КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Системный анализ

Наведено умови існування рівноваг олігополій, що використовують суспільні фактори виробництва. Проаналізовано класичний приклад пошуку такої рівноваги.

УДК 519.8

В.М. ГОРБАЧУК

ОЛІГОПОЛІСТИЧНІ РІВНОВАГИ КУРНО – НЕША – ВАЛЬРАСА

Вступ. Вивчається модель рівноваги Курно – Неша – Вальраса (Cournot –Nash – Walras), де рівновага Курно – Неша визначає випуск олігополістичного ринку з некооперативними гравцями (фірмами), які поділяють певний обсяг так званого рідкісного ресурсу, потрібного для виробництва фірм, а рівновага Вальраса визначає ціну цього ресурсу [1]. Доводиться існування рівноваг Курно – Неша – Вальраса за прийнятних умов, перевіряється локальна стійкість таких рівноваг відносно малих збурень даних моделі. Показуються єдиність рівноваги Курно – Неша – Вальраса при незначних додаткових вимогах та ліпшицева залежність цієї рівноваги від даних моделі. Пропонуються деякі ефективні числові підходи обчислення зазначеної рівноваги, які ілюструються прикладами, зокрема прикладом олігополії з п'яти фірм [2]. Обчислювальна процедура зводиться до розв'язання варіаційної нерівності спеціальної структури з поліедральним обмеженням. Крім загальних числових методів, можна скористатися таким негладким методом Ньютона, як PATH [3, 4], основаним на послідовному розв'язанні афінних варіаційних нерівностей [5]. Робота [1] досліджує ринки, де гравці (агенти, фірми) поводяться некооперативно, а деякі входи їхнього виробництва є обмеженими, але можуть передаватися (є мобільними). Ці обмежені ресурси називають рідкісними (дефіцитними), які управляються деяким державним або міжнародним органом влади, що надає кожному гравцю деякий початковий запас цих ресурсів (скажімо, рибні квоти чи права на водокористування).   .

Відповідний орган влади може також регулювати норми на виробництво чи дозволи на викиди. Оскільки згадані рідкісні ресурси можуть передаватися, то після початкового розміщення їх можуть купувати чи продавати на ринку. Процес передачі ресурсів веде до рівноваги Вальраса, що вказує рівноважну ціну одиниці рідкісних ресурсів. Така ціна або нульова (якщо наявний обсяг рідкісних ресурсів перевищує попит ринку), або невід'ємна (якщо наявний обсяг рідкісних ресурсів не перевищує попиту ринку). Передача ресурсів покращує корисності всіх гравців. Робота [1] у процедурі пошуку рівноваг Неша – Вальраса виділяє дві фази: 1) гравці обчислюють рівновагу Неша, яка відповідає їхнім початковим запасам; 2) виходячи з рівноваги Неша, гравці наближаються до рівноваги Неша – Вальраса крок за кроком шляхом двосторонніх обмінів їхніми частками рідкісних ресурсів так, що загальна сума часток залишається незмінною. Ця процедура моделює реальні процеси встановлення рівноважної ціни рідкісних ресурсів.

Проте орган влади може бажати обчислювати рівновагу Неша – Вальраса за один крок, щоб дістати зворотний зв'язок щодо впливу початкового розміщення на загальне виробництво й ціну рідкісних ресурсів одночасно [6]. Аналогічно фірма може бажати дізнаватися, як зміна технології (що веде до іншого рівня споживання рідкісного ресурсу) чи зміна інших факторів виробництва впливатиме на її прибуток. Тому в роботі [6] пропонується однокрокова процедура обчислення рівноваги Неша – Вальраса без будь-яких фаз чи еволюційних процесів. Оскільки фірми приймають рішення відповідно до рівноваги Курно – Неша, то в роботі [6] застосовується поняття рівноваги Курно – Неша – Вальраса.

Почнемо з постановки задачі, огляду наявних припущень та аналізу деяких базових властивостей. Доведення існування рівноваги Курно – Неша – Вальраса не використовує поняття нормалізованої рівноваги [1] та пов'язаних з нею результатів [7, 8] і дозволяє відходити від припущення увігнутості [6]. Замість існування рівноваги Курно – Неша – Вальраса вимагається лише існування її стаціонарної точки.

