frac{\pi^2 t_0}{8b^2}\}-\exp\{-\frac{9\pi^2 t_0}{8b^2}\}).$$

Если $b=\frac{1}{n}$, $\quad t_0=t$, тогда

$$W(\frac{1}{n},t)\geq\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2K+1)}(-1)^K\exp\{-(2K+1)^2\frac{\pi^2 t_0}{8b^2}\}\geq\exp\{-\frac{\pi^2 n^2 t}{8}\}-\exp\{-\frac{9\pi^2 n^2 t}{8}\}\geq$$

$$\geq\frac{4-\varepsilon_1}{\pi}(\exp\{-\frac{\pi^2 n^2 t}{8}\}\quad\forall\varepsilon_1>0,\quad n>N_1\ (\varepsilon_1,t).$$

Следовательно, для больших n

$$W(\frac{1}{n},t)\geq\ C_1\exp\{-\frac{\pi n^2 t}{8}\}\quad\forall C_1<4/\pi. \tag{27}$$

Пусть $x,x_0\in\mathbb{R}^N$, $\quad t>0$, $\quad\delta_0>0$. Тогда, как следует из работы [2], по строгому свойству Маркова [3], получаем для

$$0<\alpha<\frac{1}{2},\quad 0<\alpha_1<1:$$

$$W_x(\Omega)=W_x\{|\omega(s)|<1/n,\quad s\in J=[\alpha t,(1-\alpha)t],$$

$$|\omega(t)-x|\leq\delta_0\}\geq W_x\{|\omega(\alpha t)|<\frac{\alpha_1}{n};\quad|\omega(s)|<\frac{1}{n},s\in J;$$

$$|\omega(t)-x_0|\geq\delta_0\}=W_x\{|\omega(\alpha t)|<\alpha_1/n\}\cdot$$

$$\cdot P\{|\omega(s)|<\frac{1}{n},\quad s\in J;\quad|\omega(t)-x_0|\geq\delta_0/|\omega(\alpha t)|<\frac{\alpha_1}{n}\}=$$

$$=W_x\{|\omega(\alpha t)|<\alpha_1/n\}\cdot P\{|\omega(s)|<\frac{1}{n},\quad s\in J/|\omega(\alpha t)|<\frac{\alpha_1}{n}\}\cdot$$

$$\cdot P\{|\omega(t)-x_0|\leq\delta_0/|\omega((1-\alpha)t)|<\frac{1}{n}\}=W_x\{|\omega(\alpha t)|<\frac{\alpha_1}{n}\}\cdot$$

$$\cdot P\{|\omega(s)|<\frac{1}{n},\ s\in[0,(1-2\alpha)t]/|\omega(0)|<\frac{\alpha_1}{n}\}\cdot$$

$$\cdot P\{|\omega(\alpha t)-x_0|\leq\delta_0/|\omega(0)|<\frac{1}{n}\}\geq W_x\{|\omega(\alpha t)|<\frac{\alpha_1}{n}\}\cdot$$

$$\cdot P\{|\omega(s)|<\frac{1}{n},\ s\in[0,(1-2\alpha)t]/|\omega(0)|=0\}\cdot$$

$$\cdot P\{|\omega(\alpha t)-x_0|\leq\delta_0/|\omega(0)|<\frac{1}{n}\}\geq W_x\{|\omega(\alpha t)|<\frac{\alpha_1}{n}\}\cdot$$

$$\cdot P\{|\omega(s)|<\frac{1-\alpha_1}{n},\ s\in[0,(1-2\alpha)t]/|\omega(0)|=0\}\cdot$$

$$\cdot P\{|\omega(\alpha t)-x_0|\leq\delta_0/|\omega(0)|<\frac{1}{n}\}=W_x\{|\omega(\alpha t)|<\frac{\alpha_1}{n}\}\cdot$$

$$\cdot W_0\{|\omega(s)| < \frac{1-\alpha_1}{n},\ s \in [0,(1-2\alpha)t]\}\cdot$$

$$\cdot P\{|\omega(\alpha t) - x_0| \le \delta_0/|\omega(0)| < \frac{1}{n}\} = p_1 p_2 p_3. \tag{28}$$

