КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 004.42:510.69

С.С. ШКІЛЬНЯК, Д.Б. ВОЛКОВИЦЬКИЙ

РЕНОМІНАТИВНІ ЛОГІКИ КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ

Досліджено реномінативні логіки квазіарних предикатів. Вони посідають місце між пропозиційною та першопорядковими логіками. Виділено реномінативні логіки базового рівня, із предикатами слабкої рівності та з предикатами строгої рівності. Досліджено семантичні властивості таких логік, описано відношення логічного наслідку. На цій основі для реномінативних логік побудовано низку числень секвенційного типу.

© С.С. Шкільняк,
Д.Б. Волковицький, 2016

Вступ. Поняття і методи математичної логіки засвідчують високу ефективність при розв'язанні задач інформатики й програмування. Для цього розроблено багато різноманітних логічних систем (див., напр., [1]). Такі системи зазвичай базуються на класичній логіці предикатів. Ця логіка добре досліджена, має багатий досвід застосування, вона є основою низки спеціальних логік (модальних, темпоральних, епістемічних, програмних тощо). Водночас класична логіка має [2, 3] низку обмежень, що ускладнює її використання. Тому на перший план висувається проблема побудови нових логічних формалізмів, більше адаптованих до потреб програмування. Такими є композиційно-номінативні логіки (КНЛ) часткових предикатів. Вони базуються на загальних класах часткових відображень, заданих на наборах іменованих значень. Такі відображення названо квазіарними. Низку класів КНЛ описано та досліджено в [2 – 6].

Метою даної роботи є вивчення нових класів КНЛ – реномінативних логік. У таких логіках не використовуються композиції квантифікації, вони займають проміжне становище між пропозиційною логікою та чистими першопорядковими КНЛ.

Виділимо такі рівні реномінативних логік:

– базовий реномінативний (рівень РНЛ);

– реномінативний із предикатами слабкої рівності (рівень РНЛР);

– реномінативний із предикатами строгої рівності (рівень РНЛРС).

РНЛ вивчались в [2 – 4]. Дослідження РНЛ з рівністю започатковано в [6].

Вивчення реномінативних логік продовжено в даній роботі. Розглянуто семантичні властивості цих логік, досліджено властивості відношень логічного наслідку для множин формул. Для таких відношень у відповідних класах реномінативних логік часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних предикатів запропоновано числення секвенційного типу.

Поняття, які в цій роботі не визначаються, тлумачимо в сенсі робіт [2, 3].

Нехай V і A – множини, які будемо трактувати як множину предметних імен (змінних) і множину предметних значень. V-A-іменна множина (V-A-ІМ) – це однозначна функція вигляду $d: V\to A$. Множину всіх V-A-ІМ позначаємо ${}^VA$.

Для V-A-ІМ вводимо операції $\|_{-x}$ та ∇ таким чином: $d\,\|_{-x} = [v\mapsto a\in d \mid v\neq x]$; $d\nabla h = h\cup[v\mapsto a\in d \mid v\notin asn(h)]$. Тут $asn(d) = \{v\in V \mid v\mapsto a\in d$ для деякого $a\in A\}$.

Операцію реномінації $r^{v_1,\dots,v_n}_{x_1,\dots,x_n}$ задамо так: $r^{v_1,\dots,v_n}_{x_1,\dots,x_n}(d) = d\nabla[v_1\mapsto d(x_1),\dots,v_n\mapsto d(x_n)]$.

Введемо для $y_1,\dots,y_n$ позначення $\bar{y}$. Тоді замість $r^{v_1,\dots,v_n}_{x_1,\dots,x_n}$ також пишемо $r^{\bar{v}}_{\bar{x}}$.

Послідовне застосування $r^{\bar{v}}_{\bar{x}}$ та $r^{\bar{u}}_{\bar{y}}$ можна подати [2, 6] у вигляді однієї $r^{\bar{v}}_{\bar{x}}\bullet^{\bar{u}}_{\bar{y}}$, яку називають згорткою операцій $r^{\bar{v}}_{\bar{x}}$ та $r^{\bar{u}}_{\bar{y}}$. Тоді маємо $r^{\bar{v}}_{\bar{x}}(r^{\bar{u}}_{\bar{y}}(d)) = r^{\bar{v}}_{\bar{x}}\bullet^{\bar{u}}_{\bar{y}}(d)$.

Реномінація r без параметрів діє як тотожне відображення: $r(d) = d$.

Квазіарні предикати. V-A-квазіарний предикат – це довільна (часткова неоднозначна, взагалі кажучи) функція вигляду $P: {}^VA\to\{T, F\}$, де $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень. Область істинності та область хибності предиката P – це множини $T(P) = P^{-1}(T) = \{d\in{}^VA \mid T\in P(d)\}$ та $F(P) = P^{-1}(F) = \{d\in{}^VA \mid F\in P(d)\}$.

Предикат P однозначний $\Leftrightarrow T(P)\cap F(P) = \varnothing$.

Предикат P тотальний $\Leftrightarrow T(P)\cup F(P) = {}^VA$.

Ми трактуємо часткові неоднозначні V-A-квазіарні предикати як відповідності (відношення) між ${}^VA$ та множиною $\{T, F\}$. Назвемо їх (див. [3]) предикатами реляційного типу, або R-предикатами. Предикат $P: {}^VA\to\{T, F\}$ називають:

– неспростовним (частково істинним), якщо $F(P) = \varnothing$;

– виконуваним, якщо $T(P)\neq\varnothing$;

– тотожно істинним, якщо $T(P) = {}^VA$ та $F(P) = \varnothing$;

– тотально істинним, якщо $T(P) = {}^VA$;

– всюди невизначеним, якщо $T(P) = F(P) = \varnothing$.

Предметне ім'я $x\in V$ (строго) неістотне для V-A-квазіарного предиката P, якщо для довільних $d_1, d_2\in{}^VA$ маємо: $d_1\|_{-x} = d_2\|_{-x} \Rightarrow P(d_1) = P(d_2)$.

Часткові однозначні предикати назвемо P-предикатами, тотальні – T-предикатами, тотальні однозначні – TS-предикатами.

Класи V-A-квазіарних R-предикатів, P-предикатів, T-предикатів, TS-предикатів позначаємо відповідно PrR^A, PrP^A, PrT^A, $PrTS^A$ (при зафіксованій множині V).

Композиційні системи реномінативних логік. Семантичною основою КНЛ є композиційні предикатні системи. Для нефункціональних рівнів, зокрема, для реномінативних, такі системи мають вигляд $({}^VA, Pr^A, C)$ де Pr^A – певний клас V-A-квазіарних предикатів, C – множина композицій відповідного рівня.

На рівні РНЛ можна перейменовувати компоненти вхідних даних. Базовими композиціями цього рівня є логічні зв'язки Ė, Ę та реномінація $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$. Композиції Ė та Ę визначимо через області істинності й хибності відповідних предикатів:

$T(\neg P) = F(P)$; $F(\neg P) = T(P)$;

$T(P \vee Q) = T(P) \cup T(Q)$; $F(P \vee Q) = F(P) \cap F(Q)$.

Композицію $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ задаємо такою умовою: $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)(d) = P(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d))$ для всіх $d \in {}^{V}A$.

Похідні логічні зв'язки ì , &, $\leftrightarrow$ виражаються [2] Ė та Ę:

P ì *Q* = Ė*P*Ę*Q*; *P*&*Q* = Ė(Ė*P*ĘĖ*Q*); *P* é *Q* = (*P* ì *Q*)&(*Q* ì *P*).

Основні властивості пропозиційних композицій аналогічні властивостям відповідних класичних логічних зв'язок (див. [2, 3]).

Наведемо основні властивості композицій реномінації (див. також [2, 3, 6]).

