КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.9:519.6

А.В. ГЛАДКИЙ, Ю.А. ГЛАДКАЯ

ОБ ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ С НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Предлагается подход к численному моделированию акустических полей в подводных неоднородных волноводах, использующий явные разностные схемы для решения волнового параболического уравнения типа Шредингера. Рассмотрены вопросы построения и исследования устойчивости явной трехслойной разностной схемы с комплекснозначным несамосопряженным оператором. Установлено энергетическое тождество, а также получено условие устойчивости.

Введение. В настоящее время при исследовании акустических полей в океанических и атмосферных волноводах важную роль играют методы математического моделирования [1 – 6].

Акустические процессы гармонических источников описываются краевыми задачами для эллиптического волнового уравнения Гельмгольца в ограниченных или неограниченных неоднородных областях. Один из подходов к расчету акустических полей в неограниченных областях состоит в использовании параболических уравнений, что позволяет свести решение краевых задач к решению задачи Коши для уравнений параболического типа с несамосопряженным комплекснозначным оператором.

Известно, что явные двухслойные разностные схемы решения начально-краевых задач для уравнений типа Шредингера безусловно неустойчивы.

В данной работе для численного решения волнового уравнения типа Шредингера предлагается подход к построению и исследованию устойчивости явных трехслойных разностных схем с комплекснозначным несамосопряженным оператором.

Постановка задачи. В рамках параболического приближения акустическое поле в осесимметрическом волноводе

$$G = \{ \ r_0 < r < \infty, 0 < z < L, r_0 > 0 \ \},$$

где (r, z) – цилиндрические кординаты и ось z направлена вертикально вниз, будем описывать начально-краевой задачей для волнового уравнения типа Шредингера с комплексным несамосопряженным оператором [2, 3]:

$$2ik_0 \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{n(r,z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right) + 2k_0^2\left(n(r,z) - 1 + i\upsilon(r,z) + \mu(r,z)\right)p = 0 . \qquad (1)$$

Здесь $p(r,z)$ – комплекснозначное решение, $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, $k_0 = \omega / c_0$ – волновое число, ω – частота, $n(r,z) = c_0 / c(r,z)$, $\upsilon(r,z) \geq 0$ – непрерывные достаточно гладкие функции (коэффициенты преломления и поглощения соответственно)

$$\mu(r,z) = \frac{1}{4k_0^2}(n_z^2 / n^3 - n_{zz} / n^2), \quad n_z = \partial n / \partial z, \; n_{zz} = \partial^2 n / \partial z^2 .$$

Дифференциальное уравнение (1) является базовым для определения дальнего комплекснозначного акустического давления $P(r,z)$, создаваемого гармоническими источниками. Это давление удовлетворяет уравнению Гельмгольца и при $k_0 r >> 1$ представляется в виде $P(r,z) = H_0^{(1)}(k_0 r)\, p(r,z)$, где $H_0^{(1)}(\cdot)$ – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка. Для волн, распространяющихся в направлениях, близких к горизонтальному, комплекснозначная амплитуда $p(r,z)$ удовлетворяет псевдодифференциальному уравнению [2 – 5]

$$\frac{\partial p}{\partial r} + ik_0(E - (E + Q)^{1/2})\,p = 0, \qquad (2)$$

где E – единичный оператор, а оператор Q определяется по формуле

$$Qp = ((n^2(r,z) - 1)E + \frac{1}{k_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2})\,p .$$

Подставляя в уравнение (2) приближенное выражение оператора корня квадратного в виде

$$(E + Q)^{1/2} \cong n(r,z) + \frac{1}{2k_0^2}\left(\frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial z}) + \frac{1}{2}(\frac{n_z^2}{n^3} - \frac{n_{zz}}{n^2})\right),$$

получаем параболическое волновое уравнение (1), которое используется для исследования одночастотного распространения звука в волноводах с произвольной зависимостью показателя преломления от глубины.

Далее будем рассматривать начально-краевую задачу для уравнения (1), ограничиваясь средой без потерь и мягкими границами волновода:

$$2ik_0 \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{n(r,z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right) + 2k_0^2\left(n(r,z) - 1 + \mu(r,z)\right)p = 0, \; (r,z) \in G, \qquad (3)$$

$$p_{|z=0} = 0, \; p_{|z=H} = 0 \,, r_0 \leq r < \infty, \qquad (4)$$

$$p(r_0, z) = u(z), \, 0 < z < L . \qquad (5)$$

Разностная схема. На сетке

$$\overline{\omega}_{\tau h} = \overline{\omega}_{\tau} \times \overline{\omega}_{h} = \omega_{\tau h} \cup \gamma_{\tau h},\ \omega_{\tau h} = \omega_{\tau} \times \omega_{h},$$

$$\overline{\omega}_{h} = \{z = z_k = kh,\ k = \overline{0, N},\ h = L / N\},\ \overline{\omega}_{\tau} = \{r = r_m = r_0 + m\tau,\ m = 0,1,2,...,\},$$

$$\omega_{\tau} = \{r = r_m = r_0 + m\tau,\ m = 1,2,...,\},\ \omega_{h} = \{z = z_k = kh,\ k = \overline{1, N-1},\ h = L / N\},$$

