КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.854

С.В. ЧУПОВ

СТРУКТУРНІ ТА СТОХАСТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ АЛГОРИТМУ ЛЕКСИКОГРАФІЧНОГО ПОШУКУ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДИСКРЕТНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

В роботі досліджується детермінований алгоритм лексикографічного пошуку розв'язку задачі дискретної оптимізації. В результаті чого множина допустимих значень задачі представляється як розбиття її підмножин певної структури. На основі такого розбиття за кожною координатою будується імовірносний розподіл значень цільової функції як випадкової величини. Отриманий розподіл дозволяє позначати певні підмножини розбиття як безперспективні та відкладати їх подальший аналіз.

Вступ. Більшість задач дискретної оптимізації відноситься до класу NP-складних задач, що робить використання детермінованих переборних алгоритмів, до яких відноситься детермінований алгоритм лексикографічного пошуку [1], малоефективним. В сучасних умовах, у зв'язку із значним розвитком засобів обчислювальної техніки та різноманітних технологій, зокрема технології паралельних обчислень, виникає необхідність у розробці нових алгоритмів, які б дозволяли за прийнятний час отримувати оптимальні або близькі до них розв'язки. В даній роботі встановлюються та аналізуються властивості стандартної схеми методу лексикографічного пошуку, що дозволить більш глибоко зрозуміти процес відшукання оптимального розв'язку задачі дискретної оптимізації при використанні такої схеми, а також визначити можливості для прискорення процесу лексикографічного пошуку.

Постановка задачі. Розглянемо задачу дискретного програмування: максимізувати

$$x_0 = f_0(x), \quad (1)$$

за умов

$$x \in X^D, \quad (2)$$

де $X^D = D \cap X$, $X \subseteq R^n$, $D \subset P$ – дискретна множина, $P = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, l \le x \le u \right\}$ – n-вимірний гіперпаралелепіпед. На основі поняття лексикографічного максимуму множини [2, 3] процес відшукання оптимального розв'язку задачі (1), (2) можна звести до відшукання лексикографічних максимумів $x^k = \max^L X^k$ послідовності множин X^0, $X^1,..., X^k,...$, де $X^0 = X^D$, $X^k = \left\{ x \in X^D \middle| x \leq^L x^{k-1},\ f_0(x) > x_0^{k-1} \right\}$, $k = 1, 2, ...$. На такому визначенні множин базується схема детермінованого послідовного лексикографічного пошуку розв'язку задачі (1), (2) [1].

Нехай множина $\overline{X}^D$ визначена як $\overline{X}^D = \left\{ x \in X^D \middle| f_0(x) \geq \overline{f} \right\}$, де $\overline{f}$ – нижня межа значень цільової функції (1). Ефективність більшості алгоритмів пошуку оптимального розв‘язку задачі (1), (2) залежить від ефективного вирішення двох питань:

1) встановити чи множина $\overline{X}^D$ не порожня;

2) якщо множина $\overline{X}^D$ не порожня, тоді знайти хоча б один розв'язок, що належить цій множині. В алгоритмах лексикографічного пошуку серед усіх допустимих розв'язків множини $\overline{X}^D$ відшукується її лексикографічний максимум.

Структурні властивості алгоритму лексикографічного пошуку. Проаналізуємо структуру множини $X_{\overline{x}}^D = \left\{ x \in \overline{X}^D \middle| x \leq^L \overline{x} \right\}$ з точки зору існування її лексикографічного максимуму, що дозволить більш глибоко зрозуміти процес відшукання оптимального розв'язку задачі (1), (2) при використанні детермінованих схем лексикографічного пошуку, а також визначити можливості для прискорення процесу пошуку лексикографічного максимуму множини $X_{\overline{x}}^D$. Розглянемо множину: $X^t(\overline{x}) = \left\{ x \in \overline{X}^D \middle| x_j = \overline{x}_j,\ j = 1,...,t-1, x_t \leq \rfloor \overline{x}_t \lfloor \right\}$.

Теорема 1. Якщо існує такий максимальний індекс t, $1 \leq t \leq n$, для якого множина X^t не порожня, тоді лексикографічно максимальна точка x^t множини X^t є лексикографічним максимумом множини $X_{\overline{x}}^D$.