R) $R(P) = P$ – тотожна реномінація (реномінація без параметрів);

RI) $R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$ – згортка пари тотожних імен;

RU) нехай $z \in V$ неістотне для предиката *P*. Тоді $R_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$;

R¬) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg P) = \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$ – R¬-дистрибутивність;

R∨) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P \vee Q) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Q)$ – R∨-дистрибутивність.

Композиція $R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}$ – згортка композиція $R_{\bar{y}}^{\bar{w}}$ і $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ – задається такою умовою: $R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (P)(d) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P))(d) = P(r_{\bar{y}}^{\bar{w}} \bullet_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d))$ для всіх $d \in {}^{V}A$. Отже маємо властивість:

RR) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P)) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (P)$.

Алгебру $RR_A^V = (PrR^A, CR)$, де CR = {Ė, Ę, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$}, назвемо реномінативною композиційною алгеброю квазіарних предикатів.

Композиції Ė, Ę, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ зберігають однозначність і тотальність *R*-предикатів, тому в RR_A^V виділимо такі підалгебри: $RP_A^V = (PrP^A, CR)$ – алгебра *P*-предикатів, $RT_A^V = (PrT^A, CR)$ – *T*-предикатів, $RTS_A^V = (PrTS^A, CR)$ – *TS*-предикатів.

Ė, Ę, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ зберігають [3] монотонність і антитонність квазіарних предикатів.

Композиційні системи реномінативних логік з рівністю. На рівнях РНЛР та РНЛРС додатково можна ототожнювати й розрізняти значення предметних імен за допомогою спеціальних 0-арних композицій – параметризованих за іменами предикатів рівності. Можна розглядати дві різновидності цих предикатів: слабкої (з точністю до визначеності) рівності $=_{xy}$ та строгої (точної) рівності $ø_{xy}$. Базові композиції РНЛР: Ė, Ę, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $=_{xy}$. Базові композиції РНЛРС: Ė, Ę, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $ø_{xy}$.

Предикати $=_{xy}$ та $ø_{xy}$ задаються їх областями істинності й хибності так:

$T(=_{xy}) = \{d \in {}^{V}A \mid d(x)\downarrow, d(y)\downarrow$ та $d(x) = d(y)\}$,

$F(=_{xy}) = \{d \in {}^{V}A \mid d(x)\downarrow, d(y)\downarrow$ та $d(x) \neq d(y)\}$;

$T(ø_{xy}) = \{d \in {}^{V}A \mid d(x)\downarrow, d(y)\downarrow$ та $d(x) = d(y)\} \cup \{d \in {}^{V}A \mid d(x)\uparrow$ та $d(y)\uparrow\}$,

$F(ø_{xy}) = \{d \in {}^{V}A \mid d(x)\downarrow, d(y)\downarrow$ та $d(x) \neq d(y)\} \cup \{d \in {}^{V}A \mid d(x)\downarrow, d(y)\uparrow$ або $d(x)\uparrow, d(y)\downarrow\}$.

Предикати $=_{xy}$ часткові однозначні, вони монотонні й еквітонні.

Предикати $\varnothing_{xy}$ тотальні однозначні, вони немонотонні й неантитонні.

Для $=_{xy}$ та $\varnothing_{xy}$ маємо рефлективність, симетричність, транзитивність.

RfP) Предикати $=_{xx}$ неспростовні; предикати $\varnothing_{xx}$ тотожно істинні.

SmP) Для кожного $d \in {}^V\!A$ маємо $=_{xy}(d) = =_{yx}(d)$ та $\varnothing_{xy}(d) = \varnothing_{yx}(d)$.

TrP) Для кожного $d \in {}^V\!A$ маємо:

$$=_{xy}(d) = T \text{ та } =_{yz}(d) = T \Rightarrow =_{xz}(d) = T; \quad \varnothing_{xy}(d) = T \text{ та } \varnothing_{yz}(d) = T \Rightarrow \varnothing_{xz}(d) = T.$$

Як наслідок маємо: кожний предикат вигляду $=_{xy} \& =_{yz} \rightarrow =_{xz}$ неспростовний; кожний предикат вигляду $\varnothing_{xy} \& \varnothing_{yz} \rightarrow \varnothing_{xz}$ тотожно істинний (адже він тотальний).

REP) Для кожних $P \in Pr^A$ та $d \in {}^V\!A$ маємо властивість заміни рівних:

$$=_{xy}(d) = T \Rightarrow R^{\bar{u},v}_{\bar{z},x}(P)(d) = R^{\bar{u},v}_{\bar{z},y}(P)(d); \quad \varnothing_{xy}(d) = T \Rightarrow R^{\bar{u},v}_{\bar{z},x}(P)(d) = R^{\bar{u},v}_{\bar{z},y}(P)(d).$$

Алгебру $RER^V_A = (PrR^A, CR_E)$, де CR_E = {Ė, Ę, $\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, $=_{xy}$}, назвемо реномінативною композиційною алгеброю квазіарних предикатів з слабкою рівністю.

Алгебру $RESR^V_A = (PrR^A, CR_{ES})$, де CR_{ES} = {Ė, Ę, $\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, $\varnothing_{xy}$}, назвемо реномінативною композиційною алгеброю квазіарних предикатів з строгою рівністю.

Можна виділити підалгебру $REP^V_A = (PrP^A, CR_E)$ алгебри RER^V_A та підалгебри $REST^V_A = (PrT^A, CR_{ES})$ і $RESTS^V_A = (PrTS^A, CR_{ES})$ алгебри $RESR^V_A$.

Мови та семантичні моделі реномінативних логік. Побудова композиційної предикатної алгебри дає змогу визначити мову логіки відповідного рівня.

Алфавіт мови РНЛ: символи базових композицій $\neg$, $\vee$, $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}$; множина Ps предикатних символів (сигнатура мови); множина V предметних імен.

Дамо індуктивне визначення множини Fr формул мови РНЛ.

Ф0) Кожний $p \in Ps$ є формулою; такі формули назвемо атомарними.

Ф1) Нехай $\Phi, \Psi \in Fr$; тоді $\neg\Phi \in Fr$, $\vee\Phi\Psi \in Fr$, $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\Phi \in Fr$.

Алфавіт мови РНЛР (мови РНЛРС) відрізняється від алфавіту мови РНЛ доданням символів $=_{xy}$ (символів $\equiv_{xy}$) до множини символів базових композицій. До визначення множини Fr додаємо такий пункт:

ФЕ) кожний $=_{xy}$, де $x, y \in V$, є атомарною формулою (мова РНЛР);

ФЕS) кожний $\equiv_{xy}$, де $x, y \in V$, є атомарною формулою (мова РНЛРС).

Вживаємо традиційні скорочення формул, використовуючи інфіксну форму запису та символи похідних композицій $\rightarrow$, &, $\leftrightarrow$ (див. [2, 3]).

Інтерпретуємо мови РНЛ, РНЛР, РНЛРС на композиційних системах квазіарних предикатів CS = (${}^V\!A$, Pr^A, C), де C – множина композицій відповідного рівня. Символи множини Ps позначають (виділяють) базові предикати в Pr^A, для цього задамо тотальне однозначне $I : Ps \rightarrow Pr^A$. Відображення інтерпретації формул $I : Fr \rightarrow Pr^A$ є продовженням відображення $I : Ps \rightarrow Pr^A$ згідно побудови формул із простіших за допомогою символів базових композицій. Маємо:

IФ) $I(\neg\Phi)$ = Ė$(I(\Phi))$, $I(\vee\Phi\Psi)$ = Ę$(I(\Phi), I(\Psi))$, $I(R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\Phi) = \mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(I(\Phi))$.

