КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.6; 532.5

С.А. ДОВГИЙ, А.В. ФЛОМБОЙМ, Д.И. ЧЕРНИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТРУЙНЫХ ЭФФЕКТОВ

Построена математическая модель трехмерной нестационарной затопленной струи. Численная модель границы струи позволяет учитывать, как проявление вихреобразования на конце струи, так и эффекта инверсии струи. С помощью компьютерного моделирования показано проявление эффекта инверсии для затопленных струй в средах с равной плотностью. Показано, что инверсия в струях возникает независимо от вихреобразования вне затопленной струи.

Введение. Явление «кроссовера» – инверсии поперечного сечения струи хорошо наблюдаемо только для сред разной плотности: например, водяная струя в воздухе [1 – 2]. В отличие от жидких струй в газе, эффект инверсии затопленных струй имеет исключительно динамическую природу. Однако, результатов исследований явления инверсии затопленных струй авторами не обнаружено. Исследования инверсии струй в среде с равной плотностью (затопленных струй) осложняются нестационарными эффектами формирования вихревых структур в конце струи.

1. Постановка задачи. Рассматривается нестационарное истечение жидкости из насадка (конфузора) в спутный поток – затопленная струя (рис. 1).

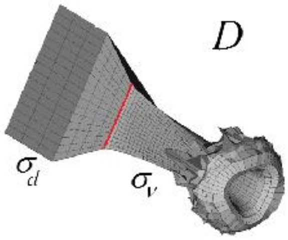

РИС. 1. Схема формирования струи

Струя формируется на выходном срезе конфузора σ_d и отделяется от окружающей ее среды вихревой поверхностью σ_ν – границей разрыва касательных скоростей. Плотность жидкости в струе такая же, как и в окружающем ее пространстве.

Для потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости в области D вне границ: σ_d – поверхности насадка, σ_ν – вихревых поверхностей в струе, ставится следующая задача для нахождения потенциала φ, для которого скорость $\vec{V} = \nabla\varphi$:

$$t \geq t_0: \ \Delta\varphi = 0 \text{ в } D, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \sigma_d, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = W_c, \tag{3}$$

в выходном сечении конфузора σ_d с краевыми условиями на неизвестной свободной границе:

$$\left.\frac{\partial\varphi^+}{\partial n}\right|_{r_\nu} = \left.\frac{\partial\varphi^-}{\partial n}\right|_{r_\nu}, \text{ для } \vec{r} = \vec{r}_v \in \sigma_v(t), \tag{4}$$

$$\left.\frac{d}{dt}\left(\varphi^+ - \varphi^-\right)\right|_{r_\nu} = 0, \text{ для } \vec{r} = \vec{r}_v \in \sigma_v(t), \tag{5}$$

$$\lim_{|r - r_\sigma| \to \infty} \nabla\varphi = \vec{U}_\infty, \tag{6}$$

$$t = t_0: \ \sigma_d(t_0), \left.\varphi^+\right|_{t=t_0} = \varphi_0^+. \tag{7}$$

Решение φ задачи рассматривается в классе $C^2(D(t)) \cap C^1(\bar{D}(t))$, т. е.

$$|\nabla\varphi| < \infty. \tag{8}$$

Условие (8) эквивалентно условию Кутта – Жуковского, выполнение которого на кромках конфузора σ_d обеспечивает гладкость сопряжения границ σ_d и σ_ν, за счет возникающего острых кромках – окончаниях и изломах контура σ_d новых элементов свободной границы σ_ν (в соответствии с условием Бриллюэна – Вилла [3]). Следует отметить, что задача (1) – (8), с условиями Неймана (2) – (3) на σ_d, с условиями Неймана (4) и с дифференциальным условием типа Дирихле (5), на σ_ν, а так же с условиями (6) на ∞ является внешней нелинейной задачей со свободной, подвижной границей σ_ν. Особенность таких задач состоит в том, что на неизвестной свободной границе, для ее определения, задаются сразу два условия (4) – кинематическое и (5) – следствие динамического условия. Движение, неизвестной свободной границы σ_ν, определяется полем скоростей, определяемого из решения задачи (1) – (8).