Доведення. Зазначимо, що за рахунок того, що $\rfloor \overline{x}_t \lfloor < \overline{x}_t$, точка x^t є лексикографічно меншою за точку $\overline{x}$ ($x^t <^L \overline{x}$), тобто належить множині $X_{\overline{x}}^D$. Крім того, враховуючи що $\overline{x}$ – дискретно визначена ($\overline{x} \in D$), $x_t^t \leq \rfloor \overline{x}_t \lfloor < \lfloor \overline{x}_t \rfloor = \overline{x}_t$.

Нехай X^t не порожня множина, звідси випливає існування точки x^t, яка є лексикографічним максимумом цієї множини. Доведемо, що ця точка є лексикографічно максимальною точкою множини $X_{\overline{x}}^D$.

Припустимо супротивне, тобто існує точка $x^* \in X_{\overline{x}}^D$, що є лексикографічним максимумом множини $X_{\overline{x}}^D$ для якої виконуються нерівності $x^t <^L x^* \leq^L \overline{x}$.

З цих нерівностей випливає існування такого індексу k, що $x_j^t = x_j^*$, $j = 1, 2, ..., k-1$, $x_k^t < x_k^*$. Через те, що $x_j^t = \bar{x}_j$, $j = 1, 2, ..., t-1$, $k \geq t$. Нехай $k = t$, тоді $x_t^t < x_t^* \leq \bar{x}_t$. Оскільки x^t – лексикографічний максимум множини X^t, інтервал $x_t^t < x_t \leq \rfloor \bar{x}_t \lfloor$ не містить жодного значення при якому множина $\left\{ x \in \bar{X}^D \middle| x_j = \bar{x}_j, j = 1, ..., t-1, x_t^t < x_t \leq \rfloor \bar{x}_t \lfloor \right\}$ – не порожня. Отже $x_t^* = \lfloor \bar{x}_t \rfloor = \bar{x}_t$, але це означає, що t не є максимальним індексом. Нехай $k > t$, але усі значення x_j^t, $j = t+1, 2, ..., n$ отримуються в результаті розв'язання відповідних скалярних задач максимізації і тому є максимально можливими, тому знову маємо протиріччя.

Теорема 2. Якщо для кожного індексу t, $1 \leq t \leq n$, множина X^t – порожня, тоді множина $X_{\bar{x}}^D$ також порожня.

Доведення. Насамперед зазначимо, що для довільних двох різних $t_1 \in \{1, 2, ..., n\}$ та $t_2 \in \{1, 2, ..., n\}$ $X^{t_1} \cap X^{t_2} = \varnothing$. Крім того, враховуючи те, що точка $\bar{x}$ – дискретно визначена ($\bar{x} \in D$), для довільного $t \in \{1, 2, ..., n\}$ маємо $\bar{x}_t = \lfloor \bar{x}_t \rfloor > \rfloor \bar{x}_t \lfloor$. Множину $X_{\bar{x}}^D$ представимо у вигляді $X_{\bar{x}}^D = \left\{ x \in \bar{X}^D \middle| x_1 \leq \rfloor \bar{x}_1 \lfloor \right\} \cup$ $\cup \left\{ x \in \bar{X}^D \middle| x_1 > \rfloor \bar{x}_1 \lfloor \right\}$. Але, виходячи з останньої нерівності та визначення множини X^t, множину $X_{\bar{x}}^D$ можна представити як $X_{\bar{x}}^D = X^1 \cup \bar{X}^1$, де $\bar{X}^1 = \left\{ x \in \bar{X}^D \middle| x_1 = \bar{x}_1 \right\}$. В свою чергу множину $\bar{X}^1$ представимо як $\bar{X}^1 = X^2 \cup \bar{X}^2$, де $\bar{X}^2 = \left\{ x \in \bar{X}^D \middle| x_1 = \bar{x}_1, x_2 = \bar{x}_2 \right\}$. Продовжуючи за аналогією міркування для усіх $t \in \{1, 2, ..., n\}$ отримаємо, що $\bar{X}^{n-1} = X^n \cup \bar{X}^n$, де $\bar{X}^n = \begin{cases} \{\bar{x}\}, \bar{x} \in \bar{X}^D \\ \varnothing, \bar{x} \notin \bar{X}^D \end{cases}$. В результаті множину $X_{\bar{x}}^D$ можна представити як об'єднання множин X^t, $t \in \{1, 2, ..., n\}$ та множини $\bar{X}^n$. Якщо $\bar{x} \in \bar{X}^D$, тоді задача пошуку лексикографічного максимуму множини $X_{\bar{x}}^D$ стає тривіальною. Якщо ж $\bar{x} \notin \bar{X}^D$, тоді отримаємо співвідношення: $\bigcup_{t=1}^{n} X^t = X_{\bar{x}}^D$, $X^k \cap X^s = \varnothing$, $k \neq s$, $k, s \in \{1, 2, ..., n\}$. Тобто множини X^t, $t \in \{1, 2, ..., n\}$ – розбиття множини $X_{\bar{x}}^D$. За умов теореми $X^t = \varnothing, t = 1, ..., n$ звідки випливає, що $X_{\bar{x}}^D = \varnothing$.