Для мови РНЛР та мови РНЛРС відповідно додатково маємо:

$$\text{IE) } I(=_{xy}) = =_{xy}.$$

$$\text{IES) } I(\equiv_{xy}) = \varnothing_{xy}.$$

Трійку $\boldsymbol{J} = (\text{CS}, Ps, I)$ назвемо інтерпретацією мови РНЛ (РНЛР, РНЛРС) сигнатури Ps. Скорочено інтерпретації мови позначаємо як (A, Ps, I) чи (A, I).

Предикат $I(\Phi)$ – значення формули Φ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ – позначимо Φ_J.

Ім'я $x\in V$ неістотне для формули Φ, якщо x неістотне для предиката Φ_J при кожній інтерпретації $\boldsymbol{J}$. Надалі розглядаємо логіки із виділеною підмножиною $U\subseteq V$ тотально неістотних (неістотних для всіх базових предикатів) імен.

Для КНЛ множину тотально неістотних імен традиційно задають [2, 3] за допомогою тотальної $\nu : Ps\to 2^V$, тоді $U = \bigcap_{p\in Ps} \nu(p)$. Для визначення множин гарантовано неістотних для формул імен таку ν продовжуємо [2, 3] до $\nu : Fr\to 2^V$.

У випадках РНЛР та РНЛРС маємо $\nu(=_{xy}) = V\setminus\{x, y\}$ та $\nu(\equiv_{xy}) = V\setminus\{x, y\}$.

Якщо $x\in\nu(\Phi)$, то (див. [2, 3]) ім'я x неістотне для формули Φ.

Виділення в реномінативних логіках підалгебр T-предикатів, P-предикатів, TS-предикатів виділяє відповідні класи інтерпретацій: загальний клас R-інтерпретацій та підкласи P-інтерпретацій, T-інтерпретацій, TS-інтерпретацій. Такі класи традиційно називають семантиками, їх позначимо $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{TS}$.

Нехай ~ – деякий клас інтерпретацій (семантика).

Формула Φ неспростовна (частково істинна) при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, що позначаємо $\boldsymbol{J}\models\Phi$, якщо предикат Φ_J – неспростовний. Формула Φ неспростовна (частково істинна) в ~, що позначаємо ${}^{\alpha}\!\models\Phi$, якщо $\boldsymbol{J}\models\Phi$ при кожній $\boldsymbol{J}\in$~.

Формула Φ тотально істинна при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, що позначаємо $\boldsymbol{J}|\!\equiv\Phi$, якщо предикат Φ_J – тотально істинний. Формула Φ тотально істинна в ~, що позначаємо ${}^{\alpha}|\!\equiv\Phi$, якщо $\boldsymbol{J}|\!\equiv\Phi$ при кожній $\boldsymbol{J}\in$~.

Формула Φ тотожно істинна при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, що позначаємо $\boldsymbol{J}\models_{id}\Phi$, якщо предикат Φ_J – тотожно істинний. Формула Φ тотожно істинна в ~, що позначаємо ${}^{\alpha}\!\models_{id}\Phi$, якщо $\boldsymbol{J}\models_{id}\Phi$ при кожній $\boldsymbol{J}\in$~.

Якщо семантика ~ зафіксована, то замість ${}^{\alpha}\!\models$, ${}^{\alpha}|\!\equiv$, ${}^{\alpha}\!\models_{id}$ пишемо $\models$, $|\!\equiv$, $\models_{id}$.

Формула Φ виконувана при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, якщо предикат Φ_J – виконуваний. Формула Φ виконувана в ~, якщо Φ виконувана при деякій $\boldsymbol{J}\in$~.

Твердження 1. $\boldsymbol{J}\models_{id}\Phi \Rightarrow \boldsymbol{J}\models\Phi$, $\boldsymbol{J}\models_{id}\Phi \Rightarrow \boldsymbol{J}|\!\equiv\Phi$; $\models_{id}\Phi \Rightarrow\ \models\Phi$, $\models_{id}\Phi \Rightarrow |\!\equiv\Phi$.

У випадку РНЛ маємо:

Теорема 1. 1) $\{\Phi\mid {}^{R}\!\models\Phi\} = \{\Phi\mid {}^{R}|\!\equiv\Phi\} = \{\Phi\mid {}^{R}\!\models_{id}\Phi\} = \varnothing$;

2) $\{\Phi\mid {}^{P}|\!\equiv\Phi\} = \{\Phi\mid {}^{P}\!\models_{id}\Phi\} = \{\Phi\mid {}^{T}\!\models\Phi\} = \{\Phi\mid {}^{T}\!\models_{id}\Phi\} = \varnothing$;

3) $\{\Phi\mid {}^{P}\!\models\Phi\} = \{\Phi\mid {}^{T}|\!\equiv\Phi\} = \{\Phi\mid {}^{TS}\!\models_{id}\Phi\} = \{\Phi\mid {}^{TS}\!\models\Phi\} = \{\Phi\mid {}^{TS}|\!\equiv\Phi\}$.

У випадках T-семантики і TS-семантики предикати слабкої рівності відсутні. Отже, для РНЛР можна розглядати лише R-семантику і P-семантику.

Предикати $=_{xy}$ та $\varnothing_{xy}$ будемо також традиційно позначати як $x = y$ та $x\equiv y$.

Твердження 2. ${}^{R}|= x = x$, ${}^{R}|= x = y \leftrightarrow y = x$; ${}^{P}|= x = x$, ${}^{P}|= x = y \leftrightarrow y = x$.

Таким чином, теорему 1 для випадку РНЛР переформулюємо як теорему 2:

Теорема 2. 1) $\{\Phi \mid {}^{R}|\equiv \Phi\} = \{\Phi \mid {}^{R}|=_{id} \Phi\} = \varnothing$; $\{\Phi \mid {}^{R}|= \Phi\} \neq \varnothing$;

2) $\{\Phi \mid {}^{P}|\equiv \Phi\} = \{\Phi \mid {}^{P}|=_{id} \Phi\} = \varnothing$; $\{\Phi \mid {}^{P}|= \Phi\} \neq \varnothing$.

Твердження 3. ${}^{\alpha}|=_{id} x \equiv x$ та ${}^{\alpha}|=_{id} x \equiv y \leftrightarrow y \equiv x$ (тут α – одне з R, P, T, TS).

Отже, у випадку РНЛРС пп.1 і 2 теореми 1 невірні, а правильним є лише п. 3.

Відношення логічного наслідку. На множині формул можна ввести низку відношень [2, 3], які формалізують поняття логічного наслідку. Спочатку задамо відношення наслідку при фіксованій інтерпретації $\boldsymbol{J}$. Нехай $\Gamma, \Delta \subseteq Fr$; позначаємо $\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_J)$ як $T^{\wedge}(\Gamma_J)$, $\bigcap_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_J)$ як $F^{\wedge}(\Delta_J)$, $\bigcup_{\Psi\in\Delta} T(\Psi_J)$ як $T^{\vee}(\Delta_J)$, $\bigcup_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_J)$ як $F^{\vee}(\Gamma_J)$.

Δ є ID-наслідком Γ при $\boldsymbol{J}$ (позначаємо $\Gamma\ {}_{J}|=_{ID} \Delta$), якщо $T^{\wedge}(\Gamma_J) \cap F^{\wedge}(\Delta_J) = \varnothing$.

Δ є T-наслідком Γ при $\boldsymbol{J}$ (позначаємо $\Gamma\ {}_{J}|=_{T} \Delta$), якщо $T^{\wedge}(\Gamma_J) \subseteq T^{\vee}(\Delta_J)$.

Δ є F-наслідком Γ при $\boldsymbol{J}$ (позначаємо $\Gamma\ {}_{J}|=_{F} \Delta$), якщо $F^{\wedge}(\Delta_J) \subseteq F^{\vee}(\Gamma_J)$.

