

©2005. Н. В. Афанасьева

ТЕОРЕМЫ ТИПА ФУДЖИТЫ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ В СЛУЧАЕ МЕДЛЕННО УБЫВАЮЩИХ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ

В данной работе рассматривается задача Коши для дважды нелинейного вырожденного параболического уравнения с нелокальным источником. Устанавливаются существование и несуществование в целом по времени решений этой задачи для начальных данных, медленно стремящихся к нулю.

1. Введение.

В данной работе рассматривается следующая задача Коши

$$u_t = \operatorname{div} (u^\alpha |Du|^{m-1} Du) + \left(\int_{\Omega} (1 + |y|)^\mu u^q(y, t) dy \right)^{\frac{p-1}{q}} u^r, \tag{1.1}$$

$$(x, t) \in Q_t = R^N \times (0; T), \quad T > 0, \quad N \geq 1 \tag{1.2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) > 0, \quad x \in R^N,$$

Здесь предполагается, что $m + \alpha - 1 \geq 0$, $p, r \geq 1$, $1 < q < \infty$, $m > 0$, $-N < \mu < N(q - 1)$, Ω - область из R^N , $u_0(x)$ - неотрицательная измеримая функция из $L_{1,loc}(R^N)$, удовлетворяющая дополнительному условию, которое укажем позже.

Целью работы является установление условий существования и несуществования в целом по времени решений задачи (1.1), (1.2) для некоторого класса начальных функций, вообще говоря, не принадлежащих $L_1(R^N)$.

В работе [1] для случая $p = 1$, $m = 1$, $\alpha = 1$, $u_0 \in L_1(R^N)$ впервые было показано, что необходимым условием глобальной разрешимости является некоторая малость начальной функции и ограничение на показатель r , а именно: $1 < r < r^* = 1 + 2/N$, если же $r > r^*$, то любое неотрицательное решение задачи (1.1), (1.2) "взрывается" за конечное время, то есть существует такое $0 < T < \infty$, что

$$\|u(\cdot, t)\|_{\infty, R^N} \rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow T.$$

Показатель r^* принято называть показателем Фуджиты.

Позже было установлено (см. например [2,3,4,5]), что в более общем случае при $p = 1$ $r^* = m + \alpha + (m + 1)/N$.

В работах [2,7] при $p > 1$, $m = 1$, $\alpha = 0$ были приведены оценки для показателя Фуджиты. Изучению вопроса глобальной разрешимости задачи (1.1), (1.2) в классе медленно растущих функций в случае локального источника посвящены работы [8,9,10].

Прежде чем переходить к формулировке основных результатов введем некоторые понятия и обозначения

Пусть $B_\rho(x_0) = \{|x - x_0| < \rho\}$ - шар радиуса $\rho > 0$ с центром в $x_0 \in R^N$, $B_\rho \equiv B_\rho(0)$.

$$\int_{B_\rho(x_0)} \cdot dx = (\operatorname{mes}_N B_\rho(x_0))^{-1} \int_{B_\rho(x_0)} \cdot dx,$$

$$I(t) \equiv \int_{\Omega} (1 + |y|)^{\mu} u^q dy. \quad (1.3)$$

$$K = N(m + \alpha - 1) + m + 1, \quad K_{\lambda} = N(m + \alpha - 1) + \lambda(m + 1), \quad \lambda \geq 1. \quad (1.4)$$

Будем предполагать, что u_0 такова, что конечна следующая величина

$$[u_0] = \sup_{x_0 \in R^N} \sup_{\rho > 0} h(\rho) \int_{B_{\rho}(x_0)} u_0(x) dx,$$

где $h(s)$, $s > 0$ непрерывная неотрицательную функция, удовлетворяющую следующим условиям:

$$h(s) \rightarrow \infty, \quad \text{при } s \rightarrow \infty; \quad (1.5)$$

найдется положительное число c_1 такое, что

$$h(\lambda s) \leq \lambda^{c_1} h(s), \quad \text{для всех } s > 0, \quad \lambda > 1. \quad (1.6)$$