Нагадаємо стандартні позначення: K – замкнутий конус з вершиною у $\vec{0}$; K^0 – негативний поляр для конуса K; $dist_A(x)$ – відстань (distance) від точки x до множини A; B – одинична куля (ball);

$Gr\,F \equiv \{(x, y) \in R^n \times R^m \mid y \in F(x)\}$ – графік (graph) мультифункції $F[R^n \to R^m]$.

Нагадаємо також деякі базові поняття сучасного варіаційного аналізу:

$T_A(\overline{x}) \equiv Lim_{\tau\downarrow 0}\sup \dfrac{A-\overline{x}}{\tau} = \{h \in R^n \mid \exists h_k \to h, \lambda_k \downarrow 0 : \overline{x} + \lambda_k h_k \in A\,\forall k\}$ – умовний (contingent) конус Булігана (Bouligand) до замкнутої множини $A \subset R^n$ у точці $\overline{x} \in A$ [9]; $\hat{N}_A(\overline{x}) \equiv (T_A(\overline{x}))^0$ – регулярний нормальний конус Фреше (Frechet) до A у $\overline{x}$;

$N_A(\bar{x}) \equiv \operatorname{Lim}\sup_{x \xrightarrow{A} \bar{x}} \hat{N}(x) = \{x^* \in R^n \mid \exists x_k \xrightarrow{A} \bar{x}, x_k^* \to x^* : x_k^* \in \hat{N}_A(x_k)$ $\forall k\}$ – граничний нормальний конус Мордуховіча до A у $\bar{x}$ [10].

Говорять, що множина A (нормально) регулярна у $\bar{x}$, якщо $N_A(\bar{x}) = \hat{N}_A(\bar{x})$. Опукла множина регулярна у будь-якій своїй точці.

Позначимо

$$D^*\Phi(\bar{x}, \bar{y})(y^*) \equiv \{x^* \in R^n \mid (x^*, -y^*) \in N_{Gr\Phi}(\bar{x}, \bar{y})\}$$

граничну копохідну (coderivative) Мордуховіча мультифункції $\Phi[R^n \to R^m]$ у точці $(\bar{x}, \bar{y}) \in Gr\Phi$, де $Gr\Phi$ – замкнутий граф. Якщо Φ – однозначна та неперервно диференційована функція, то $\bar{y} = \Phi(\bar{x})$, $D^*\Phi(\bar{x}, \bar{y}) = (\nabla\Phi(\bar{x}))^T$.

Розглянемо олігополістичний ринок з m фірм, кожна з яких виробляє однорідний продукт і потребує певного обсягу рідкісного ресурсу для цього виробництва, використовуючи технологію виробництва. Таким чином, фірма i оптимізує свій прибуток, застосовуючи дві стратегії – обсяг y_i виробництва однорідного продукту для продажу й обсяг x_i рідкісного ресурсу для купівлі чи продажу. Фірма i розв'язує задачу максимізації за $(y_i, x_i) \in (A_i \times R) \cap B_i$ свого прибутку

$$p(T)\, y_i - c(y_i) - \pi\, x_i, \tag{1}$$

де $c_i[R_+ \to R_+]$ – витрати виробництва, π – (невід'ємна) ціна рідкісного ресурсу, $T = \sum_{i=1}^{m} y_i$ – загальний обсяг виробленого на ринку продукту, $A_i = [a_i, b_i]$ – межі виробництва, $B_i = \{(y_i, x_i) \mid q_i(y_i) \le x_i + e_i\}$, e_i – початковий запас (endowment) рідкісного ресурсу, $q_i[R_+ \to R_+]$ – (технологічна) функція, що ставить у відповідність кожному значенню y_i виробництва необхідний обсяг q_i рідкісного ресурсу, $p[\operatorname{int} R_+ \to R_+]$ – крива оберненого попиту, яка ставить у відповідність кожному обсягу T ціну, яку готові платити споживачі як ціноотримувачі (price-takers). В задачі (1) змінні y_j, $j \ne i$ та π відіграють роль параметрів. Загальний обсяг Ξ рідкісного ресурсу не менший $\sum_{i=1}^{m} e_i$:

$$\Xi \ge \sum_{i=1}^{m} e_i. \tag{2}$$

Щоб цільова функція (1) була увігнутою $\forall i$, для олігополістичних ринків використовують такі припущення [2, 11, 12]:

А1) функція $c_i[R_+ \to R_+]$ може бути поширена як опукла і двічі неперервно диференційована функція на відкритий інтервал, що містить множину A_i $\forall i$;

А2) функція $p[\operatorname{int} R_+ \to R_+]$ – строго опукла і двічі неперервно диференційована;

А3) функція $\alpha\, p(\alpha)$ – увігнута по α.