Δ є TF-наслідком Γ при $\boldsymbol{J}$ (позначаємо $\Gamma\ {}_{J}|=_{TF} \Delta$), якщо $\Gamma\ {}_{J}|=_{T} \Delta$ та $\Gamma\ {}_{J}|=_{F} \Delta$.

Відповідні відношення логічного наслідку в семантиці ~ задаємо за схемою: $\Gamma\ {}^{\alpha}|=_{*} \Delta$, якщо $\Gamma\ {}_{J}|=_{*} \Delta$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \sim$.

Окремим випадком цих відношень є відповідні відношення для пар формул.

У випадку TS-семантики усі наведені відношення логічного наслідку втрачають відмінності і стають єдиним відношенням, яке позначимо ${}^{TS}|=$.

Для наведених відношень логічного наслідку маємо [3] співвідношення:

$${}^{R}|=_{T} = {}^{R}|=_{F} = {}^{R}|=_{TF};\ {}^{P}|=_{IR} = {}^{T}|=_{DI} = {}^{TS}|=;\ {}^{P}|=_{T} = {}^{T}|=_{F};\ {}^{P}|=_{F} = {}^{T}|=_{T};\ {}^{P}|=_{TF} = {}^{T}|=_{TF}.$$

Серед цих відношень лише 5 різних, тому достатньо розглядати ${}^{P}|=_{IR}$, ${}^{P}|=_{T}$, ${}^{P}|=_{F}$, ${}^{P}|=_{TF}$, ${}^{R}|=_{TF}$. Відношення ${}^{P}|=_{IR}$, ${}^{P}|=_{T}$, ${}^{P}|=_{F}$, ${}^{P}|=_{TF}$ далі позначимо $|=_{IR}$, $|=_{T}$, $|=_{F}$, $|=_{TF}$.

Наведені відношення логічного наслідку співвідносяться [3] так:

$${}^{R}|=_{TF} \subset |=_{TF} = |=_{T} \cap |=_{F};\ |=_{TF} \subset |=_{T} \subset |=_{IR},\ |=_{TF} \subset |=_{F} \subset |=_{IR}.$$

Відношення логічного наслідку для пар формул індукують відношення логічної еквівалентності. Спочатку задамо відношення ${}_{J}\sim_{T}$, ${}_{J}\sim_{F}$, ${}_{J}\sim_{TF}$, ${}_{J}\sim_{IR}$, ${}_{J}\sim_{DI}$ еквівалентності при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ за схемою: $\Phi\ {}_{J}\sim_{*} \Psi$, якщо $\Phi\ {}_{J}|=_{*} \Psi$ та $\Psi\ {}_{J}|=_{*} \Phi$.

Відношення логічної еквівалентності ${}^{P}\sim_{IR}$, ${}^{P}\sim_{T}$, ${}^{P}\sim_{F}$, ${}^{P}\sim_{TF}$, ${}^{R}\sim_{TF}$ визначаємо за схемою: $\Phi\ {}^{\alpha}\sim_{*} \Psi$, якщо $\Phi\ {}^{\alpha}|=_{*} \Psi$ та $\Psi\ {}^{\alpha}|=_{*} \Phi$. Тоді $\Phi\ {}^{\alpha}\sim_{*} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_{J}\sim_{*} \Psi$ для всіх $\boldsymbol{J} \in \sim$.

Відношення ${}^{P}\sim_{IR}$, ${}^{P}\sim_{T}$, ${}^{P}\sim_{F}$, ${}^{P}\sim_{TF}$ далі позначимо $\sim_{IR}$, $\sim_{T}$, $\sim_{F}$, $\sim_{TF}$.

Логічна зв'язка $\to$ узгоджується з $|=_{IR}$: $\Phi |=_{IR} \Psi \Leftrightarrow {}^{P}|= \Phi \to \Psi \Leftrightarrow {}^{T}|\equiv \Phi \to \Psi$.

Логічна зв'язка $\leftrightarrow$ узгоджується з $\sim_{IR}$: $\Phi \sim_{IR} \Psi \Leftrightarrow {}^{P}|= \Phi \leftrightarrow \Psi \Leftrightarrow {}^{T}|\equiv \Phi \leftrightarrow \Psi$.

Для відношення ${}_{J}\sim_{TF}$ маємо: $\Phi\ {}_{J}\sim_{TF} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) = T(\Psi_J)$ та $F(\Phi_J) = F(\Psi_J)$.

Отже, $\Phi\ {}_{J}\sim_{TF} \Psi$ означає, що Φ_J та Ψ_J – це один і той же предикат.

Теорема 3. У випадку РНЛРС: 1) ${}^{P}|=_{id} \Phi \to \Psi \Rightarrow \Phi |=_{TF} \Psi$; зворотнє неправильне;

2) ${}^{P}|=_{id} \Phi \leftrightarrow \Psi \Rightarrow \Phi \sim_{TF} \Psi$; зворотнє неправильне;

3) ${}^{R}|=_{id} \Phi \to \Psi \Rightarrow \Phi\ {}^{R}|=_{TF} \Psi$; зворотнє неправильне;

4) ${}^{R}|=_{id} \Phi \leftrightarrow \Psi \Rightarrow \Phi\ {}^{R}\sim_{TF} \Psi$; зворотнє неправильне.

Водночас для РНЛ та РНЛР маємо $\{\Phi \mid {}^{P}|=_{id} \Phi\} = \varnothing$ та $\{\Phi \mid {}^{R}|=_{id} \Phi\} = \varnothing$.

Семантичні властивості формул. На основі властивостей предикатів маємо відповідні властивості формул. Пропозиційні властивості розглянуто в [2], тому наведемо основні властивості, пов'язані з реномінаціями та рівністю.

R) $R(\Phi)\ {}^{\alpha}\!\sim_{TF}\ \Phi$.

RI) $R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)\ {}^{\alpha}\!\sim_{TF}\ R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$.

RU) Нехай $z\in V$ неістотне для Ф; тоді $R_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)\ {}^{\alpha}\!\sim_{TF}\ R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$.

RR) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))\ {}^{\alpha}\!\sim_{TF}\ R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)$.

R¬) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\ {}^{\alpha}\!\sim_{TF}\ \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$.

R∨) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)\ {}^{\alpha}\!\sim_{TF}\ R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)$.

Властивості реномінації предикатів рівності (спрощення):

RD) За умови $x, y\notin\{\bar{u}\}$ маємо: $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(=_{xy})\ {}^{\alpha}\!\sim_{TF}\ =_{xy}$ та $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\equiv_{xy})\ {}^{\alpha}\!\sim_{TF}\ \equiv_{xy}$;

за умови $y\notin\{\bar{u}\}$ маємо: $R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(=_{xy})\ {}^{\alpha}\!\sim_{TF}\ =_{zy}$ та $R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\equiv_{xy})\ {}^{\alpha}\!\sim_{TF}\ \equiv_{zy}$;

$R_{\bar{v},z,u}^{\bar{u},x,y}(=_{xy})\ {}^{\alpha}\!\sim_{TF}\ =_{zu}$ та $R_{\bar{v},z,u}^{\bar{u},x,y}(\equiv_{xy})\ {}^{\alpha}\!\sim_{TF}\ \equiv_{zu}$.

Для предикатів рівності маємо властивості рефлективності й симетричності (див. твердження 2 і 3), а також транзитивності й заміни рівних.

Rf) ${}^{P}\!\models x=x$, ${}^{R}\!\models x=x$; ${}^{\alpha}\!\models_{id} x\equiv x$.

Sm) ${}^{P}\!\models x=y\leftrightarrow y=x$, ${}^{R}\!\models x=y\leftrightarrow y=x$; ${}^{\alpha}\!\models_{id} x\equiv y\leftrightarrow y\equiv x$.