Пусть еще $\mathcal{R}(t)$ - это функция обратная к функции $\mathcal{H}(s) = s^{m+1} h^{m+\alpha-1}(s)$,

$$C = C_0 [u_0]^{m+\alpha-1}, \quad (1.7)$$

где C_0 - достаточно большая постоянная

Будем говорить, что $u(x, t)$ является обобщенным решением задачи (1.1), (1.2) в Q_T , если $u(x, t) \geq 0$ почти всюду в Q_T ,

$$u \in L_{\infty, loc}(Q_T) \cap C((0, T); L_{2, loc}(R^N)),$$

$$u^{\alpha} |Du|^{m+1} \in L_{1, loc}(Q_T)$$

$$u^r \in L_{1, loc}(Q_T)$$

и для всякой ограниченной области $\Omega_1 \subset Q_T$ функция $u(x, t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\Omega_1} (-u\eta_t + u^{\alpha} |Du|^{m-1} Du D\eta) dx dt = \int_{\Omega_1} (I(t))^{\frac{p-1}{q}} u^r \eta dx dt,$$

для всякой $\eta \in C_0^1(\Omega_1)$, и, кроме того, $u(\cdot, t) \rightarrow u_0$ при $t \rightarrow 0$ в $L_{1, loc}(R^N)$. Далее под решением задачи (1.1), (1.2) будем понимать ее обобщенное решение.

Основные результаты работы изложены в следующих теоремах

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $\Omega = B_{\mathcal{R}(t)}$ и

$$D_0 = \int_1^{\infty} \frac{(\mathcal{R}(\tau))^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}} d\tau}{h^{p+r-2}(\mathcal{R}(\tau))} < \infty. \quad (1.8)$$

Тогда существует решение $u(x, t)$ задачи (1.1), (1.2), определенное для всех $t > 0$ при условии, что

$$\|u_0\|_{\lambda, R^N} + [u_0] \leq \delta, \quad (1.9)$$

где $\lambda > N(p+r-1-t-\alpha)/(m+1)$, а $\delta = \delta(N, m, \alpha, p, r, q, \mu)$ достаточно малое число. Более того, для всех $t > 0$ имеет место оценка

$$\|u(\cdot, t)\|_{\infty, R^N} \leq \gamma_0 \frac{[u_0]}{h(\mathcal{R}([u_0]^{m+\alpha-1}t))}. \quad (1.10)$$

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $\Omega = R^N$ и функция $h(\rho)$ удовлетворяет условиям:

$$h(\rho)\rho^{-\frac{m+1+(p-1)(N+\mu)/q}{r+p-1-m-\alpha}} \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow \infty, \quad (1.11)$$

найдутся такие постоянные $c_2, c_3 > 0$, что

$$\int_{B_\rho} u_0^{1-\theta}(x) dx \geq c_2 h^{-(1-\theta)}(\rho) \quad (1.12)$$

для всех $\rho > 0$ и $0 < \theta < c_3$. Тогда любое решение задачи (1.1), (1.2) "взрывается" за конечное время.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Теоремы 1.1 и 1.2 были доказаны для случая $p = 1, m + \alpha - 1 < 0$ в работе [8].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Если функция $u_0 = a(1 + |x|)^{-\beta}$, где $(N + \mu)/q < \beta < N$ и $a > 0$ - некоторое достаточно малое число, то очевидно, что мы можем положить $h(\rho) = \rho^\beta$. Тогда из теорем 1.1 и 1.2 следует, что $r^* = m + \alpha + (m + 1)/\beta - (p - 1)(q\beta - N - \mu)/(q\beta)$. Для случая $p = 1$ этот результат совпадает с результатом работы [10].

2. Доказательство Теоремы 1.1.

Доказательство теоремы 1.1 проводится по схеме, изложенной в работах [3, 11].

Рассмотрим последовательность $u_n(x, t)$, $n \geq 1$, решений следующей начально-краевой задачи Коши-Дирихле

$$u_{nt} - \operatorname{div}(u_n^\alpha |Du_n|^{m-1} Du_n) = \min \left\{ n, \left(\int_{R^N} (1 + |y|)^\mu u_n^q dy \right)^{\frac{p-1}{q}} u_n^r \right\} \text{ в } B_n \times (0, +\infty), \quad (2.1)$$

$$u_n(x, t) = 0 \text{ на } \partial B_n \times (0, +\infty), \quad (2.2)$$

$$u(x, 0) = u_{0n} \quad x \in B_n, \quad (2.3)$$

где $B_n = B_{\rho_n}(0)$, с некоторой последовательностью $\rho_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, а $u_{0n} \in C_0^\infty(B_n)$ такие, что $u_{0n} \rightarrow u_0$ в $L_{1,loc}(R^N) \cap L_\lambda(R^N)$. Продолжив u_n нулем вне $B_n \times (0; \infty)$, мы определим его во всем $R^N \times (0; \infty)$. Из результатов работы [12] следует, что задача (2.1)-(2.3) глобально разрешима при всяком фиксированном n .