Форма области $\bar{D}(t)$ определяется изменяющейся во времени геометрией общей границы $\sigma(t) = \sigma_d + \sigma_v(t)$. Где положение и форма свободной границы$\pm_v(t)$ находится из решения задачи Коши для частиц $\vec{r}_v = (x_v(t), y_v(t), z_v(t)) \in \sigma_v$:

$$\frac{d\vec{r}_v}{dt} = \vec{W}_v(\vec{r}_v, t), \tag{9}$$

с начальными условиями при

$$t = t_0 : \ \sigma_v(t_0) = \sigma_{0v}, \tag{10}$$

где правая часть

$$\vec{W}_v(\vec{r}_v, t) = \frac{1}{2}(\nabla\varphi^+(\vec{r}_v, t) + \nabla\varphi^-(\vec{r}_v, t)) \tag{11}$$

удовлетворяет условию (4) и определяется из решения задач (1) – (10).

Решение задач (1) – (11), в выделенном классе функций (8) возможно при гладком сопряжении границ, которое обеспечивается учетом основного фактора физического процесса – отрыва потока от кромок конфузора, удовлетворяющего критерию Бриллюэна – Вилла: поверхность разрыва скоростей $\sigma_v(t)$, формирующаяся на кромке конфузора σ_d имеет касательную совпадающую с касательной к поверхности конфузора. В силу требований (8), условие Кутта – Жуковского выполняется при возникновении отрывов на всех кромках границ σ_d.

Решение задач (1) – (11) относительно потенциала $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$, в деформирующейся области $D(t)$ (с подвижной границей $\sigma(t) = \sigma_d + \sigma_v(t)$), позволяет определить распределение давления в области течения и вычислять динамические характеристики на ее границах, используя интегральное соотношение Коши – Лагранжа:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla\varphi)^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{\partial\varphi_\infty}{\partial t} + \frac{U_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho}. \tag{12}$$

2. Математическая модель. Решение задачи (1) – (11) для потенциала и скорости, в любой момент времени, может иметь интегральное представление

$$\varphi(x, y, z, t) = u_\infty x + v_\infty y + w_\infty z +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\sigma_d(t)} g_d(x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma, t)\frac{\partial}{\partial n_\sigma}\left(\frac{1}{r_\sigma}\right)d\sigma + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\sigma_v(t)} g_v(x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma, t)\frac{\partial}{\partial n_\sigma}\left(\frac{1}{r_\sigma}\right)d\sigma. \tag{13}$$

$$\vec{V}(x, y, z, t) = \vec{U}_\infty +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\nabla\iint\limits_{\sigma_d(t)} g_d(x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma, t)\frac{\partial}{\partial n_\sigma}\left(\frac{1}{r_\sigma}\right)d\sigma +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\nabla\iint\limits_{\sigma_v(t)} g_v(x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma, t)\frac{\partial}{\partial n_\sigma}\left(\frac{1}{r_\sigma}\right)d\sigma, \tag{14}$$

где $\vec{V}_\infty = (u_\infty, v_\infty, w_\infty)$, а поверхности интегрирования – это поверхность конфузора σ_d и поверхность разрыва касательной составляющей скорости σ_v.

Поверхность σ_v, как бы, «растет» из поверхности σ_d, т. е. в точках $(x_{\sigma_d}, y_{\sigma_d}, z_{\sigma_d}) = (x_{\sigma_v}, y_{\sigma_v}, z_{\sigma_v})$, вдоль линий гладкого сопряжения поверхностей σ_d и σ_v значения подинтегральных функций совпадают:

$$g_d(x_{\sigma_d}, y_{\sigma_d}, z_{\sigma_d}, t) = g_v(x_{\sigma_v}, y_{\sigma_v}, z_{\sigma_v}, t).$$