Tr) ${}^{P}\!\models x=y\to y=z\to x=z$, ${}^{R}\!\models x=y\to y=z\to x=z$; ${}^{\alpha}\!\models_{id} x\equiv y\to y\equiv z\to x\equiv z$.

ER) ${}^{\alpha}\!\models x=y\to(R_{\bar{z},x}^{\bar{u},v}(\Phi)\leftrightarrow R_{\bar{z},y}^{\bar{u},v}(\Phi))$, α – це P чи R;

${}^{\alpha}\!\models x\equiv y\to(R_{\bar{z},x}^{\bar{u},v}(\Phi)\leftrightarrow R_{\bar{z},y}^{\bar{u},v}(\Phi))$, α – це P чи R;

${}^{\alpha}\!\models_{id} x\equiv y\to(R_{\bar{z},x}^{\bar{u},v}(\Phi)\leftrightarrow R_{\bar{z},y}^{\bar{u},v}(\Phi))$, α – це T чи TS.

Основою еквівалентних перетворень формул є [2] теорема еквівалентності. Вона формулюється для відношень ${}^{R}\!\sim_{TF}$, $\sim_{TF}$, $\sim_{IR}$. Для $\sim_{T}$ та $\sim_{F}$ теорема неправильна.

Теорема 4. Нехай Ф' отримано з формули Ф заміною деяких входжень $\Phi_1, ..., \Phi_n$ на $\Psi_1, ..., \Psi_n$. Якщо $\Phi_1\ {}^{\alpha}\!\sim_{*}\Psi_1$, ..., $\Phi_n\ {}^{\alpha}\!\sim_{*}\Psi_n$, то $\Phi\ {}^{\alpha}\!\sim_{*}\Phi'$.

Розглянемо нормальні форми в реномінативних логіках. Формула Ф знаходиться в нормальній формі, або нормальна [2], якщо символи реномінації у Ф застосовуються тільки до предикатних символів, символи реномінації із Ф не мають тотожних пар імен та $\{\bar{v}\}\cap U=\varnothing$ для всіх підформул $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}p$ формули Ф.

Теорема 5. Для кожної формули Ф можна збудувати нормальну формулу Ψ таку, що $\Phi\ {}^{\alpha}\!\sim_{TF}\Psi$.

Для зведення формули Ф до нормальної форми використовуємо R, RI, RU, RR, R¬, R∨ та теорему еквівалентності (детальніше див. [2]). У випадках РНЛР чи РНЛРС згідно RD додатково усуваємо реномінації, застосовані до $=_{xy}$ чи $\equiv_{xy}$.

Нормальну формулу Ψ, утворену з Ф за допомогою перетворень на основі R, RI, RU, RR, R¬, R∨ (а також RD), назвемо нормалізантою формули Ф.

Формулу назвемо пропозиційно нерозкладною, якщо вона атомарна або має вигляд $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$. Множину пропозиційно нерозкладних формул позначимо Fr_0.

Істиннісна оцінка мови – це тотальне відображення $\tau : Fr_0 \to \{T, F\}$.

Таке відображення продовжимо до $\tau : Fr \to \{T, F\}$ природним чином:

$\tau(\neg\Phi) = T \Leftrightarrow \tau(\Phi) = F$; $\tau(\vee\Phi\Psi) = T \Leftrightarrow \tau(\Phi) = T$ або $\tau(\Psi) = T$.

Враховуючи наведені вище властивості предикатів рівності Rf, Sm, Tr, ERΦ, у випадках РНЛР та РНЛРС на відображення τ накладаємо додаткові умови.

Випадок РНЛР: $\tau(x = x) = T$; $\tau(x = y) = \tau(y = x)$;

$\tau(x = y) = \tau(x = y) = T \Rightarrow \tau(x = z) = T$; $\tau(x = y) = T \Rightarrow \tau(R_{\bar{z},x}^{\bar{u},v}(\Phi)) = \tau(R_{\bar{z},y}^{\bar{u},v}(\Phi))$.

Випадок РНЛРС: $\tau(x \equiv x) = T$; $\tau(x \equiv y) = \tau(y \equiv x)$;

$\tau(x \equiv y) = \tau(x \equiv y) = T \Rightarrow \tau(x \equiv z) = T$; $\tau(x \equiv y) = T \Rightarrow \tau(R_{\bar{z},x}^{\bar{u},v}(\Phi)) = \tau(R_{\bar{z},y}^{\bar{u},v}(\Phi))$.

Формула Φ – тавтологія, якщо $\tau(\Phi) = T$ для кожної істиннісної оцінки τ.

Твердження 4. Φ тавтологія $\Rightarrow {}^{P}|= \Phi$, ${}^{T}|\equiv \Phi$, ${}^{TS}|=_{id} \Phi$.

Відношення тавтологічного наслідку $|=_t$ і тавтологічної еквівалентності $\sim_t$ вводимо [2, 3] так: $\Phi |=_t \Psi$, якщо $\Phi\to\Psi$ – тавтологія; $\Phi \sim_t \Psi \Leftrightarrow \Phi |=_t \Psi$ та $\Psi |=_t \Phi$.

Для відношення $|=_t$ маємо: $|=_t \subset |=_{IR}$; $|=_t \not\subset |=_T$, $|=_t \not\subset |=_F$, ${}^{R}|=_{TF} \not\subset |=_t$.

Формула Φ – субтавтологія, якщо її нормалізанта – тавтологія.

Роль субтавтологій як істинних формул реномінативних логік установлює.

Теорема 6. Φ субтавтологія $\Leftrightarrow {}^{P}|= \Phi \Leftrightarrow {}^{T}|\equiv \Phi \Leftrightarrow {}^{TS}|=_{id} \Phi$.

Властивості відношення логічного наслідку для множин формул. Для всіх відношень маємо монотонність: нехай $\Gamma \subseteq \Lambda$ та $\Delta \subseteq \Sigma$, тоді $\Gamma |= \Delta \Rightarrow \Lambda |= \Sigma$.

Теорема 7. Нехай $\Phi \sim_* \Psi$, тоді: $\Phi, \Gamma |=_* \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma |=_* \Delta$; $\Gamma |=_* \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma |=_* \Delta, \Psi$.

Тут $\sim_*$ – одне з відношень ${}^{R}\sim_{TF}$, $\sim_{TF}$, $\sim_{IR}$; $|=_*$ – одне з ${}^{R}|=_{TF}$, $|=_{TF}$, $|=_{IR}$.

Властивості декомпозиції формул (тут $|=$ – одне з ${}^{R}|=_{TF}$, $|=_{TF}$, $|=_T$, $|=_F$, $|=_{IR}$):

$\neg\neg_L$) $\neg\neg\Phi, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma |= \Delta$;

$\neg\neg_R$) $\Gamma |= \Delta, \neg\neg\Phi \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \Phi$;

$\vee_L$) $\Phi\vee\Psi, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma |= \Delta$ та $\Psi, \Gamma |= \Delta$;

$\vee_R$) $\Gamma |= \Delta, \Phi\vee\Psi \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \Phi, \Psi$;

$\neg\vee_L$) $\neg(\Phi\vee\Psi), \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \neg\Phi, \neg\Psi, \Gamma |= \Delta$;

$\neg\vee_R$) $\Gamma |= \Delta, \neg(\Phi\vee\Psi) \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \neg\Phi$ та $\Gamma |= \Delta, \neg\Psi$.

Для $|=_{IR}$ додатково маємо (проте це неправильно [3] для ${}^{R}|=_{TF}$, $|=_{TF}$, $|=_T$, $|=_F$):

$\neg_L$) $\neg\Phi, \Gamma |=_{IR} \Delta \Leftrightarrow \Gamma |=_{IR} \Delta, \Phi$;

$\neg_R$) $\Gamma |=_{IR} \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma |=_{IR} \Delta$.