Положим $t_1 = \alpha t$. Тогда p_1 и p_3 могут быть вычислены и оценены снизу, используя нормальное распределение, [2].

$$p_1 = W_x\{|\omega(\alpha t)| \ge \frac{\alpha_1}{n}\} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t_1}} \int\limits_{-\alpha_1/n}^{\alpha_1/n} \exp - \frac{|s-x|}{4t_1}\, dS \ge$$

$$\ge (4\pi t\alpha)^{-1/2} \cdot \frac{2\alpha_1}{n} \exp\{-\frac{x^2}{4\alpha t} - \varepsilon_2\} \qquad \forall \varepsilon_2 > 0,\ n > N_2(\varepsilon_2, t, x, \alpha);$$

$$p_3 = P\{|\omega(\alpha t) - x_0| \le \delta_0/|\omega(0)| < \frac{1}{n}\} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t_1}} \int\limits_{x_0-\delta_0}^{x_0-\delta_0} \exp - \frac{(s-\omega(0))^2}{4t_1}\ ; dS \ge$$

$$\ge \frac{2\delta_0}{\sqrt{(4\pi t\alpha)}} \exp\{-\frac{(x_0+\delta_0)^2}{4\alpha t} - \varepsilon_3\} \qquad \forall \varepsilon_3 > 0,\ n > N_3(\varepsilon_3, t, x, \alpha).$$

Вероятность p_2 можно оценить, используя (27)

$$p_2 = W_0\{|\omega(s)| < \frac{1-\alpha_1}{n},\ s \in [0,(1-2\alpha)t]\} = W_0\{r([-\frac{(1-\alpha_1)}{n}, \frac{1-\alpha}{n} > (1-2\alpha)t\} =$$

$$W_{\frac{1-\alpha_1}{n}}\{r([0, \frac{2(1-\alpha_1)}{n}]) > (1-2\alpha)t\} = W(\frac{1-\alpha_1}{n}, (1-2\alpha)t) \ge$$

$$\ge \frac{4-\varepsilon_4}{\pi} \exp\{-\frac{\pi^2 n^2 t(1-2\alpha)}{(1-\alpha_1)^2 \cdot 8}\}$$

$$\forall \varepsilon_4 > 0, \quad n > N_4(\varepsilon_4, x, t, \alpha, \alpha_1).$$

Тогда $W_x(\Omega_n)$ оценивается следующим образом:

$$W_x(\Omega_n) \ge p_1 p_2 p_3 \ge K_0 \cdot \frac{1}{n} \cdot \exp\{-\frac{\pi^2 n^2 t\gamma}{8-\varepsilon}\}. \tag{29}$$

Т. о., получаем, когда $N = 1$, из (20) и (29) оценку (23) при $C^1 = C^2$, а из (22) и (29) оценку (24) при $C^1 \ne C^2$, где

$$\widetilde{K}_0 = K_0 \cdot K, \quad K_0 = \frac{4\alpha_1\delta_0}{\pi\alpha t} \exp\{-\frac{x^2}{4\alpha t} - \frac{(x_0+\delta_0)^2}{4\alpha t} - \varepsilon_5\}. \tag{30}$$

N-мерное броуновское движение $\{w(t): \quad t \ge 0\}$ состоит в том, что имеется N независимых броуновских движений, [5], т. е. $\omega(t) = (\omega_1(t), ..., \omega_N(t))$, где $\{\omega_j(t): \quad t \ge 0\}$ есть одномерное броуновское движение. Если $x_0 = (x_{01}, ..., x_{0N})$, $\quad x = (x_1, ..., x_N)$, то

$$W_x(\Omega_n) W_x\{|\omega(t) - x_0| \ge \delta_0, \quad |\omega(s)| < \frac{1}{n}, \quad s \in J\} \ge$$

$$\geq W_x\{j=\overline{1,N},\quad |\omega_j(t)-x_{0j}|\leq \delta_{0j}/\sqrt{N}; |\omega_1(s)|<1/n\sqrt{N},\quad s\in J\})^N\geq$$

$$\geq (W_x\{|\omega_1(\alpha t)|\geq \frac{\alpha_1}{n\sqrt{N}}\cdot W_0\{|\omega_1(s)|<\frac{1-\alpha_1}{n\sqrt{N}},\quad s\in[0,\ (1-2\alpha)t]\}\cdot$$