Решение для потенциала и вектора скорости в любой момент времени t зависит от значения подинтегральных выражений и формы эволюционирующих поверхностей интегрирования. Для получения решения начально-краевой задачи (1) – (11) в форме (13), (14) необходимо одновременное решение интегрального уравнения, определяющего распределение функции $g_d(x_{\pm_d}, y_{\pm_d}, z_{\pm_d}, t)$ на обтекаемой детерминированной поверхности $\pm_d$ и решения задачи Коши для определения эволюции поверхности $\pm_v$. Интегральное уравнение – это следствие условия непроницаемости (2) во всех точках $(x_{\pm_0}, y_{\pm_0}, z_{\pm_0})$ поверхности $\pm_d$:

$$\frac{1}{4\pi}\nabla \iint\limits_{\sigma_d(t)} g_d(x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma, t)\frac{\partial}{\partial n_0}\frac{\partial}{\partial n_\sigma}\left(\frac{1}{r_\sigma}\right)d\sigma =$$

$$= -(\vec{V}_\infty \cdot \vec{n}_0) - \frac{1}{4\pi}\nabla \iint\limits_{\sigma_v(t)} g_v(x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma, t)\frac{\partial}{\partial n_0}\frac{\partial}{\partial n_\sigma}\left(\frac{1}{r_\sigma}\right)d\sigma. \qquad (15)$$

Уравнение (15) решается численно, совместно с задачей Коши (9) – (11) для $\pm_v$:

$$\frac{d\overrightarrow{r_{\sigma_v}}}{dt} = \vec{W}(\vec{r}_{\sigma_v}(t), t), \quad \vec{r}_{\sigma_v}(t_0) = \vec{r}_0, \qquad (16)$$

где для правой части (16) имеем представление (11).

3. Дискретизированная модель. Для получения численного решения задачи (1) – (7) и (9) – (11) выполняется дискретизация поверхностей σ_v и σ_d, состоящая в разбиении поверхностей на граничные элементы.

Для численного решения интегрального уравнения (15) используется одна из разновидностей метода граничных элементов – метод дискретных вихревых рамок [1, 2, 5, 6]. Дискретизация интегральных представлений (13), (14) на поверхностях σ_v и σ_d (рис. 2), приводит выражение для градиента потенциала двойного слоя (14) к сумме интегралов по элементарным контурам (закон Био-Савара):

$$\vec{V}_j(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\sigma_j} \nabla \frac{\partial}{\partial n_\sigma}\left(\frac{1}{r_\sigma}\right)d\sigma = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial\sigma_j} \frac{d\vec{r}_\sigma \times \vec{r}_\sigma}{r_\sigma^3}. \qquad (17)$$

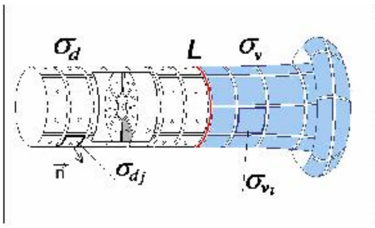

РИС. 2. Схема дискретизации конфузора и границы струи

При такой дискретизации (рис. 2) представление для вектора скорости (14) имеет вид:

$$\vec{V}(x,y,z,t)=\vec{U}_\infty+\sum_{j=1}^{M_d}\Gamma_j(t)\vec{V}_j(x,y,z,t)+\sum_{i=1}^{M_v(t)}\Gamma_i\vec{V}_i(x,y,z,t), \quad (18)$$

что позволяет заменить интегральное уравнение (11) для любого момента времени t на систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных интенсивностей Γ_j – вихревых трубок окаймляющих j-й граничный элемент σ_{dj}.

$$\sum_{j=1}^{M_d}\Gamma_j(t)(\vec{n}(x_k,y_k,z_k)\cdot\vec{V}_j(x_k,y_k,z_k,t))=$$
$$=-(\vec{n}(x_k,y_k,z)\vec{V}_\infty)-\sum_{i=1}^{M_v(t)}\Gamma_i(\vec{n}(x_k,y_k,z_k)\cdot\vec{V}_i(x_k,y_k,z_k,t))$$
$$k=\overline{1,M_d}. \quad (19)$$

