УДК 517.54
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-1

©2018. **А.К. Бахтин, И.Я. Дворак**

ЗАДАЧА ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ ПЛОСКОСТИ

В данной работе изучается одна известная проблема об описании экстремальных конфигураций, которые максимизируют произведение внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей следующего вида

$$J_n(\gamma) = [r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \tag{1}$$

при $\gamma > 0$, $n \geqslant 2$, на множестве всех систем взаимно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, таких, что $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, $a_0 = 0 \subset B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \subset B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$.

MSC: 34N05.

Ключевые слова: *внутренний радиус, неналегающие области, n-лучевая система точек, “управляющий” функционал, квадратичный дифференциал.*

1. Введение.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множество натуральных и вещественных чисел, соответственно, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ — расширенная комплексная плоскость или сфера Римана, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Пусть $\chi(t) = \frac{1}{2}(t + t^{-1})$, $t \in \mathbb{R}^+$ — функция Жуковского. Пусть $r(B, a)$ — внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$ [4,5].

Системой непересекающихся областей называется конечный набор произвольных областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ таких, что $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \cap B_m = \emptyset$, $k \neq m$, $k, m = \overline{1, n}$.

Систему точек $A_n := \{\ a_k \in \mathbb{C}, \quad k = \overline{1, n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ назовем n-лучевой, если $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1, n}$, $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < ... < \arg a_n < 2\pi$.

Введем обозначения $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi} \arg \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1, n}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$.

Для произвольной n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ рассмотрим следующий “управляющий” функционал:

$$\mathcal{M}(A_n) := \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) |a_k|.$$

В данной работе рассматривается задача об экстремизации функционала

$$J_n(\gamma) = [r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \tag{1}$$

при $\gamma > 0$, $n \geqslant 2$, на множестве всех систем взаимно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, таких, что $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, $a_0 = 0 \subset B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \subset B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$.

Следует отметить, что система круговых областей Λ_0, Λ_∞, Λ_k, $k=\overline{1,n}$ квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + (n^2 - 2\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2, \tag{2}$$

представляет из себя систему взаимно непересекающихся областей, таких что $0 \in \Lambda_0$, $\infty \in \Lambda_\infty$, $\lambda_k \in \Lambda_k$, $\lambda_k = exp(\frac{2\pi(n-1)}{n})$, $k=\overline{1,n}$

При $\gamma = 1/2$ и $n \geqslant 2$ точная оценка для функционала (1) для систем непересекающихся областей была впервые получена в работе [6]. В работе [7] в случае односвязных областей была получена оценка функционала (1) при $\gamma \in (0, \frac{n^2}{8}]$, $n \geqslant 2$. Задача об оценке функционала (1) при начальных значениях натурального параметра n рассматривалась в [10, 11]. В работе [12] при $n \geqslant 7$ получили точные оценки функционала (1) для систем произвольных многосвязных областей при $\gamma \in (0, 0.08n^2)$ В данной работе улучшены оценки функционала (1) при $n \geq 6$ для больших интервалов значений параметра γ.

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \gamma \leqslant \gamma_n$, $\gamma_6 = 4,64$, $\gamma_n = 0.0845n^2 + 0.088n + 0.0229$, $n \geq 7$. *Тогда для* $\gamma \in (0, \gamma_n]$, *любой* n*-лучевой системы точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, *такой, что* $\mathcal{M}(A_n) = 1$ *и любого набора взаимно непересекающихся областей* B_0, B_k, B_∞ ($a_0 = 0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$), *справедливо неравенство*

$$[r(B_0,0)\, r(B_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leqslant [r(\Lambda_0,0)\, r(\Lambda_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(\Lambda_k, \lambda_k),$$

где области Λ_0, Λ_∞, Λ_k *и точки* 0, ∞, λ_k ($k = \overline{1,n}$, $n \geq 6$) — *соответственно круговые области и полюсы квадратичного дифференциала (2).*