Для упрощения дальнейших записей введем величину

$$\langle u \rangle_t = \sup_{0 < \tau < t} \sup_{x_0 \in R^N} \sup_{\rho > \mathcal{R}(Ct)} h(\rho) \int_{B_\rho(x_0)} u(\cdot, \tau) dx,$$

где постоянная C определена в (1.7). Для доказательства нам потребуются две следующие леммы

ЛЕММА 2.1. Пусть $u(x, t)$ является решением уравнения (2.1) и $T > 0$ таково, что для всех $0 < t < T$ выполнены неравенства

$$\frac{t}{\mathcal{R}(Ct)} \|u(\cdot, t)\|_{\infty, R^N}^{m+\alpha-1} < 1, \quad tI^{\frac{p-1}{q}}(t) \|u(\cdot, t)\|_{\infty, R^N}^{p-1} < 1. \quad (2.4)$$

Тогда найдется постоянная $\gamma = \gamma(N, m, \alpha, r, p, q, \mu)$, такая, что верно неравенство

$$\|u(\cdot, t)\|_{\infty, R^N} \leq \gamma \frac{C^{N/K} \langle u \rangle_t^{\frac{m+1}{K}}}{h(\mathcal{R}(Ct))}. \quad (2.5)$$

ЛЕММА 2.2. В условиях леммы 2.1 при для всякого $\rho \geq \mathcal{R}(Ct)$ и $0 < t < T$, где T , то же, что и в лемме 2.1, имеет место неравенство

$$\int_0^t \int_{B_{\rho/2}} |Du|^m u^\alpha dx d\tau \leq \gamma C^{-1/K} \mathcal{R}(Ct) \sup_{0 < \tau < t} \|u(\cdot, \tau)\|_{1, B_\rho} \langle u \rangle_\tau^{\frac{m+\alpha-1}{K}}, \quad (2.6)$$

где $\gamma = \gamma(N, m, \alpha, r, p, q, \mu)$

Доказательство этих лемм проводится также как это было сделано в работах [8,9], здесь мы его опускаем.

Как следует из работ [3, 11] в условиях леммы 2.1 для всех $0 < t < T$ и $\rho > \mathcal{R}(Ct)$ и $n \geq 1$ справедлива следующая оценка

$$\|u(\cdot, t)\|_{\infty, B_\rho} \leq \gamma t^{-\frac{N}{K}} \left(\int_0^t \int_{B_{2\rho}} u(\cdot, \tau) dx d\tau \right)^{\frac{m+1}{K}}, \quad (2.7)$$

здесь $\gamma = \gamma(N, m, \alpha, p, r, q, \mu)$ и не зависит от n . Везде далее в работе через γ обозначены постоянные, которые зависят лишь от параметров задачи и известных величин.

Теорема будет доказана, если покажем, что для всех $t > 0$ и всех $n \geq 1$ имеет место неравенство

$$\langle u \rangle_t \leq \gamma [u_0], \quad (2.8)$$

где γ не зависит от n , и выполнены условия (2.4). Тогда будет возможно применить предельный переход и утверждение теоремы будет следовать из неравенств (2.7) и (2.8).

Введем величины

$$T_1 = \sup\{t > 0 : \text{выполнено первое из условий (2.4)}\},$$

$$t_1 = \sup\{t > 0 : \text{выполнено второе из условий (2.4)}\}.$$

Умножим обе части уравнения (2.1) на $u^{\lambda-1}$ и проинтегрируем результат по $Q_t = (0; t) \times R^N$, где $t \in (0; \min\{T_1, t_1\})$, получим

$$\int_{R^N} u^\lambda dx \leq \int_{R^N} u_0^\lambda dx + \gamma \mathcal{R}(t)^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}} \Phi_\lambda(t) \Psi_\lambda(t), \quad (2.9)$$

где $\Phi_\lambda(t) = \sup_{0 < \tau < t} \int_{R^N} u^\lambda$, а $\Psi_\lambda(t) = t^{1 - \frac{N(p+r-2)}{K\lambda}} \Phi_\lambda(t)^{\frac{(p+r-2)(m+1)}{K\lambda}}$. Понятно, что $\Psi_\lambda(t) < \infty$ в силу условия на λ .