Властивості, які гарантують відповідне відношення логічного наслідку:

C) $\Phi, \Gamma |= \Delta, \Phi$ (тут $|=$ – це одне з ${}^{R}|=_{TF}$, $|=_{TF}$, $|=_T$, $|=_F$, $|=_{IR}$);

CL) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma |= \Delta$ ($|=$ – це $|=_T$ чи $|=_{IR}$);

CR) $\Gamma |= \Delta, \Phi, \neg\Phi$ ($|=$ – це $|=_F$ чи $|=_{IR}$);

CLR) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma |=_{TF} \Delta, \Psi, \neg\Psi$.

Для $|=_{IR}$ в силу $\neg_L$ та $\neg_R$ властивості *CLR*, *CL*, *CR* зводяться до *C*.

Наведемо властивості, пов'язані з реномінацією. Вони отримуються на основі наведених вище властивостей R, RI, RU, RR, R¬, R∨. Кожна з них продукує 4 відповідні властивості для кожного з відношень логічного наслідку, коли виділена формула чи її заперечення знаходиться у лівій чи правій частині цього відношення. Наведемо для прикладу властивості $\mathrm{RU_L}$ та $\neg\mathrm{R}\vee_\mathrm{R}$:

$\mathrm{RU_L}$) $R^{z,\bar{v}}_{y,\bar{x}}(\Phi),\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi),\Gamma \models \Delta$ за умови $z\in\nu(\Phi)$;

$\neg\mathrm{R}\vee_\mathrm{R}$) $\Gamma \models \Delta, \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg(R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi))$.

Для $\models_{IR}$ в силу $\neg_\mathrm{L}$ та $\neg_\mathrm{R}$ властивості вигляду ¬R∗ є похідними.

Властивості відношень логічного наслідку для рівності. Розглянемо властивості слабкої рівності. Спочатку зауважимо, що знімати заперечення, переносячи $\neg\, x=y$ з лівої частини відношення у праву і навпаки, можна лише для $\models_{IR}$ (це випливає з $\neg_\mathrm{L}$ та $\neg_\mathrm{R}$), водночас для $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$, ${}^R\!\models_{TF}$ це робити не можна.

Маємо $\neg\, x=y,\ x=x \models_T y=y$, водночас $x=x \not\models_T y=y,\ x=y$.

Справді, $T(\neg\, x=y\ \&\ x=x)\subseteq\{d\mid d(x)\!\downarrow$ та $d(y)\!\downarrow\}\subseteq\{d\mid d(y)\!\downarrow\} = T(y=y)$; проте для $d=[x\mapsto a]$ маємо $d\in T(x=x)$ та $d\notin T(y=y\vee x=y) = T(y=y)\cup T(x=y) = T(y=y)$.

Подібним чином отримуємо: $\neg\, y=y \models_F x=y, \neg x=x$, проте $\neg y=y, \neg x=y \not\models_F \neg x=x$.

На основі Sm та Tr отримуємо такі властивості:

$\mathrm{Sm_L}$) $x=y, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow x=y, y=x, \Gamma \models \Delta$;

$\mathrm{Sm_R}$) $\Gamma \models \Delta, \neg\, x=y \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg\, x=y, \neg\, y=x$;

$\mathrm{Tr_L}$) $x=y, y=z, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow x=y, y=z, x=z, \Gamma \models \Delta$ (тут $\models$ – це $\models_{IR}$ чи $\models_T$);

$\mathrm{Tr_R}$) $\Gamma \models \Delta, \neg\, x=y, \neg\, y=z \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg\, x=y, \neg\, y=z, \neg\, x=z$ ($\models$ – це $\models_{IR}$ чи $\models_F$).

$\mathrm{Tr_L}$ і $\mathrm{Tr_R}$ випливають з того, що $T(x=y)\cap T(y=z) = T(x=y)\cap T(y=z)\cap T(x=z)$. Водночас $x=y, y=z, x=z \models_F x=y\ \&\ y=z\ \&\ x=z$ та $x=y, y=z \not\models_F x=y\ \&\ y=z\ \&\ x=z$, звідки $\mathrm{Tr_L}$ неправильна для $\models_F$;
також $\neg\, x=y\vee\neg\, y=z\vee\neg\, x=z \models_T \neg\, x=y, \neg\, y=z, \neg\, x=z$
та $\neg\, x=y\vee\neg\, y=z\vee\neg\, x=z \not\models_T \neg\, x=y, \neg\, y=z$, звідки $\mathrm{Tr_R}$ неправильна для $\models_T$.

Таким чином, транзитивність слабкої рівності порушується для відношень $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$, ${}^R\!\models_{TF}$, тому для РНЛР адекватним залишається лише відношення $\models_{IR}$.

Властивість RD індукує властивості реномінації рівності для відношення $\models_{IR}$.

$\mathrm{RD_L}$) $R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(x=y),\Gamma \models_{IR} \Delta \Leftrightarrow x=y,\Gamma \models_{IR} \Delta$ за умови $x,y\notin\{\bar{u}\}$;

$R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(x=y),\Gamma \models_{IR} \Delta \Leftrightarrow z=y,\Gamma \models_{IR} \Delta$ за умови $y\notin\{\bar{u}\}$;

$R^{\bar{u},x,y}_{\bar{v},z,u}(x=y),\Gamma \models_{IR} \Delta \Leftrightarrow z=u,\Gamma \models_{IR} \Delta$;

$\mathrm{RD_R}$) $\Gamma \models_{IR} R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(x=y),\Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_{IR} x=y,\Delta$ за умови $x,y\notin\{\bar{u}\}$;

$\Gamma \models_{IR} R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(x=y),\Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_{IR} z=y,\Delta$ за умови $y\notin\{\bar{u}\}$;

$\Gamma \models_{IR} R^{\bar{u},x,y}_{\bar{v},z,u}(x=y),\Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_{IR} z=u,\Delta$.

Властивість ER індукує властивості заміни рівних для відношення $\models_{IR}$:

$\mathrm{ER_L}$) $x=y, R^{\bar{u},z}_{\bar{v},x}(\Phi),\Gamma \models_{IR} \Delta \Leftrightarrow x=y, R^{\bar{u},z}_{\bar{v},x}(\Phi), R^{\bar{u},z}_{\bar{v},y}(\Phi),\Gamma \models_{IR} \Delta$;

$\mathrm{ER_R}$) $x=y,\Gamma \models_{IR} R^{\bar{u},z}_{\bar{v},x}(\Phi),\Delta \Leftrightarrow x=y,\Gamma \models_{IR} R^{\bar{u},z}_{\bar{v},x}(\Phi), R^{\bar{u},z}_{\bar{v},y}(\Phi),\Delta$.

Властивість Rf індукує умову гарантованої наявності відношення $|=_{IR}$:

C_{Rf}) завжди маємо $\Gamma \,|=_{IR} x = x, \Delta$.

Властивості предикатів $x \equiv y$ формулюємо для кожного з ${}^{R}|=_{TF}$, $|=_{TF}$, $|=_{T}$, $|=_{F}$, $|=_{IR}$. Зокрема, з $\neg\, x \equiv y$ і $\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(x \equiv y)$ можна знімати $\neg$ з перенесенням в інший бік:

$\mathrm{E_{LR}}$) $\Gamma \,|= \neg\, x \equiv y, \Delta \Leftrightarrow x \equiv y, \Gamma \,|= \Delta$ та $\neg\, x \equiv y, \Gamma \,|= \Delta \Leftrightarrow \Gamma \,|= x \equiv y, \Delta$;

$\mathrm{RE_{LR}}$) $\Gamma \,|= \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(x \equiv y), \Delta \;\Leftrightarrow\; R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(x \equiv y), \Gamma \,|= \Delta$

та $\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(x \equiv y), \Gamma \,|= \Delta \;\Leftrightarrow\; \Gamma \,|= R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(x \equiv y), \Delta$.