Доказательство. Применяя к системе точек $\{a_k\}_{k=1}^n$ и областей $\{B_k\}_{k=1}^n$ кусочно-разделяющее преобразования, развитое в [4, с. 120], [5, с. 48–50], аналогично работам [6, 9–11], получим неравенство

$$J_n(\gamma) \leqslant 2^n \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k\right) \left[\prod_{k=1}^n \Phi(\tau_k)\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^n \cdot \left[\prod_{k=1}^n \tau_k^{2\tau_k^2+2} \cdot |1-\tau_k|^{-(1-\tau_k)^2} \cdot (1+\tau_k)^{-(1+\tau_k)^2}\right]^{1/2},$$

где $\Phi(\tau) = \tau^{2\tau^2} \cdot |1-\tau|^{-(1-\tau)^2} \cdot (1+\tau)^{-(1+\tau)^2}$, $\tau \geqslant 0$, $\tau_k = \sqrt{\gamma} \cdot \alpha_k$, $k = \overline{1,n}$.

Пусть

$$S(x) = x^{2x^2+2} \cdot |1-x|^{-(1-x)^2} \cdot (1+x)^{-(1+x)^2} \quad \text{и} \quad F(x) = \ln(S(x)).$$

$F(x)$ выпуклая функция на интервале $[0, x_0]$, $x_0 \approx 0,88441$. Далее, аналогично работе [6, 8] мы рассмотрим следующую экстремальную проблему

$$\prod_{k=1}^{n} F(x_k) \longrightarrow \max, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k = 2\sqrt{\gamma}, \quad x_k = \alpha_k \sqrt{\gamma}.$$

Пусть $X^{(0)} = \left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ – произвольный экстремальный набор точек выше указанной задачи. Далее, следуя работе [8], получаем если $0 < x_k^{(0)} < x_j^{(0)}$, тогда

$$F'(x_k^{(0)}) = F'(x_j^{(0)}), \quad k, j = \overline{1, n}, \tag{3}$$

$$F'(x) = 4x\ln(x) - 2(x-1)\ln|x-1| - 2(x+1)\ln(x+1) + \frac{2}{x}$$

(см. Рис.1).

Учитывая соотношение (3) и то, что $\gamma \in (0, \gamma_n]$ покажем, что выполняется условие $x_k^{(0)} \in (0,\, x_0]$, $k = \overline{1, n}$, и $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$. Для этого, аналогично [12] введем следующие обозначения.

Пусть $F'(x) = t$, $y_0 \leqslant t < 0$, где y_0 – значение функции $y_0 = F''(x_0)$, где x_0 – корень уравнения $F''(x) = 0, y_0 \approx -1,0599$. Найдем решение уравнения $F'(x) = t$. Для $\forall t \in [y_0, 0)$ уравнение $F'(x) = t$ имеет два решения: $x_1(t) \in (0, x_0]$, $x_2(t) \in (x_0, \infty]$ при $n \geq 6$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$. Тогда из условия (3) необходимо показать, что случай, когда $x_2(t) \in (x_0, \infty]$ невозможен при $\gamma \in (0, \gamma_n]$.

Предположим, что один из корней $x_k^{(0)}, k = \overline{1, n}$, принадлежит промежутку $(x_0, \infty]$. Тогда

$$\sum x_k^{(0)} = (n-1)x_1^{(0)} + x_2^{(0)}.$$

С другой стороны обычное исследование графика функции $F'(x)$ показывает, что функция монотонно убывает на $(0, x_0]$ от $(\infty, y_0]$ и монотонно возрастает на $[x_0, \infty)$ от $[y_0, 0)$. График пересекает ось OX в точке $x \approx 0.5814$.

Тогда,

$$(n-1)x_1^{(0)} + x_2^{(0)} > (n-1)\cdot 0.5814 + 0.8844 = 0.5814n + 0.303 = 2\sqrt{\gamma_n}.$$

Отсюда следует, что $\gamma_n = 0.0845n^2 + 0.0088n + 0.0229$. С другой стороны при $\gamma \in (0, \gamma_n]$

$$2\sqrt{\gamma} = (n-1)x_1^{(0)} + x_2^{(0)} \geq (n-1)\cdot 0.5814 + 0.8844 = 2\sqrt{\gamma_n} > 2\sqrt{\gamma}.$$

Полученное противоречие означает, что ни одна из точек $x_k^{(0)}$, при $\gamma \in (0, \gamma_n]$ не может принадлежать промежутку $(x_0, \infty]$. Отсюда из соотношения (3) приходим к заключению, что $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$.