Наслідок. Якщо x^t – лексикографічний максимум множини $X^t\left(x^t = \max^L X^t\right)$, $t \in \{1, 2, ..., n\}$, тоді справедливі лексикографічні нерівності: $x^1 <^L x^2 <^L ... <^L x^n$.

Доведення цього факту прямо випливає із структури множини X^t.

Як ілюстрацію розглянемо випадок коли множина $X^D = B^4$, а точка $\bar{x} = (1,1,1,1)$. На рис. 1 дана ситуація показана у вигляді бінарного дерева. Чорні вершини відповідають одиничним значенням координат, білі – нульовим.

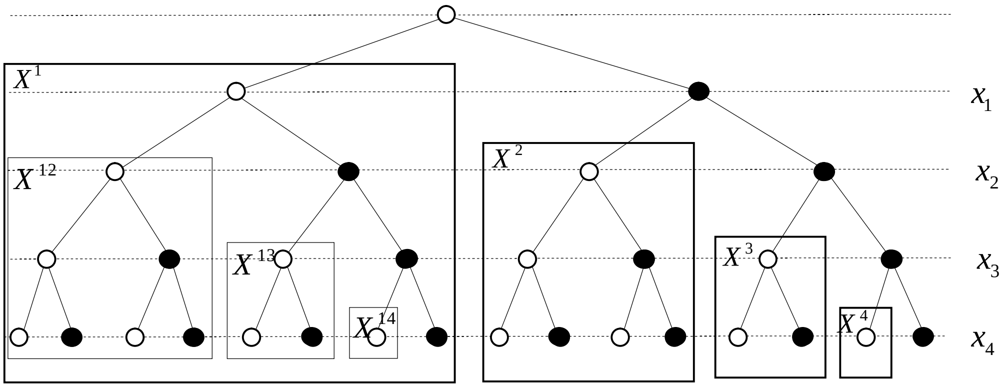

РИС. 1. Представлення $X^D_{\bar{x}}$ як розбиття множин X^t, $t \in \{1, 2, 3, 4\}$

Легко бачити, що $X^D_{\bar{x}} = X^D = X^1 \cup X^2 \cup X^3 \cup X^4 \cup \{\bar{x}\}$. У свою чергу множина X^1 теж може бути представлена як $X^1 = X^{12} \cup X^{13} \cup X^{14} \cup \{(0,1,1,1)\}$, що є розбиттям множини X^1. Тому для множини $X^D_{\bar{x}}$ можна побудувати інше розбиття в якому множина X^1 представлена як розбиття, $X^D_{\bar{x}} = X^{12} \cup X^{13} \cup X^{14} \cup \{(0,1,1,1)\} \cup X^2 \cup X^3 \cup X^4 \cup \{\bar{x}\}$.

Взагалі кажучи, довільну множину X^t, $t \in \{1, 2, ..., n\}$ можна представити як розбиття певних підмножин цієї множини. Такий підхід дає змогу конструювати розбиття множини $X^D_{\bar{x}}$ різної ступені деталізації в алгоритмах лексикографічного пошуку оптимального розв'язку задачі дискретної оптимізації (1), (2). Зрозуміло, що із збільшенням кількості змінних задачі *n* значно зростає і кількість підмножин множини $X^D_{\bar{x}}$ з яких можна утворити її розбиття.