Введем еще величину

$$T_0 = \sup\{t > 0 : \mathcal{R}(t)\Psi_\lambda(t) < \varepsilon\}.$$

Тогда из неравенства (2.9) при достаточно малом ε , следует

$$\Phi_\lambda(t) \leq \gamma \|u_0\|_{\lambda, R^N}^\lambda, \quad t \in (0, \min\{T_0, T_1, t_1\}). \quad (2.10)$$

Найдем T'_0 из условия

$$\gamma (T'_0)^{1 - \frac{N(p+r-2)}{K\lambda}} (\mathcal{R}(T'_0))^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}} \|u_0\|_{\lambda, R^N}^{\frac{\lambda(p+r-2)(m+1)}{K\lambda}} = \varepsilon.$$

В силу того, что функция $t^{1 - \frac{N(p+r-2)}{K\lambda}} (\mathcal{R}(t))^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}}$ возрастает, можем утверждать, что если δ достаточно мало, то $T'_0 > 1$, а из определения T_0 следует, что $T_0 > T'_0 > 1$.

Если теперь $t \in (0; \min\{T_0, T_1, t_1\})$, то из (2.7) и (2.10) имеем

$$t I^{\frac{p-1}{q}}(t) \|u(\cdot, t)\|_{\infty, R^N}^{r-1} \leq t^{1 - \frac{N(p+r-2)}{K\lambda}} \mathcal{R}^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}}(t) \|u_0\|_{\lambda, R^N}^{\frac{\lambda(r+p-2)(m+1)}{K\lambda}} \leq \frac{1}{4}.$$

Откуда заключаем, что $T_1 > T_0$.

Пусть $\rho > \mathcal{R}(t)$. Введем стандартную гладкую срезающую функцию $\zeta = \zeta(x)$ шара $B_\rho = B_\rho(0)$ со следующими свойствами $0 < \zeta(x) < 1$, $\zeta(x) \equiv 1$, при $|x| < \rho/2$, $\zeta(x) \equiv 0$, когда $|x| > \rho$ и кроме того $|D\zeta| \leq \gamma\rho^{-1}$ с некоторой постоянной $\gamma > 0$. Умножим уравнение (2.1) на $\zeta(x)$ и проинтегрируем по $(0, t) \times B_\rho$, где $t \in (0, \min\{T_0, t_1\})$. Умножим еще полученное равенство на $h(\rho)\rho^{-N}$. Используя лемму 2.2, получаем

$$\begin{aligned} h(\rho) \int_{B_{\rho/2}} u dx &\leq [u_0] + \gamma C_0^{-1/K} [u_0]^{-\frac{m+\alpha-1}{K}} \langle u \rangle_t^{1 + \frac{m+\alpha-1}{K}} + \\ &+ \gamma \langle u \rangle_t \int_0^t \|u(\cdot, \tau)\|_{\infty, B_\rho}^{r-1} I^{\frac{p-1}{q}}(t) d\tau, \quad t \in (0, \min\{T_0, t_1\}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Введем величину $t_2 = \sup\{0 < \tau < t : \langle u \rangle_t < 4\gamma_1[u_0]\}$, где $\gamma_1 > 0$ некоторое число. Тогда из (2.11) и определений t_2, T_0 , для всех $t \in (0, \min\{t_1, t_2, T_0\})$ следует, что

$$h(\rho) \int_{B_{\rho/2}} u dx \leq \gamma[u_0] + \gamma(4\gamma_1)^{\frac{m+\alpha-1}{K}} C_0^{-1/K} \langle u \rangle_t + \gamma\varepsilon \langle u \rangle_t$$

Из последнего неравенства при достаточно малом ε и достаточно большом C_0 получаем

$$\langle u \rangle_t \leq 2\gamma_1[u_0], \quad 0 < t \min\{t_1, t_2, T_0\}. \quad (2.12)$$

Из (2.12) в силу свойств $\langle u \rangle_t$ и определения t_2 следует, что $t_2 > \min\{t_1, T_0\}$.

Далее, применяя леммы 2.1 и 2.2, при достаточно большом C_0 имеем

$$\begin{aligned} \frac{t}{\mathcal{R}^{m+1}(Ct)} \|u(\cdot, t)\|_{\infty, R^N}^{m+\alpha-1} &\leq \gamma \frac{tC^{\frac{N(m+\alpha-1)}{K}} \langle u \rangle_t^{\frac{(m+1)(m+\alpha-1)}{K}}}{\mathcal{R}^{m+1}(Ct) h^{m+\alpha-1}(\mathcal{R}(Ct))} \leq \\ &\leq \gamma(\gamma_1)^{\frac{(m+1)(m+\alpha-1)}{K}} C_0^{-\frac{m+1}{K}} \leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что $t_1 > T_0$.