Перемещение и деформация поверхности σ_v, определяются перемещением угловых точек каждого i-го граничного элемента σ_{vi}, находящихся из решения задачи Коши (9) – (11) (например, методом Эйлера):

$$\vec{r}_{\sigma_v}(t_{n+1})=\vec{r}_{\sigma_v}(t_n)+\vec{W}(\vec{r}_{\sigma_v}(t_n))dt,\quad \vec{r}_{\sigma_v}(t_0)=\vec{r}_{0\sigma_v}. \quad (20)$$

В процессе эволюции поверхность σ_v «растет» и существенно деформируется. Деформация граничных элементов вызывает неравномерность разбиения σ_v на струе, что может проявиться в нарушении гладкости, при сворачивании поверхности σ_v в вихревую структуру.

Важным фактором является изначальное корректное разбиение поверхности σ_d. Под корректно построенным разбиением для σ следует понимать построение адаптивной сетки с учетом локальных геометрических параметров – локальных кривизн моделируемых поверхностей (т. е. размер граничного элемента должен быть одного порядка с минимальной локальной кривизной фрагмента моделируемой поверхности).

Результаты вычислительного эксперимента. Далее приведены результаты [8 – 10] численного моделирования формирования струй истекающих в затопленное пространство из конфузоров, с разным сечением выходного отверстия. Эволюция струи представлена сравнением ее формы в разные расчетные моменты времени.

Несмотря на вычислительные искажения при моделировании гладкого сворачивания вихревой границы струи, выходящей их конфузоров с различным сечением, при компьютерном «удалении» вихря (вихрь становится прозрачным), явно видно проявление инверсии струй разного сечения.

На рис. 9 в каталогизированном виде представлено проявление эффекта инверсии струй. Прозрачность вихревой структуры в конечной части струи (за счет компьютерного «удаления» вихревой структуры) выявило устойчивое изменение сечения струи – проявление эффекта инверсии струй. Эффекты вязкости при численном моделировании не учитывались. При уменьшении сжимающего эффекта в насадке, степень проявления инверсии ослабляется. Соотношение скорости в струе и скорости течения в затопленном пространстве W_c / U_∞, в вычислительном эксперименте (рис. 3 – 9) составляет 2/1 – 4/1.