Стохастичні властивості алгоритму лексикографічного пошуку. Визначимо множини $Y^t(\bar{x}) = \left\{x \in D \middle| x_j = \bar{x}_j,\ j = 1, 2, ..., t-1, x_t \le \rfloor \bar{x}_t \lfloor \right\}$, $t = 1, 2, ..., n-1$.

При цьому $X^t(\bar{x})$ – підмножина $Y^t(\bar{x})$. На певних кроках пошуку алгоритму, для деяких $t = 1, 2, ..., n-1$ та $\bar{x}$ потрібно з'ясовувати чи $X^t(\bar{x}) \neq \varnothing$, що неявно вимагає перегляду та аналізу множини $Y^t(\bar{x})$. Нехай $Y^t\left(\bar{x}^j\right)$, $j = 1, 2, ..., Q_t(\bar{x})$, $\bar{x}^j \geq^L \bar{x}$ – множини які переглядалися на попередніх кроках алгоритму лексикографічного пошуку. Множину допустимих точок з $Y^t\left(\bar{x}^j\right)$ позначимо $Y^t_{X^D}\left(\bar{x}^j\right)$. Якщо конструювати розбиття множини $X^D_{\bar{x}}$ з підмножин $Y^t_{X^D}$ для $t \leq n$, тоді з перегляду та аналізу такого розбиття можна виключати ті множини $Y^t_{X^D}$ які не задовольняють певним умовам. В задачах оптимізації одні-єю з таких умов, наприклад, є присутність у множині Y^t допустимих точок, що є кращими за цільовою функцією, ніж останнє отримане рекордне значення.

Для кожного $t = 1, 2, ..., n-1$, позначимо $\bar{F}^t(\bar{x})$ множину значень цільової функції $f_0(x)$, яка отримується в результаті перегляду та аналізу всіх множин $Y^t_{X^D}\left(\bar{x}^j\right), j = 1, 2, ..., Q_t(\bar{x})$ за стандартним детермінованим алгоритмом лексикографічного пошуку: $\bar{F}^t(\bar{x}) = \left\{ f_0(x) \middle| x \in Y^t_{X^D}\left(\bar{x}^j\right), j = 1, 2, ..., Q_t(\bar{x}) \right\}$. Оскільки дискретна множина D – обмежена, тоді множина $\bar{F}^t(\bar{x})$ є скінченною, що дозволяє представити її у вигляді $\bar{F}^t(\bar{x}) = \left\{ f^t_k, k = 1, 2, ..., \left|\bar{F}^t(\bar{x})\right| \right\}$.

Нехай $n_{t,s} = \sum_{k=1}^{\left|\bar{F}^t(\bar{x})\right|} 1_{\left\{f_0 = f^t_k\right\}}$, $s = 1, 2, ..., n_t$, $1_{\{A\}}$ – індикатор події A. Відповідне $n_{t,s}$ значення з $\bar{F}^t(\bar{x})$ позначимо $f_{t,s}$, $s = 1, 2, ..., n_t$. Нехай f^{up} – верхня межа значень цільової функції (1). Впорядкувавши значення $f'_{t,s} = \dfrac{f_{t,s}}{f^{up}}$, $s = 1, 2, ..., n_t$ за зростанням, отримаємо варіаційний ряд частотного розподілу масштабованих значень цільової функції (1) $VF^t = \left\{ f'_{t,s} \right\}_{s=1}^{n_t}$ на множинах $Y^t_{X^D}\left(\bar{x}^j\right)$, $j = 1, 2, ..., Q_t(\bar{x})$ та відповідну послідовність частот $\left\{ n_{t,s} \right\}_{s=1}^{n_t}$.

На рис. 2 показано частотний розподіл значень множини $\overline{F}^{460}\left(\overline{x}\right)$ для восьмої задачі з відомого тестового набору булевих задач про ранець запропонованого Ф. Гловером. Контур фігури, що зображає частотний розподіл виділений червоним кольором. Певною мірою, цей контур можна розглядати як функцію щільності деякого неперервного розподілу. Вертикальні червоні лінії відповідають значенням $n_{t,s}$ для кожного $f'_{t,s}$, $s = 1, 2, ..., n_t$. Не важко помітити, що контур фігури частотного розподілу моделює функцію подібну до функції щільності нормального розподілу.