Пусть теперь $t \in (1, \min\{T_1, t_1, t_2\})$. Поступая так же, как и при выводе (2.11), при помощи леммы 2.1 и леммы 2.2 получаем

$$\begin{aligned} h(\rho) \int_{B_{\rho/2}} u dx &\leq [u_0] + \gamma C_0^{-1/K} (\langle u \rangle_t [u_0]^{-1})^{\frac{m+\alpha-1}{K}} \langle u \rangle_t + \\ &+ \gamma C^{\frac{N(p+r-2)}{K}} \int_1^t \langle u \rangle_\tau^{1+\frac{(p+r-2)(m+1)}{K}} \mathcal{R}(\tau)^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}} h^{-(p+r-2)}(C\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Выбираем C_0 настолько большим, что $C = C_0[u_0]^{m+\alpha-1} > 1$, тогда $h(\mathcal{R}(\tau)) \leq h(\mathcal{R}(C\tau))$. И из (2.13) следует

$$\langle u \rangle_t \leq \gamma [u_0] + \gamma C^{\frac{N(p+r-2)}{K}} \int_1^t \langle u \rangle_\tau^{1+\frac{(p+r-2)(m+1)}{K}} \mathcal{R}(\tau)^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}} h^{-(p+r-2)}(\tau) d\tau.$$

Заметим, что $\langle u \rangle_t$ можно оценить сверху функцией $y(t)$, которая является решением следующей задачи Коши

$$\begin{aligned} y' &= \gamma C^{\frac{N(p+r-2)}{K}} y^{1+\frac{(p+r-2)(m+1)}{K}} (\mathcal{R}(\tau))^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}} h^{-(p+r-2)}(\tau), \\ y(1) &= \gamma [u_0]. \end{aligned}$$

Непосредственно решая эту задачу, получаем

$$y(t) = \gamma [u_0] \left(1 - \gamma C^{\frac{N(p+r-2)}{K}} [u_0]^{p+r-2} \int_1^t (\mathcal{R}(\tau))^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}} h^{-(p+r-2)}(\tau) d\tau \right)^{-\frac{K}{(m+1)(p+r-2)}}.$$

Отсюда приходим к неравенству

$$\langle u \rangle_t \leq y(t) \leq \gamma [u_0] \left(1 - \gamma (C_0 [u_0]^{m+\alpha-1})^{\frac{N(p+r-2)}{K}-1} [u_0]^{\frac{(m+1)(p+r-2)}{K}} D_0 \right)^{-\frac{K}{(m+1)(p+r-2)}}. \quad (2.14)$$

В силу условия (1.8) при достаточно малом $[u_0]$ выражение в скобках в (2.14) положительно и, следовательно,

$$\langle u \rangle_t \leq \gamma [u_0], \quad t \in (0, \min\{T_1, t_1, t_2\}). \quad (2.15)$$

Также как и ранее можно показать, что $t_1, t_2 \geq T_1$.

Покажем, наконец, что $T_1 = \infty$. Пусть $t \in (1, T_1)$, тогда применяя лемму 2.1, с учетом (2.15) получаем

$$t(I(t))^{\frac{p-1}{q}} \|u(\cdot, t)\|_{\infty, R^N}^{r-1} \leq \gamma t (\mathcal{R}(t))^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}} \left(\frac{[u_0]}{h(\mathcal{R}(t))} \right)^{p+r-2}$$

Из последнего неравенства, с учетом того, что $\mathcal{R}^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}}(t) (h(\mathcal{R}(t)))^{-(p+r-2)} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, имеем

$$\begin{aligned} t(I(t))^{\frac{p-1}{q}} \|u(\cdot, t)\|_{\infty, R^N}^{r-1} &\leq \gamma [u_0]^{p+r-2} \left((t-1) \frac{\mathcal{R}^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}}(t)}{h^{p+r-2}(\mathcal{R}(t))} + \frac{\mathcal{R}^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}}(1)}{h^{p+r-2}(\mathcal{R}(1))} \right) \leq \\ &\leq \gamma [u_0]^{p+r-2} \left(D_0 + \frac{\mathcal{R}^{\frac{(N+\mu)(p-1)}{q}}(1)}{h^{p+r-2}(\mathcal{R}(1))} \right) \leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что $T_1 = \infty$. Теорема 1.1 доказана.

3. Доказательство Теоремы 1.2.