Непосредственные вычисления величин $x_1(t) + x_2(t)$ представлены в таблице приведенной ниже. Теорема 1 доказана для $n > 6$ и все предыдущие доказательства будут справедливыми при $0 < \gamma \leqslant \gamma_n$.

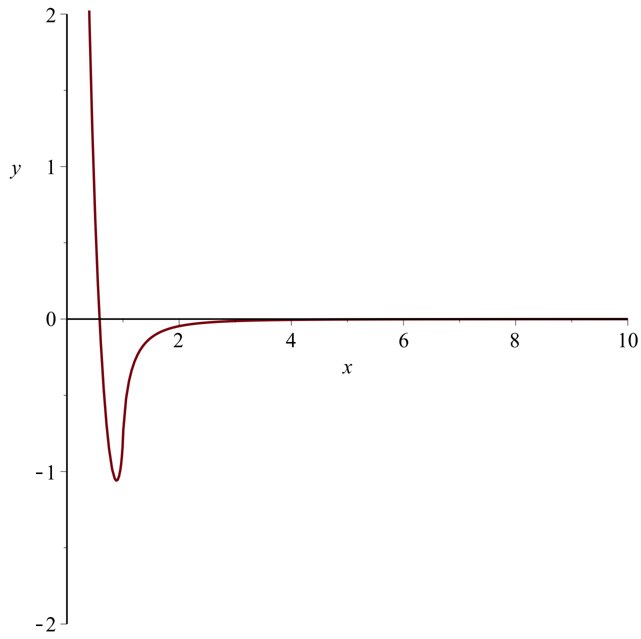

Рис. 1.

Из таблицы непосредственно следует, что $5x_1(t) + x_2(t) > 5x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$. С другой стороны $5x_1(t_k) + x_2(t_{k+1}) \geq 4.3093$. Полагая, что $2\sqrt{\gamma_6} = 4.3093$, получаем $\gamma_6 = 4.6425$. тогда ясно, что при $0 < \gamma \leqslant \gamma_n$

$$2\sqrt{\gamma} = (n-1)x_1 + x_2 > 4.3093 = 2\sqrt{\gamma_6} \geq 2\sqrt{\gamma}.$$

Из полученого противоречия следует, что теорема 1 доказана для $n \geq 6$. $\square$

Следствие 1. Учитывая условия Теоремы 1 выполняется следующее неравенство

$$[r(B_0,0)r(B_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \left[\frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)}}{\left|\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}-1\right|^{\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}-1\right)^2}\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}+1\right)^{\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}+1\right)^2}}\right]^{\frac{n}{2}}.$$

Равенство достигаеться, если 0, ∞, a_k, и B_0, B_∞, B_k, $k = \overline{1,n}$, соответственно полюсы и круговые области квадратичного дифференциала (2).

Следствие 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 7$, $0 < \gamma \leqslant \gamma_n$, $\gamma_n = 0.0845n^2 + 0.088n + 0.0229$. Тогда для любых точек окружности $|a_k| = R$, $k = \overline{1,n}$, и любых попарно непересекающихся систем областей B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset$

$\mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, следующее неравенство будет справедливым

$$[r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant [r(\Lambda_0, 0)\, r(\Lambda_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(\Lambda_k, \lambda_k),$$