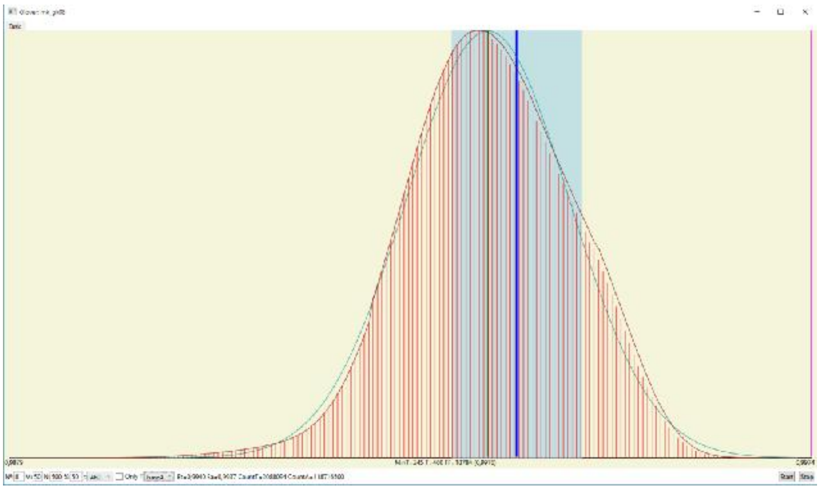

РИС. 2. Частотний розподіл значень множини $\overline{F}^{460}\left(\overline{x}\right)$, n = 500

Загалом не можна твердити, що контур фігури частотного розподілу завжди близький до функції щільності нормального закону. В залежності від структури задачі (1), (2) контур фігури частотного розподілу, як деяка неперервна функція, може мати декілька локальних максимумів. Для неперервних законів розподілу такі локальні максимуми є модами відповідного розподілу. Якщо контур фігури частотного розподілу значень множини розглядати як функцію щільності з декількома різними значеннями мод, тоді відповідний закон розподілу буде мультимодальним.

Оскільки структура цільової функції та множина допустимих значень задачі (1), (2) не відома, то можемо вважати, що значення $f_0\left(x\right)$ для $x \in X^D$ – це випадкові величини визначені за деяким, взагалі кажучи, невідомим законом розподілу. Для випадкових значень $f\left(\omega\right)$ з множини $\overline{F}^t\left(\overline{x}\right)$ побудуємо дискретний розподіл з функцією розподілу (3):

$$P_s = P\left(f\left(\omega\right) \le f_{t,s}\right) = \frac{1}{\left|\overline{F}^t\left(\overline{x}\right)\right|}\sum_{i=1}^{s} n_{t,i}. \quad (3)$$

Припустимо, що дискретний розподіл, що визначається функцією (3) має m_k різних мод які відокремлені по інтервалах $I_1 = \left(-\infty, y_1\right], \ldots$ $\ldots, I_k = \left(y_{k-1}, y_k\right], \ldots, I_{m_k} = \left(y_{m_k - 1}, +\infty\right)$. Нехай на кожному з цих інтервалів випадкова величина значення цільової функції (1) розподілена за відомим законом з функцією розподілу випадкової величини $F_X^k\left(f\right)$, $k = 1, 2, \ldots, m_k$ та $X = f_0\left(x\right)$ – випадкова величина значення цільової функції (1), що може бути отримана після застосування алгоритму лексикографічного пошуку на множині $Y_{X D}^t\left(\overline{x}\right)$. Визначимо функцію $F_X\left(f\right)$ наступним чином:

$$F_X\left(f\right) = P\left(X \le f\right) = \sum_{k=1}^{m_k} \alpha_k \left(P_{y_{k-1}} + \frac{P_{y_k} - P_{y_{k-1}}}{F_X^k\left(y_k\right) - F_X^k\left(y_{k-1}\right)} \left(F_X^k\left(f\right) - F_X^k\left(y_{k-1}\right)\right) \right), \quad (4)$$

де $\alpha_k = \begin{cases} 1, f \in I_k \\ 0, f \notin I_k \end{cases}$, $k = 1, \ldots, m_k$, $P_{y_0} = 0$, $y_0 = -\infty$, $P_{y_k} = \frac{1}{\left|\overline{F}^t\left(\overline{x}\right)\right|} \sum_{i=1}^{s_k} n_{t,i}$,

$y_k = f'_{t, s_k} \in VT^t$, $k = 1, 2, \ldots, m_k - 1$, $P_{y_{m_k}} = 1$, $y_{m_k} = +\infty$.