Пусть $0 < \theta < \min\{1, c_3\}$ - некоторое как угодно малое число, которое определи позже. Воспользуемся стандартной гладкой срезающей функцией шара $\zeta = \zeta(x) \in B_\rho$ с теми же свойствами, что и в пункте 2. Умножим обе части уравнения (1.1) на функцию $(u + \varepsilon)^{-\theta} \zeta^s(x)$, $\varepsilon > 0$ -сколь угодно малая величина и $s > m + 1$. Проинтегрируем полученное равенство по R^N и применим неравенство Юнга в правой части, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\theta} \frac{d}{dt} \int_{B_{2\rho}} \zeta^s (u + \varepsilon)^{1-\theta} dx &\geq -\gamma \rho^{-(m+1)} \int_{R^N} (u + \varepsilon)^{m+\alpha-\theta} \zeta^{s-m-1} dx + \\ &+ (I(t))^{(p-1)/q} \int_{R^N} u^{r-\theta}(\cdot, t) \zeta dx. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Из неравенства Гельдера имеем

$$\begin{aligned} \int_{R^N} u^{1-\theta}(\cdot, t) \zeta^s dx &\leq (I(t))^{(1-\theta)/q} \left(\int_{R^N} (1 + |y|)^{-\frac{\mu(1-\theta)}{q-1+\theta}} \zeta^{\frac{sq}{q-1+\theta}} dy \right)^{\frac{q-1+\theta}{q}} \leq \\ &\leq (I(t))^{(1-\theta)/q} \rho^{\frac{N(q-1+\theta)-\mu(1-\theta)}{q}}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$(I(t))^{(p-1)/q} \geq \rho^{-\frac{(p-1)(N(q-1+\theta)-\mu(1-\theta))}{q(1-\theta)}} \left(\int_{R^N} u^{1-\theta}(\cdot, t) \zeta^s dx \right)^{\frac{p-1}{1-\theta}}. \quad (3.2)$$

Обозначим

$$E(t) = \int_{R^N} u^{1-\theta}(\cdot, t) \zeta^s dx, \quad (3.3)$$

Перейдем в (3.1) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, с учетом (3.3) это даст

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &\geq -\gamma^{-(m+1)} \int_{R^N} (u + \varepsilon)^{m+\alpha-\theta} \zeta^{s-m-1} dx + \\ &+ \gamma \rho^{-\frac{(p-1)(N(q-1+\theta)-\mu(1-\theta))}{q(1-\theta)}} (E(t))^{\frac{p-1}{1-\theta}} \int_{R^N} u^{r-\theta}(\cdot, t) \zeta^s dx. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В первом слагаемом правой части (3.4) применим неравенство Гельдера

$$\rho^{-(m+1)} \int_{B_{2\rho}} u^{m+\alpha-\theta} \zeta^{s-m-1} dx \leq \gamma \rho^{-(m+1)+N \frac{1-(m+\alpha-\theta)}{r-\theta}} \left(\int_{R^N} u^{r-\theta}(\cdot, t) \zeta^{\frac{(s-m-1)(r-\theta)}{m+\alpha-\theta}} dx \right)^{\frac{m+\alpha-\theta}{r-\theta}}.$$

Подберем s из условия

$$s = \frac{(s-m-1)(r-\theta)}{m+\alpha-\theta} > m+1.$$

Применим теперь в первом слагаемом правой части (3.4) неравенство Юнга с некоторой постоянной $\varepsilon_1 > 0$

$$\begin{aligned} \rho^{-(m+1)} \int_{R^N} u^{m+\alpha-\theta} \zeta^{s-m-1} dx &\leq \frac{\varepsilon_1^{\frac{r-\theta}{m+\alpha-\theta}} (m+\alpha-\theta)}{r-\theta} \int_{R^N} u^{r-\theta} \zeta^s dx + \\ &+ \gamma \frac{\varepsilon_1^{-\frac{r-\theta}{r-m-\alpha}} (r-m-\alpha)}{r-\theta} \rho^{N-\frac{(m+1)(r-\theta)}{r-m-\alpha}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Возьмем

$$\varepsilon_1 = \frac{\gamma(r-\theta)}{2(m+\alpha-\theta)} \rho^{-\frac{(p-1)(N(q-1+\theta)-\mu(1-\theta))(m+\alpha-\theta)}{q(1-\theta)(r-\theta)}} E^{\frac{(p-1)(m+\alpha-\theta)}{(1-\theta)(r-\theta)}}(t).$$