$$\cdot P\{|\omega_1(\alpha t)-x_{01}|\leq \frac{\delta_0}{\sqrt{N}}\})^N\geq K_0\exp\{-\frac{\pi^2n^2(1-2\alpha)N^2t}{8-\varepsilon}\}, \tag{31}$$

$$\text{где } K_0=(\frac{4\alpha_1\delta_0}{\sqrt{N\pi\alpha t}})^N(\frac{1}{n})^N\exp\{-\frac{N|x|^2}{4\alpha t}-\frac{|x_0|^2N+\delta_0^2)}{4\alpha t}-\varepsilon\}. \tag{32}$$

Подставляя (31) в (20) и (22), получаем утверждение теоремы 4.

Доказательство теоремы 5: Будем искать неотрицательное решение системы (6) в виде $\overline{u}(x,t)=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\cdot|x|^{-\alpha};\quad b_1,\ b_2\geq 0$. Тогда

$$\Delta\overline{u}=\begin{pmatrix}b_1\alpha(\alpha+2-N)\\b_2\alpha(\alpha+2-N)\end{pmatrix}|x|^{-\alpha-2}$$

и система (6) имеет вид:

$$\begin{cases}\frac{\partial u^1}{\partial t}-b_1\alpha(\alpha+2-N)|x|^{-\alpha-2}=\frac{C^1}{|x|^2}b_2|x|^{-\alpha}\\ \frac{\partial u^2}{\partial t}-b_2\alpha(\alpha+2-N)|x|^{-\alpha-2}=\frac{C^2}{|x|^2}b_1|x|^{-\alpha},\end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases}b_1\alpha(N-2-\alpha)-C^1b_2=0\\ b_2\alpha(N-2-\alpha)-C^1b_1=0.\end{cases}$$

Для того, чтобы эта система имела решения, нужно чтобы

$$\begin{vmatrix}\alpha(N-2-\alpha) & -C^1\\ -C^2 & \alpha(N-2-\alpha)\end{vmatrix}=0$$

Решая квадратное уравнение $-\alpha^2+(N-2)\alpha-\sqrt{C^1C^2}=0$ относительно α, получаем

$$\alpha=\frac{N-2\pm\sqrt{(N-2)^2-4\sqrt{C^1C^2}}}{2}.$$

Откуда видно, что $\alpha\in\mathbb{R}$ при $\sqrt{C^1C^2}<(\frac{N-2}{2})^2$.

В заключение отметим, что большая часть настоящей работы была напечатана в сборнике Нелинейные граничные задачи, №6 (1995), С.34-41, в статье Бурский В.П., Самойлова О.В."Формула Фейнмана-Каца в вопросах существования решения сингулярных параболических систем", но так и не дошла до читателя, т.к. почти весь тираж сборника оказался испорченным. В настоящую работу кроме несколько изменённого изложения материала упомянутой статьи вошёл также случай системы (5), где удалось сузить интервал между необходимым и достаточным условиями несуществования положительного решения.

1. *Baras P., Goldstein I.A* The heat equation with a singular potential // Trans. of the Am. Math. Soc. v. 284, n. 1.- p. 121–139.

2. *Далецкий Ю.Л.* Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями // Успехи мат. наук. - v. XVII.- вып.5(107).- с.3–115.
3. Дифференциальные уравнения с частными производными -I. -М. Итоги науки. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.- Изд. ВИНИТИ.- 1990.
4. *Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А.* Теоремы и задачи о процессах Маркова // М.Наука.- 1967.
5. *Goldstein I.A.* Three lectures on applied analysis // Препринт 7-6-90.- Воронеж Изд. ВГУ.- с.4–12.- 1990.
6. *Маркус М., Минк Х* Обзор по теории матриц и матричных неравенств // М.Наука.- 1972.
7. *McKean H.P.* Stochastic integrals // New York, Academic Press.- 1969.
8. *Rosencrans S.I.* Differential and partial differential equations // Lecture Notes, New Orlean - Tulane Univ.- 1977–1978.

Институт прикладной математики и механики
ул. Р.Люксембург, 74,
83114, г.Донецк, Украина
burskii@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 15.03.2005