Функція $F_X\left(f\right)$ – функція розподілу випадкової величини значення цільової функції задачі (1), (2) за координатою t після реалізації алгоритму лексикографічного пошуку на множинах $Y_{X D}^t\left(\overline{x}^j\right)$, $j = 1, 2, \ldots, Q_t\left(\overline{x}\right)$. Функція розподілу (4) дозволяє визначати імовірність того, що після виконання певної кількості кроків за алгоритмом лексикографічного пошуку на наступному кроці пошуку випадкова величина X не перевищить значення f.

Нехай розподіли випадкової величини, що визначаються функціями розподілу $F_X^k\left(f\right)$, $k = 1, 2, \ldots, m_k$ – неперервні, $f_X^k\left(f\right)$ функції щільності цих розподілів на відповідних інтервалах та $g_X^k\left(f\right) = \begin{cases} \frac{1}{F_X^k\left(y_k\right) - F_X^k\left(y_{k-1}\right)} f_X^k\left(f\right), f \in I_k \\ 0, f \notin I_k \end{cases}$,

$k = 1, 2, \ldots, m_k$, тоді функція $f_X\left(f\right) = \sum_{k=1}^{m_k} \left(P_{y_k} - P_{y_{k-1}}\right) g_X^k\left(f\right)$ є функцією щільності розподілу визначеного функцією (4). Легко бачити, що $f_X\left(f\right)$ задовольняє всім властивостям функції щільності розподілу. Твірна функція моментів матиме вигляд $M_X\left(t\right) = \sum_{k=1}^{m_k} \left(P_{y_k} - P_{y_{k-1}}\right) M_X^k\left(t\right)$, де $M_X^k\left(t\right)$ – твірні функції моментів розподілів з функціями щільності $f_X^k\left(f\right)$, $k = 1, 2, \ldots, m_k$. Тоді математичне сподівання та дисперсія визначаються як $\bar{\mu}^t = E[X] = \sum_{k=1}^{m_k} \left(P_{y_k} - P_{y_{k-1}}\right)\mu_k^t$ та $D^t = D[X] = E\left[X^2\right] - \left(\bar{\mu}^t\right)^2 = \sum_{k=1}^{m_k}\left(P_{y_k} - P_{y_{k-1}}\right)v_{k,2} - \left(\sum_{k=1}^{m_k}\left(P_{y_k} - P_{y_{k-1}}\right)\mu_k^t\right)^2$ відповідно, де μ_k^t – математичні сподівання, $v_{k,2}$ – другі початкові моменти розподілів з функціями щільності $f_X^k(f)$, $k = 1, 2, ..., m_k$.

Не важко показати, що якщо $\left|\bar{F}^t(\bar{x})\right| \to \infty$ та на кожному інтервалі I_k, $k = 1, 2, ..., m_k$ значення розподілені за одним законом розподілу з математичним сподіванням $\mu_k^t < +\infty$ та початковим другим моментом $v_{k,2} < +\infty$, тоді середнє арифметичне $\bar{f}^t$ та середнє квадратичне відхилення $\bar{\sigma}^t = \sqrt{\bar{d}^t}$ значень множини $\bar{F}(\bar{x})$збігаються майже напевно до $\bar{\mu}^t$ і $\sqrt{D^t}$ відповідно.

На рис. 2. зелена крива лінія представляє собою графік функції щільності нормального розподілу $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ з параметрами $\mu = \bar{f}^t$ та $\sigma^2 = \bar{d}^t$. Легко бачити, що у випадку унімодального розподілу функція щільності нормального розподілу, яка є одночасно і функцією щільності розподілу з функцією розподілу (4), достатньо точно наближає частотний розподіл значень цільової функції (1).