С таким выбором ε_1 из (3.4) следует

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &\geq -\gamma \rho^{N-\frac{(m+1)(r-\theta)}{r-m-\alpha} + \frac{(p-1)(N(q-1+\theta)-\mu(1-\theta))(m+\alpha-\theta)}{q(1-\theta)(r-m-\alpha)}} (E(t))^{-\frac{(p-1)(m+\alpha-\theta)}{(1-\theta)(r-m-\alpha)}} + \\ &+ \gamma \rho^{-\frac{(p-1)(N(q-1+\theta)-\mu(1-\theta))}{q(1-\theta)}} (E(t))^{\frac{p-1}{1-\theta}} \int_{R^N} u^{r-\theta} \zeta^s dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Допустим, что в правой части первое слагаемое по абсолютной величине больше второго слагаемого, то есть, что

$$\int_{R^N} u^{r-\theta} \zeta^s dx \leq \gamma \rho^{N-\frac{r-\theta}{r-m-\alpha} \left(m+1 + \frac{(p-1)(N+\mu)}{q} - \frac{N(p-1)}{1-\theta} \right)} (E(t))^{-\frac{(p-1)(r-\theta)}{(1-\theta)(r-m-\alpha)}}. \quad (3.7)$$

Воспользовавшись неравенством Гельдера из (3.7) получим

$$E(t) \leq \gamma \rho^{N(r-1)/(r-\theta)} \left(\int_{R^N} u^{r-\theta}(\cdot, t) \zeta^s dx \right)^{(1-\theta)/(r-\theta)} \leq$$

$$\leq \gamma \rho^{N - \frac{1-\theta}{r-m-\alpha}} \left(m+1 + \frac{(p-1)(N+\mu)}{q} - \frac{N(p-1)}{1-\theta} \right) E^{-\frac{p-1}{r-m-\alpha}}(t).$$

Откуда

$$E(t) \leq \gamma \rho^{N - \frac{1-\theta}{r-m-\alpha}} \left(m+1 + \frac{(p-1)(N+\mu)}{q} \right). \quad (3.8)$$

Умножим неравенство (3.8) на $h^{1-\theta}(\rho)\rho^{-N}$, тогда в силу условий теоремы

$$h^{1-\theta}(\rho) \int_{B_\rho} u^{1-\theta}(\cdot, t) dx \leq \left(h(\rho) \rho^{-\frac{m+1+(p-1)(N+\mu)/q}{r-m-\alpha}} \right)^{1-\theta} \rightarrow 0, \text{ при } \rho \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

С другой стороны, интегрируя неравенство (3.6) по $(0, t)$, получаем

$$E(t) \geq \int_{B_\rho} u_0^{1-\theta} \zeta^s dx - \gamma \rho^{N-l} \int_0^t E^{-\frac{(p-1)(m+\alpha-\theta)}{(1-\theta)(r-m-\alpha)}}(\tau) d\tau, \quad (3.10)$$

$$c \ l = \frac{(m+1)(r-\theta)}{r-m-\alpha} - \frac{(p-1)(m+\alpha-\theta)}{r-m-\alpha} \left(\frac{N}{1-\theta} - \frac{N+\mu}{q} \right).$$

Очевидно, что $E(t) \geq y(t)$, где $y(t)$ является решением следующей задачи Коши

$$\begin{aligned} y' &= -\gamma \rho^{N-l} (y(t))^{-\frac{(p-1)(m+\alpha-\theta)}{(1-\theta)(r-m-\alpha)}}, \\ y(0) &= \int_{B_\rho} u_0^{1-\theta} \zeta^s dx. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Решая задачу (3.11), имеем

$$E(t) \geq y(t) = y(0) \left(1 - (y(0))^{-\left(1 + \frac{(p-1)(m+\alpha-\theta)}{(1-\theta)(r-m-\alpha)}\right)} t \rho^{N-l} \right)^{\frac{(1-\theta)(r-m-\alpha)}{(1-\theta)(r-m-\alpha) + (p-1)(m+\alpha-\theta)}}. \quad (3.12)$$

Пусть $\rho > \mathcal{R}(t)$, тогда $t < \rho^{m+1} h^{m+\alpha-1}(\rho)$ (в силу определения функции $\mathcal{R}(t)$). Умножим (3.12) на $h^{1-\theta}(\rho)\rho^{-N}$, получим

$$\begin{aligned} & h^{1-\theta}(\rho) \int_{B_\rho} u^{1-\theta}(\cdot, t) dx \geq \gamma h^{1-\theta}(\rho) \int_{B_\rho} u_0^{1-\theta} dx \times \\ & \times \left(1 - \left(\int_{B_\rho} u_0^{1-\theta} dx \right)^{-\left(1 + \frac{(p-1)(m+\alpha-\theta)}{(1-\theta)(r-m-\alpha)}\right)} \left(h(\rho) \rho^{-\frac{m+1+(p-1)(N+\mu)/q}{r-m-\alpha}} \right)^{\frac{(m+\alpha-\theta)(r+p-1-m-\alpha)}{r-m-\alpha}} \right) \end{aligned}$$