где области Λ_0, Λ_∞, Λ_k, и точки 0, ∞, λ_k, $k = \overline{1,n}$, соответственно круговые области и полюсы квадратичного дифференциала

$$Q(w)dz^2 = -\frac{\gamma z^{2n} + (n^2 - 2\gamma)z^n + \gamma R^{2n}}{z^2(z^n - R^n)^2}\, dz^2.$$

k	t_k	$x_1(t_k)$	$x_2(t_k)$	$x_1(t_k) + x_2(t_k)$	$5x_1(t_k) + x_2(t_k)$
1	- 0.01	0.5828021018	3.260279515	3.843081617	3.260279515
2	- 0.11	0.5970820203	1.545735484	2.142817504	4.459745993
3	- 0.21	0.6122971332	1.293903211	1.906200344	4.279313313
4	- 0.31	0.6286014379	1.174953460	1.803554898	4.236439126
5	- 0.32	0.6302991009	1.166313092	1.796612193	**4.309320282**
6	- 0.33	0.6320098820	1.158091600	1.790101482	4.309587104
7	- 0.34	0.6337340285	1.150260011	1.783994040	4.310309421
8	- 0.35	0.6354717961	1.142792181	1.778263977	4.311462323
9	- 0.36	0.6372234490	1.135664453	1.772887902	4.313023433
10	- 0.37	0.6389892608	1.128855360	1.767844621	4.314972605
11	- 0.38	0.6407695144	1.122345376	1.763114890	4.317291680
12	- 0.39	0.6425645030	1.116116696	1.758681199	4.319964268
13	- 0.40	0.6443745303	1.110153049	1.754527579	4.322975564
14	- 0.41	0.6461999112	1.104439534	1.750639445	4.326312186
15	- 0.51	0.6653767445	1.058525923	1.723902668	4.289525479
16	- 0.61	0.6865478929	1.027618247	1.714166140	4.354501969
17	- 0.71	0.7103700492	1.007406764	1.717776813	4.440146228
18	- 0.81	0.7380052769	0.9961511698	1.734156447	4.548001416
19	- 0.91	0.7719538507	0.9775830704	1.749536921	4.667609454
20	- 1.01	0.8206625498	0.9420885500	1.762751100	4.801857804

Литература

1. *Лаврентьев М.А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – 5. – С. 159 – 245.
2. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Дженкинс Дж.А.* Однолистные функции и конформные отображения. –М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
4. *Дубинин В.Н.* Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного. // Владивосток “Дальнаука” ДВО РАН – 2009. – 390 с.
5. *Дубинин В.Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного// Успехи мат. наук. – 1994. – 49, № 1 (295). – С. 3–76.

6. *Дубинин В.Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении// Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – 168. – С. 48–66.
7. *Кузъмина Г.В.* Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы// Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2001. – **276**. – С. 253–275.
8. *Ковалев Л.В.* К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности // Дальневосточный матем. сборник. – 1996. – 2. – С. 96–98.
9. *Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту матем. НАН України. – 2008. – 308 с.
10. *Бахтин А.К., Денега И.В.* Некоторые оценки функционалов для N-лучевых систем точек // Теорія наближення функцій та суміжні питання / Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – Т. 8, № 1. – С. 12–21.
11. *Бахтін А.К., Бахтіна Г.П., Вьюн В.Є.* Про деякі нерівності в теорії неперетинних областей // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – 2014. – Т. 11, № 1. – С. 141–152.
12. *Denega I.V., Targonskii A.L.* Separating problem on extermal decomposition of the complex plane // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – 2017. – Т. 14, № 1. – С. 147–152.