Отже є змога в процесі роботи алгоритму лексикографічного пошуку за кожною координатою $t = 1, 2, ..., n-1$ отримувати частотний розподіл значень цільової функції з функцією розподілу (4) та поступово уточнювати його. Згадаємо, що метою алгоритму лексикографічного пошуку є визначення лексикографічного максимуму множини $X_{\bar{x}}^D$ або встановлення її порожності. При цьому множина $X_{\bar{x}}^D$ представляється як певне розбиття її підмножин, які в свою чергу теж представляються через розбиття своїх підмножин. В загальному, на кожному кроці $j = 1, 2, ...$ алгоритму лексикографічного пошуку визначається підмножина $Y_{X^D}^{t_j}\left(\bar{x}^j\right)$ для якої відшукується її лексикографічний максимум та відповідне значення цільової функції. Якщо в результаті пошуку лексикографічного максимуму множини $X_{\bar{x}}^D$ розбиття, що утворюються об'єднати в одну послідовність

$$Y_{X^D}^{t_1}\left(\bar{x}^1\right), Y_{X^D}^{t_2}\left(\bar{x}^2\right), ..., Y_{X^D}^{t_j}\left(\bar{x}^j\right), ..., \; t_j \in \{1, 2, ..., n-1\}, \tag{5}$$

тоді отримуємо послідовність значень цільової функції $f_{0,j}$, $j = 1, 2, ...$ та відповідну їй лексикографічно спадну послідовність допустимих точок $\bar{x}^1 >^L \bar{x}^2 >^L ... >^L \bar{x}^j >^L ...$. Зафіксуємо певне значення координати $t \in \{1, 2, ..., n-1\}$ та з послідовності (5) виберемо ті множини, що задовольняють умову $t_j \geq t$. Тоді кількість вибраних підмножин буде рівна $\left|\bar{F}^t(\bar{x})\right|$. В результаті отримуємо підпослідовність

$$\bar{Y}^{t_1}_{X^D}\left(\bar{x}^{i_1}\right), \bar{Y}^{t_2}_{X^D}\left(\bar{x}^{i_2}\right), \ldots, \bar{Y}^{t_{\left|\bar{F}^t\right|}}_{X^D}\left(\bar{x}^{i_{\left|\bar{F}^t\right|}}\right) \qquad (6)$$

множин з (5). Значення цільової функції $f_k^t = f_0\left(\bar{x}_k^t\right)$ в точках лексикографічного максимуму множин $\bar{x}_k^t = \max{}^L\left\{\bar{Y}^t_{X^D}\left(\bar{x}^{i_k}\right)\right\}$, $k = 1, 2, \ldots, \left|\bar{F}^t(\bar{x})\right|$ підпослідовності (6) утворюють множину $\bar{F}^t(\bar{x}) = \left\{f_k^t, k = 1, 2, \ldots, \left|\bar{F}^t(\bar{x})\right|\right\}$, де $\bar{x} = \bar{x}^j$ – точка отримана на останньому кроці алгоритму лексикографічного пошуку. Нехай на k-му кроці алгоритму потрібно здійснити аналіз підмножини $Y^{t_k}_{X^D}\left(\bar{x}^k\right)$, де $t_k = t$. Знайдемо $x^k = \max{}^L Y^{t_k}_{X^D}\left(\bar{x}^k\right)$, $f_{0,k} = f_0\left(x^k\right)$ та уточнимо значення $\bar{f}^t \approx \bar{\mu}^t$ і $\bar{d}^t \approx D[X]$. Визначимо $P\left(X > \hat{f}_{0,t}\right) = 1 - P\left(X \leq \hat{f}_{0,t}\right) = 1 - F_X\left(\hat{f}_{0,t}\right)$ – імовірність того, що у множині $Y^{t_k}_{X^D}\left(\bar{x}^k\right)$ є допустимі розв'язки із значенням цільової функції (1) які більші за значення $\hat{f}_{0,t}$. Якщо для певного фіксованого значення $\varepsilon_t > 0$ виявиться, що $P\left(X > \hat{f}_{0,t}\right) < \varepsilon_t$ тоді множину позначаємо як безперспективну на даному етапі пошуку та її подальший аналіз можемо відкласти. Якщо ж $P\left(X > \hat{f}_{0,t}\right) \geq \varepsilon_t$, тоді будуємо певне розбиття множини $Y^{t_k}_{X^D}\left(\bar{x}^k\right)$ та здійснюємо аналіз підмножин цього розбиття аналогічним, до викладеного вище, чином. При вдалому виборі параметрів $\hat{f}_{0,t}$ та $\varepsilon_e > 0$ допустимий розв'язок множини $X^D_{\bar{x}}$ не буде пропущений, тобто аналіз множини $Y^{t_k}_{X^D}\left(\bar{x}^k\right)$, яка його містить, не буде відкладений та кількість множин з послідовності (5) значно скоротиться, що призведе до відповідного прискорення роботи алгоритму лексикографічного пошуку. Такий підхід обумовлений тим, що характер розподілу значень цільової функції є однаковим для кожної координати та зберігається таким на протязі роботи алгоритму лексикографічного пошуку. Нехай f_0^* – оптимальне значення цільової функції задачі (1), (2) та роботу алгоритму лексикографічного пошуку завершено. Тоді очевидно, що якщо для деякого значення t, $f_{t,n_t} < f_0^*$ тоді з послідовності (5) можна виключити усі множини $Y^{t_j}_{X^D}\left(\bar{x}^j\right)$ для яких $t_j \geq t$. Таку оцінку можливо зробити лише після завершення роботи алгоритму, що не дає ніякої користі в процесі пошуку самого значення f_0^*. Але якщо припустити, що $f_0^* \approx \hat{f}_{0,t}$, тоді за допомогою розподілу, що визначається функцією розподілу (4) можна оцінити імовірність виконання нерівності $f_{t,n_t} < f_0^*$.