Щоб функція $p(T)$ була добре визначеною, використовують припущення

А4) $0 \le a_i < b_i$ $\forall i$, причому $\max\limits_{i=1,\dots,m} a_i > 0.$

Для доведення існування рівноваги Курно – Неша – Вальраса використовують припущення щодо рідкісного ресурсу:

А5) функція $q_i[R_+ \to R_+]$ може бути поширена як опукла, зростаюча і двічі неперервно диференційована функція на відкритий інтервал, що містить множину A_i $\forall i$, причому $q_i(0) = 0$;

А6) загального (наявного) обсягу Ξ рідкісного ресурсу достатньо, щоб кожна фірма i здійснювала своє мінімальне виробництво a_i, тобто

$$\Xi > \sum_{i=1}^{m} q_i(a_i)\,.$$

Щоб застосовувати апарат сучасного варіаційного аналізу, розробленого для задач мінімізації, $\forall i = 1,\dots,m$ замінимо задачу максимізації прибутку (1) відповідною задачею мінімізації

$$J_i(\pi, y_i, x_i) = c_i(y_i) + \pi\, x_i - p(T)\, y_i.$$

Позначимо $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. Перед тим, як ввести поняття рівноваги Курно – Неша – Вальраса, визначимо рівновагу Курно – Неша [2] як таку пару стратегій $(\bar{y}, \bar{x})$, що при данному $\pi \ge 0$ задовольняє нерівностям

$$J_i(\pi, \bar{y}_i, \bar{x}_i) \le J_i(\pi, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{i-1}, y_i, \bar{y}_{i+1}, \dots, \bar{y}_m, x_i) \;\; \forall (y_i, x_i) \in (A_i \times R) \cap B_i. \quad (3)$$

За відсутності обмеження (2) можна вважати, що $x_i = q_i(y_i)$, $y_i \in A_i$, сумарні витрати виробництва залежать від x_i [1] і становлять

$$c_i(y_i) + \pi\, x_i = c_i(y_i) + \pi\, q_i(y_i).$$

Триплет $(\bar{\pi}, \bar{y}, \bar{x})$ називають рівновагою Курно – Неша – Вальраса [1], якщо $(\bar{y}, \bar{x})$ є рівновагою Курно – Неша при $\pi = \bar{\pi}$, а ціна рідкісного ресурсу (на вторинному ринку) є рівноважною за Вальрасом:

$$\bar{\pi} \ge 0, \quad E = \Xi - \sum_{i=1}^{m} (e_i + \bar{x}_i) \ge 0, \quad \bar{\pi} E = 0.$$

Зазначимо, що нерівність $E \geq 0$ жорсткіша, ніж умова (2). З точки зору фірм обчислення $\bar{\pi}$ є динамічним процесом, який розпочинається після проведення початкового розміщення ($\bar{y}, \bar{x}$). Проте з точки зору органа влади, який контролює даний рідкісний ресурс, обчислення ($\bar{\pi}, \bar{y}, \bar{x}$) можливе за один крок, надаючи інформацію про вплив ($\bar{y}, \bar{x}$) на ($\bar{\pi}, \bar{y}, \bar{x}$) та $\bar{\pi}$.

Вищенаведена модель також охоплює можливість того, що якась фірма j на даному ринку виробляє нульовий обсяг $y_j = 0.$ Тоді припущення А4) може не задовольнятися.