References

1. Lavrent'ev, M.A (1934). On the theory of conformal mappings. *Travaux Inst. Physico-Math. Stekloff Acad. Sci. USSR*, *5*, 159-245.
2. Goluzin, G.M. (1969). *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable.* Translations of Mathematical Monographs, no. 26, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
3. Jenkins, J.A. (1958). *Univalent functions and conformal mapping.* Ergeb. Math. Grenzgeb. Neue Folge, vol. 18, Reihe: Moderne Funktiontheorie, Springer-Verlag.
4. Dubinin, V.N. (2009). *Capacities of condensers and symmetrization in geometric function theory of complex variables.* Dal'nayka, Vladivostok, 390 (in Russian).
5. Dubinin, V.N. (1994). Symmetrization in the geometric theory of functions of a complex variable. *Uspekhi Mat. Nauk*, *49*(1), 3-76 (in Russian). Translation in (1994) *Russian Math. Survey*, 49(1), 1-79.
6. Dubinin, V.N. (1988). The separating transformation of domains and problems on the extremal partition. *Analytical theory of numbers and theory of functions. Part 9, Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, *168*, 48-46 (in Russian). Translation in (1991) *J. Soviet Math.*, 53(3), 252-263.
7. Kuzmina, G.V. (2001). Problems of extremal decomposition of the Riemann sphere. *Analytical theory of numbers and theory of functions. Part 17, Zap. Nauchn. Sem. POMI, 276*, 253-275 (in Russian). Translation in (2003) *J. Math. Sci. (N. Y.), 118*(1), 4880-4894.
8. Kovalev L.V. (1996). On the problem of extremal decomposition with free poles on a circle. *Dal'nevost. Mat. Sb., 2*, 96-98 (in Russian).
9. Bakhtin, A.K., Bakhtina, G.P., Zelinskii, Yu.B. (2008). Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis. *Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine (in Russian).*
10. Bakhtin, A.K., Denega I.V. (2011). Some estimates of functionals for N-ray point systems. *Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr., 8*(1), 12-21 (in Russian).
11. Bakhtin, A.K., Bakhtina, G.P., Vjun, V.E. (2014). On some inequalities in the theory of disjoint domains. *Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr., 11*(1), 141-152 (in Ukrainian).
12. Denega, I.V., Targonskii, A.L. (2017). Separating problem on extremal decomposition of the complex plane. *Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr., 14*(1), 147-152.

A.K. Bakhtin, I.Ya. Dvorak

The problem of extreme decomposition of the plane.

Considered here is one quite general problem about the description of extremal configurations maximizing the product of inner radii mutually non-overlapping domains the next following form:

$$J_n(\gamma) = [r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k), \qquad (1)$$

where $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ – n-radial points system, B_0, B_∞, $\{B_k\}_{k=1}^n$ – set of systems of mutually disjoint domains, ($a_0 = 0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$), achieved for some configuration of domains B_0, B_k, B_∞ and points a_0, a_k, ∞, $k = \overline{1,n}$. The functional (1) evaluation for the first time was obtained in 1988 by V.M. Dubinin [6] for $\gamma = \frac{1}{2}$ и $n \geqslant 2$ for systems of disjoint domains using symmetrization method. A special case, when domains are univalent, was examined by G.V. Kuzmina in [7] After the result of V.M. Dubinin in the general formulation for the arbitrary multiply-concted domains was not until 2017. In 2017 in the work of I. Dengi, A. Targonsky [12] was the result for $\gamma_n = 0.08n^2$, $n \geq 7$. The result was obtained through a lower bound of $min_t(n-1)x_1 + x_2$, where $x_1(t)+x_2(t)$ is the equation $F'(x) = t$ solution, $F'(x) = 4x\ln(x) - 2(x-1)\ln|x-1| - 2(x+1)\ln(x+1) + \frac{2}{x}$, $y_0 \leqslant t < 0$, $y_0 \approx -1,0599$. In this paper, a much better estimate of $min_t(n-1)x_1 + x_2$ was obtained through a lower bound with the specified parameters. On the basis of this, the article succeeded in obtaining an estimate of the maximum of the functional (1) over a larger interval of the parameter γ, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $n \geq 7$. Received the result for for any points of the circle $|a_k| = R$, $k = \overline{1,n}$, and any pairwise disjoint systems of domains B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$.

Keywords: *inner radius, non-overlapping domains, n-radial system of points, "control" functional, quadratic differential.*

О.К. Бахтін, І.Я. Дворак

Задача про екстремальне розбиття площини.

В даній роботі вивчається одна загальна проблема про описання екстремальних конфігурацій, які максимізують добуток внутрішніх радіусів областей, що не перетинаються наступного виду $J_n(\gamma) = [r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)$ при $\gamma > 0$, $n \geqslant 2$, на множині всіх систем взаємно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, таких, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, $a_0 = 0 \subset B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \subset B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$.

Ключові слова: *внутрішній радіус, області, що не перетинаються, n-променева система точок, "керуючий" функціонал, квадратичний диференціал.*

Институт математики НАН Украины, Киев
`dvorakinna@gmail.com`

Получено 04.11.2018