Властивості Rf, Sm, Tr, RD, ER індукують для строгої рівності властивості C_{RfS}, SmS, TrS, $\mathrm{RDS_L}$, $\mathrm{RDS_R}$, $\mathrm{ERS_L}$, $\mathrm{ERS_R}$, які аналогічні відповідним C_{Rf}, $\mathrm{Sm_L}$, $\mathrm{Tr_L}$, $\mathrm{RD_L}$, $\mathrm{RD_R}$, $\mathrm{ER_L}$, $\mathrm{ER_R}$, лише замість = пишемо $\equiv$, а також $\neg\mathrm{ERS_L}$ та $\neg\mathrm{ERS_R}$.

Секвенційні числення реномінативних логік. Секвенційні числення формалізують відношення логічного наслідку для множин формул. Ми трактуємо секвенції як множини формул, специфікованих символами $\vdash$ та $\dashv$. Секвенційні числення будуємо так: секвенція $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ вивідна $\Leftrightarrow$ $\Gamma \,|= \Delta$. Секвенція Σ вивідна, якщо існує замкнене секвенційне дерево (кожний його лист – замкнена секвенція) з коренем Σ. Замкненість $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ означає $\Gamma \,|= \Delta$. Секвенційне числення задаємо базовими секвенційними формами і умовами замкненості секвенції.

Базова умова замкненості секвенції $\vdash\Gamma\dashv\Delta$:

C) існує формула Φ така, що $\Phi\in\Gamma$ та $\Phi\in\Delta$.

Наступні додаткові умови замкненості $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ істотні для ${}^{R}|=_{TF}$, $|=_{TF}$, $|=_{T}$, $|=_{F}$:

CL) існує формула Φ: $\Phi\in\Gamma$ та $\neg\Phi\in\Gamma$;

CR) існує формула Φ: $\Phi\in\Delta$ та $\neg\Phi\in\Delta$;

CLR) існують формули Φ та Ψ такі: $\Phi\in\Gamma$, $\neg\Phi\in\Gamma$, $\Psi\in\Delta$, $\neg\Psi\in\Delta$.

На рівні РНЛ отримуємо такі секвенційні числення:

числення *RG* формалізує ${}^{R}|=_{TF}$. Умова замкненості секвенції C;

числення *RLR* формалізує $|=_{TF}$. Умова замкненості секвенції: $\mathrm{C} \vee \mathrm{CLR}$;

числення *RL* формалізує $|=_{T}$. Умова замкненості секвенції: $\mathrm{C} \vee \mathrm{CL}$;

числення *RR* формалізує $|=_{F}$. Умова замкненості секвенції: $\mathrm{C} \vee \mathrm{CR}$;

числення *RC* формалізує $|=_{IR}$. Умова замкненості секвенції: C.

Секвенційні форми індукуються властивостями відношень логічного наслідку. Властивості $\mathrm{R_L}$, $\mathrm{R_R}$, $\neg\mathrm{R_L}$, $\neg\mathrm{R_R}$, $\mathrm{RI_L}$, $\mathrm{RI_R}$, $\neg\mathrm{RI_L}$, $\neg\mathrm{RI_R}$, $\mathrm{RU_L}$, $\mathrm{RU_R}$, $\neg\mathrm{RU_L}$, $\neg\mathrm{RU_R}$ та $\mathrm{RR_L}$, $\mathrm{RR_R}$, $\neg\mathrm{RR_L}$, $\neg\mathrm{RR_R}$, $\mathrm{R\neg_L}$, $\mathrm{R\neg_R}$, $\neg\mathrm{R\neg_L}$, $\neg\mathrm{R\neg_R}$, $\mathrm{R\vee_L}$, $\mathrm{R\vee_R}$, $\neg\mathrm{R\vee_L}$, $\neg\mathrm{R\vee_R}$ індукують відповідні секвенційні форми спрощення $\vdash$R, $\dashv$R, $\vdash\neg$R, $\dashv\neg$R, $\vdash$RI, $\dashv$RI, $\vdash\neg$RI, $\dashv\neg$RI, $\vdash$RU, $\dashv$RU, $\vdash\neg$RU, $\dashv\neg$RU та еквівалентних перетворень $\vdash$RR, $\dashv$RR, $\vdash\neg$RR, $\dashv\neg$RR, $\vdash$R$\neg$, $\dashv$R$\neg$, $\vdash\neg$R$\neg$, $\dashv\neg$R$\neg$, $\vdash$R$\vee$, $\dashv$R$\vee$, $\vdash\neg$R$\vee$, $\dashv\neg$R$\vee$.

Кожна з властивостей R, RI, RU, RR, R$\neg$, R$\vee$ індукує 4 форми вигляду $\dfrac{\vdash\Psi,\Sigma}{\vdash\Phi,\Sigma}$, $\dfrac{\dashv\Psi,\Sigma}{\dashv\Phi,\Sigma}$, $\dfrac{\vdash\neg\Psi,\Sigma}{\vdash\neg\Phi,\Sigma}$, $\dfrac{\dashv\neg\Psi,\Sigma}{\dashv\neg\Phi,\Sigma}$, де формула Φ знаходиться в лівій частині відношення логічного наслідку для цієї властивості, а формула Ψ – в правій.

Наведемо для прикладу секвенційні форми $_{\vdash}$RU та $_{\dashv}\neg$RR:

$$_{\vdash}\mathrm{RU}\ \frac{_{\vdash}R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi),\Sigma}{_{\vdash}R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(\Phi),\Sigma},\ \text{де } y\in\nu(\Phi); \qquad _{\dashv}\neg\mathrm{RR}\ \frac{_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi),\Sigma}{_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)),\Sigma}.$$

Властивості $\neg\neg_{\mathrm{L}}$, $\neg\neg_{\mathrm{R}}$, $\vee_{\mathrm{L}}$, $\neg\vee_{\mathrm{L}}$, $\neg\vee_{\mathrm{L}}$, $\neg\vee_{\mathrm{R}}$ задають форми декомпозиції формул $_{\vdash}\neg\neg$, $_{\dashv}\neg\neg$, $_{\vdash}\vee$, $_{\dashv}\vee$, $_{\vdash}\neg\vee$, $_{\dashv}\neg\vee$; такі форми наведено, зокрема, в [5].

Описані вище форми – це базові секвенційні форми числень *RG*, *RLR*, *RL*, *RR*.

Базові секвенційні форми числення *RC* – це $_{\vdash}$R, $_{\dashv}$R, $_{\vdash}$RI, $_{\dashv}$RI, $_{\vdash}$RU, $_{\dashv}$RU, $_{\vdash}$RR, $_{\dashv}$RR, $_{\vdash}$R$\neg$, $_{\dashv}$R$\neg$, $_{\vdash}$R$\vee$, $_{\dashv}$R$\vee$, $_{\vdash}\vee$, $_{\dashv}\vee$, до яких додаємо відомі [2, 5] форми $_{\vdash}\neg$ та $_{\dashv}\neg$.

Опишемо секвенційні числення реномінативних логік з рівністю. Для таких числень маємо додаткові умови замкненості секвенції, індуковані властивістю C_{RfS} (числення РНЛРС) чи властивістю C_{Rf} (числення РНЛР). Це умови:

CRfS) секвенція $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ замкнена, якщо $x\equiv x\in\Delta$ для деякого $x\in V$.

CRf) секвенція $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ замкнена, якщо $x=x\in\Delta$ для деякого $x\in V$.