Твердження 1. Для даної ціни $\pi \geq 0$ рівновагу ($\bar{y}, \bar{x}$) Курно – Неша можна охарактеризувати стандартними умовами стаціонарності чи оптимальності; пара ($\bar{y}, \bar{x}$) є рівновагою Курно – Неша тоді й тільки тоді, коли $\forall i = 1,2,\ldots,m$

$$\vec{0} \in \begin{bmatrix} \nabla c_1(y_1) - y_1 \nabla p(T) - p(T) \\ \vdots \\ \nabla c_m(y_m) - y_m \nabla p(T) - p(T) \end{bmatrix} + \pi \begin{bmatrix} \nabla q_1(y_1) \\ \vdots \\ \nabla q_m(y_m) \end{bmatrix} + \mathop{\text{X}}_{i=1}^{m} N_{A_i}(y_i, x_i). \qquad (4)$$

$$\pi[q_i(y_i) - x_i - c_i] = 0, \qquad (5)$$

$$q_i(y_i) \leq x_i + e_i. \qquad (6)$$

В силу припущення А4) обмеження в умові (3) задовольняють кваліфікації лінійної незалежності обмежень (linear independence constraint qualification, LICQ). Загалом припущення А1) – А6) гарантують, що функція J_i опукла за змінною $(y_i, x_i).$ Тоді рівноваги Курно – Неша характеризуються стандартними умовами оптимальності 1-го порядку для кожної із задач оптимізації (3):

$$\vec{0} \in \nabla c_i(y_i) - y_i \nabla p(T) - p(T)\pi + N_{A_i \times R}(y_i, x_i) + \lambda_i \nabla q_i(y_i) - \lambda_i \quad \forall i = 1,2,\ldots,m,$$

де $0 \leq \lambda_i$ – множник Лагранжа, пов’язаний з нерівністю (6), що визначає множину $B_i = \{(y_i, x_i) \mid q_i(y_i) \leq x_i + e_i\}.$ Звідси

$$\vec{0} \in \begin{bmatrix} \nabla c_1(y_1) - y_1 \nabla p(T) - p(T)\pi \\ \vdots \\ \nabla c_m(y_m) - y_m \nabla p(T) - p(T)\pi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 \nabla q_1(y_1) - \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \nabla q_m(y_m) - \lambda_m \end{bmatrix} + \mathop{\text{X}}_{i=1}^{m} N_{A_i \times R}(y_i, x_i). \qquad (7)$$

Множники Лагранжа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ мають задовольняти умовам доповнюваності

$$\lambda_i [q_i(y_i) - x_i - c_i] = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (8)$$

Оскільки $N_R(x_i) = \{0\}$ $\forall i$, то $\pi = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m,$ звідки в силу рівностей (8) випливають рівності (5). Тоді, використовуючи частинні похідні $\nabla_{y_i} I_i$, дістаємо умову (4).

Якщо $\nabla q_i(\cdot)$ є спадною функцією, то припущення А5) не виконується, а умови (4) і (5) – лише необхідні у твердженні 1.

Якщо нестрогу нерівність (6) замінити рівністю

$$x_i = q_i(y_i) - e_i, \tag{9}$$

то задача мінімізації (1) зводиться до задачі мінімізації за $y_i \in A_i \equiv [a_i, b_i]$ функції

$$c_i(y_i) + \pi x_i - p(T)\, y_i = c_i(y_i) + \pi[q_i(y_i) - e_i] - p(T)\, y_i,$$

а умова (4) дає іншу некооперативну рівновагу, що характеризується узагальненим рівнянням (generalized equation, GE)

$$\vec{0} \in \begin{bmatrix} \nabla c_1(y_1) - y_1 \nabla p(T) - p(T) + \pi \nabla q_1(y_1) \\ \vdots \\ \nabla c_m(y_m) - y_m \nabla p(T) - p(T) + \pi \nabla q_m(y_m) \end{bmatrix} + \mathop{\mathrm{X}}_{i=1}^{m} N_{A_i}(y_i). \tag{10}$$

Позначимо $S[R_+ \to R^m]$ відображення, яке кожному $\pi \geq 0$ ставить у відповідність множину розв'язків рівняння (10).