Висновки. На підставі виявлених структурних та стохастичних властивостей алгоритму лексикографічного пошуку розв'язку задачі (1), (2) множину $\bar{X}^D$ можемо представляти як розбиття її підмножин довільної ступені деталізації та здійснювати аналіз отриманих підмножини на підставі визначеного вище розподілу. Усе це дає можливість будувати нові ефективні схеми стохастичного лексикографічного пошуку для різних класів задач дискретної оптимізації [4].

С.В. Чупов

СТРУКТУРНЫЕ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АЛГОРИТМА ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОГО ПОИСКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

На основании исследования детерминированного алгоритма лексикографического поиска решения задачи дискретной оптимизации, множество допустимых решений задачи представляется как разбиение его подмножеств определенной структуры. На основе такого разбиения по каждой координате строится вероятностное распределение значений целевой функции как случайной величины. Данное распределение позволяет фиксировать определенные подмножества разбиения как бесперспективные и откладывать их дальнейший анализ.

S.V. Chupov

STRUCTURAL AND STOCHASTIC PROPERTIES OF THE LEXICOGRAPHIC SEARCH ALGORITHM FOR SOLUTION OF A DISCRETE OPTIMIZATION PROBLEM

Based on the investigation of the deterministic lexicographic search algorithm for the solutions of a discrete optimization problem, the set of feasible solutions of the problem is presented as a partition of its subsets of a particular structure. On the basis of such a partition for each coordinate, a probability distribution of the objective function is constructed as a random value. This distribution allows to fix a certain subset of the partition as an unpromising and to postpone its further analysis.

1. *Червак Ю.Ю., Гренджа В.І., Чупов С.В.* Лексикографічна оптимізація в дискретному програмуванні // Міжнар. конф. «Питання оптимізації обчислень», Київ, 6– 9 жовтня 1997 р. – Праці НАН України. – Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова, 1997. – С. 317 – 319.
2. *Чупов С.В.* Модифікації алгоритму пошуку лексикографічного максимуму множини // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. та інформ. – Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла", 2015. – Вип. № 2 (27). – С. 168 – 173.
3. *Чупов С.В.* Алгоритм пошуку цілочислового лексикографічного максимуму множини // Науковий вісник Ужгород. держ. ун-ту: Сер. "Математика". – Ужгород, 1997. – Вип. 2. – С. 122 – 123.
4. *Чупов С.В.* Стохастичний алгоритм лексикографічного пошуку розв'язку булевої задачі про ранець // Праці VII Міжнародної школи-семінару «Теорія прийняття рішень», 29 вересня – 4 жовтня 2014, Ужгород. – Ужгород: Ужгородський нац. ун-т, 2014. – С. 263 – 264.

Одержано 20.02.2016

Про автора:

Чупов Сергій Вікторович,
кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри системного аналізу і теорії оптимізації Ужгородського національного университету.
E-mail: sergey.chupov@gmail.com