дифференциальную задачу (3) – (5) аппроксимируем с точностью $O(\tau^2 + h^2)$ явной трехслойной разностной схемой

$$2ik_0 y_{\overset{\circ}{r}} + (a y_{\bar{z}})_z - d(z,r) y = 0,\ (z,r) \in \omega_{\tau h}, \tag{6}$$

$$y(z,0) = y_0(z),\ z \in \omega_h, \tag{7}$$

$$y(0,r) = 0,\ y(L,r) = 0,\ r \in \omega_{\tau}. \tag{8}$$

Здесь $d(r,z) = 2k_0^2\left(1 - n(r,z) - \mu(r,z)\right)$ и приняты такие обозначения теории разностных схем [7]:

$$y = y(r_m, z_k) = y_k^m = y^m = y_k,\ y_{\overset{\circ}{r}} = (y^{m+1} - y^{m-1}) / 2\tau,$$

$$y_z = (y_{k+1} - y_k) / h,\ y_{\bar{z}} = (y_k - y_{k-1}) / h,$$

$$(a y_{\bar{z}})_z = \frac{1}{h^2}\left(a_{k+1} y_{k+1}^m - (a_{k+1} + a_k) y_k^m + a_k y_k^m\right),\ \ a_k = a(z) = \frac{1}{n(r_m, z_{k-1/2})}.$$

Отметим, что при расчетах необходимо иметь значение решения $y(\tau, z)$, $z \in \omega_h$, которое можно получить каким-либо другим методом.

Перейдем к анализу устойчивости разностной схемы (6) – (8). Пусть H_h – пространство сеточных комплекснозначных функций, заданных на $\overline{\omega}_h$ и равных нулю при $z = 0, z = L$. Сеточная функция $y = y(r)$ определена на $\overline{\omega}_{\tau}$ со значениями в $H_h : y(r) = \left\{y(r,z),\ z \in \overline{\omega}_h\right\},\ y^m = y(r_m)$.

Введем скалярные произведения и нормы в H_h:

$$(y, v) = (y^m, v^m) = \sum_{z \in \omega_h} h y \bar{v},\ \ \|y\| = (y, y)^{1/2}, \tag{9}$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Введем далее гильбертово пространство $H_h^2 = H_h \oplus H_h$ как прямую сумму, т. е. элементами пространства H_h^2 являются векторы вида $y_m = (y^m, y^{m+1})$, $y^m, y^{m+1} \in H_h$ с покоординатными операциями сложения и умножения.

Устойчивость трехслойной схемы (6) – (8) будем изучать в энергетическом пространстве H_D^2 с метрикой, порожденной некоторым (возможно зависящим от *r*) самосопряженным положительным оператором $D = D_m = D(r_m)$:

$$(y,v)_D = (Dy,v),\ \|y\|_D = (y,y)_D^{1/2},\ y,v \in H_h^2.$$

Следуя [7], под устойчивостью по начальным данным будем понимать выполнение оценки $(D_{m+1}y_{m+1}, y_{m+1}) \le \rho^2 (D_m y_m, y_m), m = 0,1,2,...,$ где величина ρ^m равномерно ограничена константой, не зависящей от параметров сетки.

Пусть самосопряженный и неотрицательный оператор D_m, действующий в пространстве H_h^2, – квадратная операторная матрица второго порядка

$$D_m = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 E & \frac{1}{2}\alpha A \\ \frac{1}{2}\bar{\alpha} A & |\alpha|^2 E \end{pmatrix},$$

где оператор A определяется выражением $Ay = -(ay_{\bar{z}})_z + d(z,r)y,\ y \in H_h$. Легко видеть, что действующий в пространстве H_h^2 оператор D_m порожден квадратичной формой

$$J_m = \left\|\alpha y^{m+1} + \frac{1}{2} A y^m\right\|^2 + \left(\left(|\alpha|^2 E - \frac{1}{4}A^2\right) y^m, y^m\right).$$

Пользуясь разностными формулами Грина [7], легко установить, что оператор A самосопряжен в смысле скалярного произведения (9), а разностный оператор $Cy = -(ay_{\bar{z}})_z,\ y \in H_h$ – положительно определенный. Учитывая условия $0 < c_1 \le a(r,z) \le c_2$, получаем неравенства

$$\frac{8c_1}{L^2}\|y\|^2 \le (Cy,y) \le \frac{4c_2}{h^2}\|y\|^2,$$

означающие положительную определенность оператора C при каждом фиксированном r_m.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Для решения разностной схемы (6) – (8) имеет место энергетическое тождество

$$(D_m y_m, y_m) = (D_m y_{m-1}, y_{m-1}),\ y_m,\ y_{m-1} \in H_h^2.$$

Для доказательства перепишем задачу (6) – (8) в операторной форме

$$\alpha y^{m+1}+\bar{\alpha} y^{m-1}+Ay^{m}=0,\, r\in\omega_r,\quad \alpha=-ik_0/\tau, \tag{10}$$

где y^0, y^1 заданы, $y^m=y(r_m)\in H_h$.