Лема 1. Нехай $\bar{y}$ задовольняє умові (10), або $\bar{y} \in S(\pi)$. Тоді рівновагою Курно – Неша є пара ($\bar{y}$, $\bar{x}$), де в силу рівності (9)

$$\bar{x}_i = q_i(\bar{y}_i) - e_i \quad \forall i.$$

Навпаки, якщо ($\bar{y}$, $\bar{x}$) задовольняє умовам (4) – (6), то $\bar{y}$ задовольняє рівнянню (10) $\forall \pi > 0$.

Зазначимо, що при $\pi \geq 0$ значення $e_1, \ldots, e_m$ не впливають на компонент $\bar{y}$ рівноваги ($\bar{y}$, $\bar{x}$) Курно – Неша.

Лема 2. Існує таке додатне дійсне число L, що $\pi < L$ в усіх рівновагах Курно – Неша – Вальраса.

Нехай величина $\bar{\pi} > 0$ настільки велика, що

$$\min_{i=1,\ldots,m} \left\{ \nabla c_i(a_i) - a_i \nabla p\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right) - p\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right) + \bar{\pi} \nabla q_i(a_i) \right\} > 0.$$

Тоді умова (4) стаціонарності може задовольнятися лише при $y_i = a_i \ \ \forall i$. Оскільки функція J_i опукла за змінною (y_i, x_i), то частинна похідна $\nabla_{y_i} I_i$ – неспадна, звідки

$$\nabla c_i(y_i) - y_i \nabla p(T) - p(T) + \bar{\pi} \nabla q_i(y_i) > 0 \ \text{ при } \ y_i \geq a_i.$$

Звідси при $y_i = a_i \ \ \forall i$ з рівності (9) випливає $q_i(a_i) = x_i + e_i$, а в силу припущення А6) маємо

$$\Xi > \sum_{i=1}^{m} q_i(a_i) = \sum_{i=1}^{m} (x_i + e_i),$$

що суперечить умові $\bar{\pi} E = 0$ доповнюваності у визначенні рівноваги Курно – Неша – Вальраса. Тоді обираємо $L = \bar{\pi}$.

Теорема 1 [6]. За припущень А1)–А7) існує рівновага Курно – Неша – Вальраса.

Приклад 1 [2]. Нехай $m = 5$, $q_i \ge 0$, функція оберненого попиту на деякий однорідний продукт задається

$$p(T) = \left(\frac{5000}{T}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = AT^{-\frac{1}{\gamma}},$$

де $\gamma = 1.1$ – еластичність ринкового попиту, $T = \sum_{i=1}^{m} q_i$, $A = 5000^{\frac{1}{\gamma}}$. Функція $p(T)$ ціни – додатна і спадна, а функція $Tp(T)$ ринкового доходу є увігнутою. Нехай функція витрат виробництва дорівнює

$$c_i(q_i) = c_i q_i + \frac{\beta_i q_i}{1+\beta_i}\left(\frac{q_i}{K_i}\right)^{\frac{1}{\beta_i}},$$

де $c_i = 10 - 2\times(i-1)$, $K_i = 5$, $\beta_i = 1.2 - 0.1\times(i-1)$, $i = 1,\ldots,m.$ Функція $c_i(q_i)$ – додатна, опукла та зростаюча.

Звернімо увагу, що значення c_i наближують рівномірний розподіл на проміжку [2, 10], а значення β_i – рівномірний розподіл на відрізку [0.8, 1.2], відбиваючи недосконалість інформації про точні величини коефіцієнтів c_i та β_i. Для подібних ситуацій було знайдено олігополістичні рівноваги аналітично [13].

Кожна фірма i, максимізуючи за $q_i \ge 0$ свою корисність (прибуток)

$$u_i(q_i) = p(T)q_i - c_i(q_i) = A\left(\sum_{i=1}^{5} q_i\right)^{-\frac{1}{\gamma}} q_i - c_i q_i - \frac{\beta_i}{1+\beta_i}(K_i)^{-\frac{1}{\beta_i}}(q_i)^{\frac{1}{\beta_i}+1},$$

приходить до умови

$$0 \ge \frac{\partial u_i}{\partial q_i} = A\left(\sum_{i=1}^{5} q_i\right)^{-\frac{1}{\gamma}} - c_i - \frac{Aq_i}{\gamma}\left(\sum_{i=1}^{5} q_i\right)^{-\frac{1+\gamma}{\gamma}} - \left(\frac{q_i}{K_i}\right)^{\frac{1}{\beta_i}}, \quad i = 1,\ldots,5. \tag{11}$$

Зазначимо, що існує таке $\overline{q}_i \ge 0$, що $u_i(\overline{q}_i) < 0$, тобто вхід у ринок для фірми може бути невигідним [14].