Ввиду условия (1.11) выражение в скобках при достаточно большом ρ положительно, следовательно, в силу условия (1.12)

$$h^{1-\theta}(\rho) \int_{B_\rho} u^{1-\theta}(\cdot, t) dx \geq \gamma h^{1-\theta}(\rho) \int_{B_\rho} u_0^{1-\theta} dx > 0,$$

что противоречит (3.9). Значит, предположение (3.7) не верно. Таким образом из (3.6) имеем

$$\frac{dE}{dt} \geq \gamma \rho^{-\frac{(p-1)(Nq - (N+\mu)(1-\theta))}{q(1-\theta)}} E^{\frac{p-1}{1-\theta}}(t) \int_{R^N} u^{r-\theta}(\cdot, t) \zeta^s dx.$$

Воспользовавшись как и ранее неравенством Гельдера, получаем

$$\frac{dE}{dt} \geq \gamma \rho^{-\frac{(p-1)(Nq-(N+\mu)(1-\theta))+N(r-1)q}{q(1-\theta)}} E^{\frac{p+r-1-\theta}{1-\theta}}(t).$$

Интегрирование последнего неравенства по $(0, t)$ приводит к оценке

$$E(t) \geq E(0) \left(1 - \gamma t \rho^{-l_1} E^{\frac{p+r-2}{1-\theta}}(0)\right)^{-\frac{1-\theta}{p+r-2}},$$

где $E(0) = \int_{R^N} u_0^{1-\theta}(\cdot, t) \zeta^s dx$, и $l_1 = N(p+r-2)/(1-\theta) - (p-1)(N+\mu)/q > 0$. Из последнего неравенства следует, что $E(t) \rightarrow \infty$, при $t \rightarrow T = \gamma \rho^{l_1} E^{-\frac{p+r-2}{1-\theta}}(0)$. Теорема доказана.

1. Fujita H. On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math. 1966. V. 13. P. 109-124.
2. Galaktionov V.A., Levine H.A. A general approach to critical Fujita exponents and systems // Nonlinear Anal. TMA. 1998. V. 34 P. 1005-1027.
3. Andreucci D., Tedeev A.F. A Fujita type result for degenerate Neumann problem in domains with noncompact boundary // J. Math. Anal. Appl. 1999. V. 231. P. 543-567.
4. Andreucci D., Tedeev A.F. Optimal bounds and blow-up phenomena for parabolic problems in narrowing domains // Proceeding of the Royal Soc of Ed. 1998. V. 128. № 6. P. 1163-1180.
5. Levine H.A. The role of critical exponents in blow up theorems // Review.- 1990.- V. 32.- P. 262-288.
6. Deng K. Levine H.A. The role of critical exponents in blow-up theorems. The sequel // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 243. P. 85-126.
7. Deng K., Kwong M.K., Levine H.A. The influence of nonlocal nonlinearities on the long-time behavior of solutions of Burgers' equation // Quart. Appl. Math.- 1992.- V.50. - P. 173-200.
8. Афанасьева Н.В., Тедеев А.Ф. Теоремы типа Фуджиты для квазилинейных параболических уравнений в случае медленно стремящихся к нулю начальных данных.// Мат.сборник. 2004. Т.195 №4 С.3-22.
9. Cirmi G.R., Leonardi S., Tedeev A.F. The asymptotic behavior of the solution of a quasilinear parabolic equation with blow-up term -Catania, 1998.-18 p.-(Preprint / Universita di Catania Dipartimento di Matematica ed Informatica)
10. Mukai K., Mochizuki K., Huang Q. Large time behavior and life span for a quasilinear parabolic equation with slow decay initial values // Nonlinear Analysis. - 2000.- v. 39 A:1. - p. 33-45.
11. Andreucci D., Di Benedetto E. On the Cauchy problem and initial traces for a class of evolution equations with strongly nonlinear sources // Analli. Sci. Normale Sup. Pisa. 1991. V.18. P. 363-441.
12. Tsutsumi M. On solution of some doubly nonlinear parabolic equations with absorption // J. Math. Anal. Appl. -1988.-V.132.- P.187-212.

Институт прикладной математики и механики
ул. Р.Люксембург, 74,
83114, г.Донецк, Украина

Получено 14.10.2004