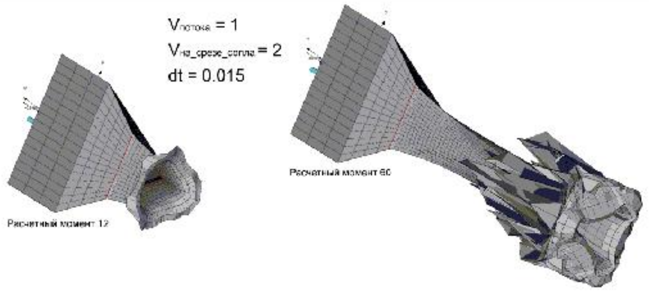

РИС. 3. Инверсия для затопленных струй. Треугольный срез конфузора

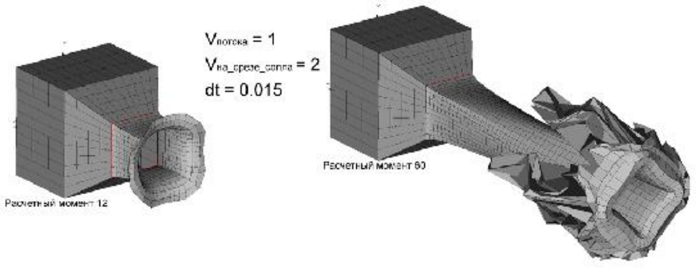

РИС. 4. Инверсия для затопленных струй. Квадратный срез конфузора

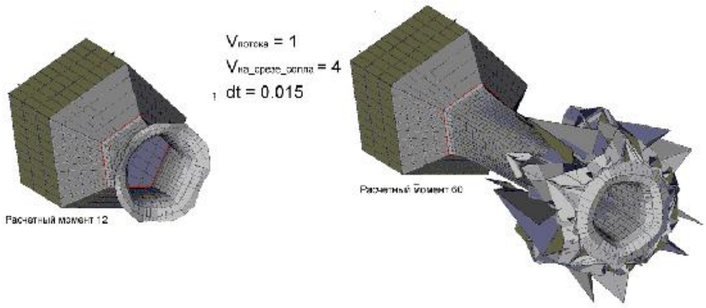

РИС. 5. Инверсия для затопленных струй. Пятиугольный срез конфузора

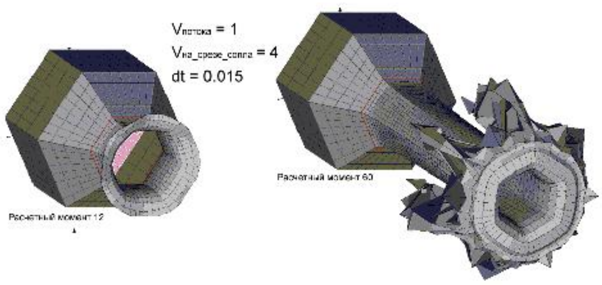

РИС. 6. Инверсия для затопленных струй. Шестиугольный срез конфузора

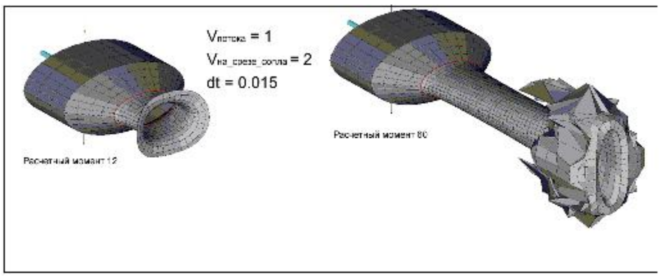

РИС. 7. Инверсия для затопленных струй. Эллиптический срез конфузора

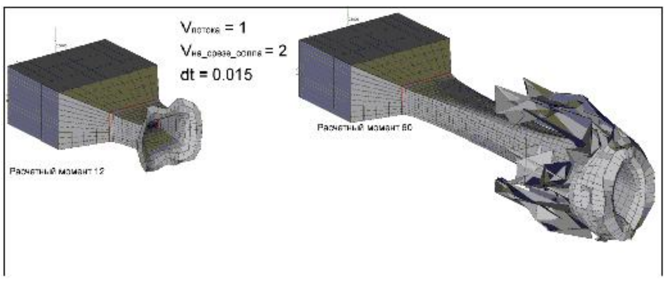

РИС. 8. Инверсия для затопленных струй. Прямоугольный срез конфузора

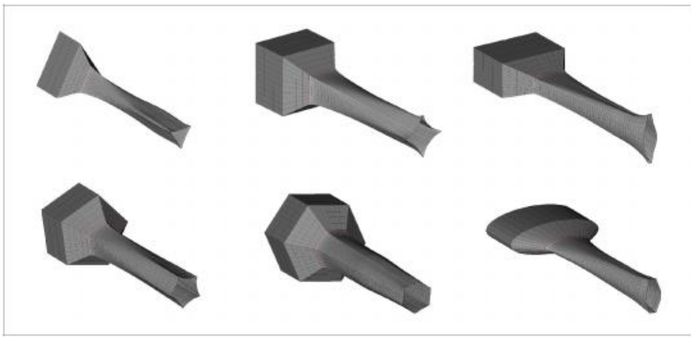

РИС. 9. Сравнительное представление проявления эффекта инверсии для затопленных струй, истекающих из отверстий конфузоров различной формы

Выводы. Моделирование формирования и эволюции затопленной струи осуществлялось методом вихревых рамок [8 – 10]. Показано, что эффект инверсии проявляется не только для жидких струй истекающих в газ, но и для затопленных струй в средах с равной плотностью. Инверсия струи возникает при нестационарном и вихреобразовании в затопленной струе. На рис. 2 представлен процесс формирования струи с концевым вихрем. Компьютерное «удаление вихрей» – прозрачность вихревой структуры в конечной части струи, выявило сохранение устойчивого течения под ней и проявление эффекта инверсии. Эффекты вязкости при численном моделировании не учитывались. При уменьшении поджатия струи в конфузоре степень проявления инверсии ослабляется.