Таким чином, пошук олігополістичної рівноваги зводиться до розв'язання системи нелінійних нерівностей, розв'язок якої загалом залежить від початкового наближення. Вибираючи початкове наближення $q_i^0 = 10$, $i = 1,\ldots,5$, та користуючись MS Excel Solver, можна знайти наближений розв'язок системи (11): $q_1 = 36.93$, $q_2 = 41.82$, $q_3 = 43.71$, $q_4 = 42.66$, $q_5 = 39.18$.

Якщо у прикладі 1 фірми належать монополії, то їхні випуски будуть істотно меншими, причому фірми 1 і 2 витіснятимуться з ринку ($q_1 = 0 = q_2$).

В.М. Горбачук

ОЛИГОПОЛИСТИЧЕСКИЕ РАВНОВЕСИЯ КУРНО – НЭША – ВАЛЬРАСА

Приведены условия существования равновесий олигополий, использующих общественные факторы производства. Проанализирован классический пример поиска такого равновесия.

V.M. Gorbachuk

COURNOT–NASH–WALRAS OLIGOPOLISTIC EQUILIBRIA

The existence conditions for oligopoly equilibria, used public production factors, are given. The classical case of finding such equilibrium is analyzed.

1. *Flam S.D.* Noncooperative games, coupling constraints and partial efficiency. *Economic theory bulletin*. 2016. P. 1 – 17.
2. *Murphy F.H., Sherali H.D., Soyster A.L.* A mathematical programming approach for determining oligopolistic market equilibrium. *Mathematical programming.* 1982. 24. P. 92 – 106.
3. *Dirkse S.P., Ferris M.C.* The PATH solver: a non-monotone stabilization scheme for mixed complementarity problems. *Optimization methods and software*. 1995. 5. P. 123 – 156.
4. *Ferris M.C., Munson T.S.* Interfaces to PATH 3.0: design, implementation and usage. *Computational optimization and applications*. 1999. 12. P. 207 – 227.
5. *Cao M., Ferris M.C.* A pivotal method for affine variational inequalities. *Mathematics of operations research.* 1996. 21. P. 44–64.
6. *Outrata J.V., Ferris M.C., Cervinka M., Outrata M.* On Cournot – Nash – Walras equilibria and their computation. *Optimization*. 2015. – Режим доступу: http://www.optimization-online.org/DB-HTML/2015/09/5128.html – 2015
7. *Rosen J.B.* Existence and uniqueness of equilibrium points for concave *n*-person games. *Econometrica*. 1965. 33. P. 520 – 534.
8. *Flam S.D., Antipin A.S.* Equilibrium programming using proximal-like algorithms. *Mathematical programming.* 1997. 78. P. 29 – 41.
9. *Rockafellar R.T., Wets R.J.-B.* Variational analysis. Berlin: Springer, 1998.
10. *Mordukhovich B.S*. Variational analysis and generalized differentiation. *Basic theory*. Vol. 1. Berlin: Springer, 2006.
11. *Outrata J. V., Kocvara M., Zowe J.* Nonsmooth approach to optimization problems with equilibrium constraints. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.
12. *Outrata J.V., Cervinka M.* On the implicit programming approach in a class of mathematical programs with equilibrium constraints. *Control and cybernetics*. 2009. 38. P. 1557 – 1574.
13. *Gorbachuk V.M.* An asymmetric Cournot – Nash equilibrium under uncertainty as a generalized Cournot –S tackelberg – Nash equilibrium. *Cybernetics and systems analysis*. 2007. Vol. 43. N 4. P. 471 – 477.
14. *Горбачук В.М., Морозов О.О.* Особливості олігополістичних рівноваг. *Контроль і управління в складних системах.* Вінниця: ВНТУ, 2016. С. 49 – 51.

Одержано 07.11.2016

Про автора:

Горбачук Василь Михайлович,

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України.

E-mail: GorbachukVasyl@netscape.net