Запишем уравнение (10) в виде

$$\alpha y^{m+1}+\frac{1}{2}Ay^m=-(\bar{\alpha} y^{m-1}+\frac{1}{2}Ay^m)$$

и возведем скалярно обе части равенства в квадрат. Тогда, учитывая самосопряженность оператора A, свойства $(Ay^m,\bar{\alpha} y^{m-1})=\alpha\left(Ay^m,y^{m-1}\right)=\left(\alpha y^m,Ay^{m-1}\right)$, получим тождество, которое можно переписать так:

$$\left\|\alpha y^{m+1}+\frac{1}{2}Ay^m\right\|^2+\left(\left(|\alpha|^2 E-\frac{1}{4}A^2\right)y^m,\ y^m\right)=$$

$$=\left\|\alpha y^{m}+\frac{1}{2}Ay^{m-1}\right\|^2+\left(\left(|\alpha|^2 E-\frac{1}{4}A^2\right)y^{m-1},\ y^{m-1}\right).$$

Это означает, что квадратичная форма J_m неотрицательна при выполнении неравенства

$$\left(\left(|\alpha|^2 E-\frac{1}{4}A^2\right)y,y\right)\geq 0,\ \ y\in H_h. \tag{11}$$

Тогда на каждом шаге выполняется энергетическое тождество

$$\left(D_m y_m,y_m\right)=\left(D_m y_{m-1},y_{m-1}\right),\ y_m\in H_h^2,$$

которое означает, что ошибка, допущенная на некотором шаге, не возрастает.

Если в (11) выполняется строгое неравенство, то выражение $\sqrt{\left(D_m y_m,y_m\right)}$ определяет норму в пространстве H_h^2, что обеспечивает устойчивость разностной схемы (6) – (8) в этой норме. Легко видеть, что условие неотрицательности квадратичной формы (11) означает выполнение неравенства $\|A\|\leq 2|\alpha|$. Учитывая, что $\|A\|\leq 4c_2/h^2+\varepsilon_2$, $-\varepsilon_1\leq d(r,z)\leq\varepsilon_2$, $\varepsilon_1\geq 0,\varepsilon_2\geq 0$, $\varepsilon_1+\varepsilon_2\neq 0$, приходим к условию устойчивости

$$\tau\leq 2k_0h^2/(4c_2+\varepsilon_2h^2).$$

Выводы. Предложенный для моделирования акустических полей в подводных неоднородных волноводах подход использует явные трехслойные разностные схемы для параболического уравнения типа Шредингера. Методика легко обобщается на случай разрывной плотности, других краевых условий, позволяет повысить эффективность вычислительных процессов, используя технологию параллельных вычислений.

А.В. Гладкий, Ю.А. Гладка

ПРО ОДНУ РІЗНИЦЕВУ СХЕМУ З НЕСАМОСПРЯЖЕНИМ ОПЕРАТОРОМ

Розглядається задача чисельного моделювання акустичних полів на основі хвильового параболічного рівняння типу Шредінгера. Запропонована явна тришарова різницева схема з комплексним несамоспряженим оператором, досліджена її стійкість та отримана умова стійкості.

A.V. Gladky, J.A. Gladka

ABOUT A DIFFERENCE SCHEME WITH NON-SELF-CONJUGATE OPERATOR

The problem of acoustic field numerical modeling on the basis of Schrödinger-type parabolic wave equation is considered. The three-layer explicit difference scheme with a complex non-self-conjugate operator is proposed. Its stability is investigated and stability condition is obtained.

1. *Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 264 с.
2. *Распространение* волн и подводная акустика // Под ред. Дж. Б. Келлера и Дж. Пападакиса. М.: Мир, 1980. 230 с.
3. *Lee D., McDaniel S.T.* Ocean acoustic propagation by finite difference method. Comput. Math. Appl. 1987. **14**. P. 305 – 423.
4. *Lee D., Pierse A.D., Shang E.C.* Parabolic equation development in the twentieth century. *J. Comput. Acoust*. 2000. **1**, N 4. P. 527 – 637.
5. *Гладкий А.В., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В.* Численно-аналитические методы исследования волновых процессов. Киев: Наук. думка, 2001. 452 с.
6. *Завадский В.Ю.* Моделирование волновых процессов. М.: Наука, 1991. 248 с.
7. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 416 с.

Получено 09.04.2017

Об авторах:

Гладкий Анатолий Васильевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий лабораторией Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,
E-mail: gladky@ukr.net

Гладкая Юлия Анатольевна,
доцент Киевского национального торгово-экономического университета.
E-mail: yuliyagladkaya@hotmail.com