С.О. Довгий, О.В. Фломбойм, Д.І. Черній

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВИХ СТРУМЕНЕВИХ ЕФЕКТІВ

Побудовано математичну модель тривимірної нестаціонарної затопленого струменя. Чисельна модель кордону струменя дозволяє враховувати як прояв вихреутворення на кінцівці струменя, так і ефекту інверсії струменя. За допомогою комп'ютерного моделювання показано прояв ефекту інверсії для затоплених струменів у середовищах з рівною щільністю. Показано, що інверсія в струмені виникає незалежно від вихреутворення поза затопленим струменем.

S.O. Dovgyi, O.V. Flomboim, D.I. Cherniy

MATHEMATICAL MODELING OF JET EFFECTS

A mathematical model of a three-dimensional non-stationary flooded jet is constructed. The numerical model of the jet boundary allows one to take into account both the manifestation of the vortex formation at the end of the jet and the effect of the jet inversion. With the help of computer simulation the manifestation of the inversion effect for flooded jets in media with equal density is shown. It is shown that the inversion in jets arises independently of the vortex formation outside the submerged jet.

1. *Абукаиров Т.О., Белоцерковский С.М., Желанников А.И., Ништ М.И.* Нелинейная теория крыла и ее приложения. Алматы: «Галым», 1997. 448 с.
2. *Бабкин В.И., Белоцерковский С.М., Гуляев В.В., Дворак А.В.* Струи и несущие поверхности. *Моделирование на ЭВМ.* М.: «Наука», 1989. 208 с.
3. *Биркгоф Г., Сарантонелло Э.* Струи,следы и каверны. М.: «Мир», 1964. 466 с.
4. *Гиневский А.С., Желанников А.И.* Вихревые следы самолетов. М.: «ФИЗМАТЛИТ», 2008. 172 с.
5. *Довгий С.А., Лифанов И.К.* Методы решения интегральных уравнений. К. «Наукова думка», 2002. 343 с.
6. *Сарпкайя Т.* Вычислительные методы вихрей. Современное машиностроение. Серия А, № 10. 1989. С. 1 – 60.
7. *Труды* ВВИА имени профессора Н.Е. Жуковского. Выпуск 1313. М.: Издание академии, 1986. 504 с.
8. *Фломбойм О.В., Черній Д.І.* Обчислювальні особливості моделювання струменевих ефектів та вихрових структур. Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. Київ: КУ-2008. Вип. 2. С. 124 – 129.
9. *Фломбойм А.В., Довгий С.А., Черний Д.И.* Моделирование эффекта «кроссовера» для затопленных струй. Труды XIV Международного симпозиума «*Методы дискретных особенностей в задачах математической физики*» (МДОЗМФ-2009). Часть 2. Харьков – Херсон, 2009. С. 440 – 442.
10. *Фломбойм А.В., Черний Д.И.* Вычислительные технологии моделирования эффекта «кроссовера» для затопленных струй. Матеріали III Міжнародної конференції «*Обчислювальна та прикладна математика*», присвяченої пам'яті академіка НАН України І.І. Ляшка. Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 11 – 12 вересня 2009. С. 67.

Получено 10.02.2017

Об авторах:

Довгий Станислав Алексеевич,

доктор физико-математических наук, член-корреспондент НАН Украины,
профессор, заведующий отделом физического и математического моделирования
Института телекоммуникаций и глобального информационного пространства НАН Украины,

Фломбойм Алексей Вячеславович,

младший научный сотрудник отдела физического и математического моделирования
Института телекоммуникаций и глобального информационного пространства НАН Украины,

Черний Дмитрий Иванович,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики
факультета компьютерных наук и кибернетики
Киевского национального университета имени Тараса Шевченко.