На рівні РНЛРС отримуємо наступні секвенційні числення:

числення R_EG формалізує $^{R}|\!=_{TF}$. Умова замкненості секвенції: C $\vee$ CRfS;

числення R_ELR формалізує $|\!=_{TF}$. Умова замкненості секвенції: C $\vee$ CLR $\vee$ CRfS;

числення R_EL формалізує $|\!=_{T}$. Умова замкненості секвенції: C $\vee$ CL $\vee$ CRfS;

числення R_ER формалізує $|\!=_{F}$. Умова замкненості секвенції: C $\vee$ CR $\vee$ CRfS;

числення R_EC формалізує $|\!=_{IR}$. Умова замкненості секвенції: C $\vee$ CRfS.

На рівні РНЛР маємо числення RC_E, яке формалізує $|\!=_{IR}$.

Умова замкненості секвенції в численні RC_E: C $\vee$ CRf.

Базовими секвенційними формами числень R_EG, R_ELR, R_EL, R_ER є описані вище базові форми числень *RG*, *RLR*, *RL*, *RR*, до яких додамо форми $_{\vdash}$RDS, $_{\dashv}$RDS, $_{\vdash}\neg$RDS, $_{\dashv}\neg$RDS, $_{\vdash}$ERS, $_{\dashv}$ERS, $_{\vdash}\neg$ERS, $_{\dashv}\neg$ERS та наступні форми:

$$_{\vdash}\neg\mathrm{ES}\ \frac{_{\dashv}x\equiv y,\ \Sigma}{_{\vdash}\neg x\equiv y,\ \Sigma}; \qquad _{\dashv}\neg\mathrm{ES}\ \frac{_{\vdash}x\equiv y,\ \Sigma}{_{\dashv}\neg x\equiv y,\ \Sigma};$$

$$\mathrm{ESmS}\ \frac{_{\vdash}x\equiv y,\ _{\vdash}y\equiv x,\ \Sigma}{_{\vdash}x\equiv y,\ \Sigma}; \qquad \mathrm{ETrS}\ \frac{_{\vdash}x\equiv y,\ _{\vdash}y\equiv z,\ _{\vdash}x\equiv z,\ \Sigma}{_{\vdash}x\equiv y,\ _{\vdash}y\equiv z,\ \Sigma}.$$

Четвірка форм $_{\vdash}$RDS, $_{\dashv}$RDS, $_{\vdash}\neg$RDS, $_{\dashv}\neg$RDS індукована властивістю RD так, як описано вище для числень РНЛ. Властивість ER індукує 4 форми вигляду

$$\frac{_{\vdash}x\equiv y,_{\vdash}\varphi,_{\vdash}\psi,\Sigma}{_{\vdash}x\equiv y,_{\vdash}\varphi,\Sigma},\ \frac{_{\vdash}x\equiv y,_{\dashv}\varphi,_{\dashv}\psi,\Sigma}{_{\vdash}x\equiv y,_{\dashv}\varphi,\Sigma},\ \frac{_{\vdash}x\equiv y,_{\vdash}\neg\varphi,_{\vdash}\neg\psi,\Sigma}{_{\vdash}x\equiv y,_{\vdash}\neg\varphi,\Sigma},\ \frac{_{\vdash}x\equiv y,_{\dashv}\neg\varphi,_{\dashv}\neg\psi,\Sigma}{_{\vdash}x\equiv y,_{\dashv}\neg\varphi,\Sigma}.$$

Базові форми числення R_EC: $_{\vdash}$R, $_{\dashv}$R, $_{\vdash}$RI, $_{\dashv}$RI, $_{\vdash}$RU, $_{\dashv}$RU, $_{\vdash}$RR, $_{\dashv}$RR, $_{\vdash}$R$\neg$, $_{\dashv}$R$\neg$, $_{\vdash}$R$\vee$, $_{\dashv}$R$\vee$, $_{\vdash}\neg$, $_{\dashv}\neg$, $_{\vdash}\vee$, $_{\dashv}\vee$, ESmS, ETrS, $_{\vdash}$RDS, $_{\dashv}$RDS, $_{\vdash}$ERS, $_{\dashv}$ERS.

Базові форми числення RC_E: $_{\vdash}$R, $_{\dashv}$R, $_{\vdash}$RI, $_{\dashv}$RI, $_{\vdash}$RU, $_{\dashv}$RU, $_{\vdash}$RR, $_{\dashv}$RR, $_{\vdash}$R$\neg$, $_{\dashv}$R$\neg$, $_{\vdash}$R$\vee$, $_{\dashv}$R$\vee$, $_{\vdash}\neg$, $_{\dashv}\neg$, $_{\vdash}\vee$, $_{\dashv}\vee$, ESm, ETr, $_{\vdash}$RD, $_{\dashv}$RD, $_{\vdash}$ER, $_{\dashv}$ER. Останні 6 форм аналогічні ESmS, ETrS, $_{\vdash}$RDS, $_{\dashv}$RDS, $_{\vdash}$ERS, $_{\dashv}$ERS, лише замість $\equiv$ пишемо =.

Для кожного з побудованих числень, що формалізує відповідне відношення логічного наслідку на певному рівні, вірна теорема коректності та повноти.

Теорема 8. $\Gamma\,|\!=\Delta \Leftrightarrow$ секвенція $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна.

Висновки. Досліджено нові класи програмно-орієнтованих логічних формалізмів – реномінативні логіки квазіарних предикатів. Основна увага приділена вивченню реномінативних логік з рівністю, описано їх різновидності із предикатами строгої рівності та з предикатами слабкої рівності. Розглянуто семантичні моделі та мови реномінативних логік, досліджено їх семантичні властивості. Описано властивості відношень логічного наслідку, на цій основі для різних класів реномінативних логік побудовано низку числень секвенційного типу.

С.С. Шкильняк, Д.Б. Волковицкий

РЕНОМИНАТИВНЫЕ ЛОГИКИ КВАЗИАРНЫХ ПРЕДИКАТОВ

Исследованы реноминативные логики квазиарных предикатов. Они занимают место между пропозициональной и первопорядковыми логиками. Выделены реноминативные логики базового уровня, с предикатами слабого равенства и с предикатами строгого равенства. Исследованы семантические свойства таких логик, описаны отношения логического следствия. На этой основе для реноминативных логик построен ряд исчислений секвенциального типа.

S.S. Shkilniak, D.B. Volkovytskyi

RENOMINATIVE LOGICS OF QUASIARY PREDICATES

We consider renominative logics of quasiary predicates. They occupy an intermediate position between propositional logic and first-order logics. We specify renominative logics of basic level, logics with predicates of weak equality, and logics with predicates of strong equality. Semantic properties of the introduced logics are investigated and logical consequence relations are described. On this basis, a number of sequent calculi for renominative logics are constructed.

1. *Handbook* of Logic in Computer Science / Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T. S. E. Maibaum. – Oxford University Press, 1993 – 2000. – Vol. 1–5.
2. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Математична логіка та теорія алгоритмів – К.: ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
3. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Прикладна логіка. – К.: ВПЦ Київський університет, 2013. – 278 с.
4. *Шкільняк С.С.* Секвенційні числення реномінативних логік квазіарних предикатів // Наук. записки НаУКМА. Сер.: Комп'ютерні науки. – 2012. – Т. 138. – С. 23 – 29.
5. *Шкільняк С.С.* Спектр секвенційних числень першопорядкових композиційно-номінативних логік // Проблеми програмування. – 2013. – № 3. – С. 22 – 37.
6. *Шкільняк С.С., Волковицький Д.Б.* Реномінативні композиційно-номінативні логіки з предикатами рівності // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2014. – Вип. 3. – С. 198 – 205.

Одержано 09.03.2016

Про авторів:

Шкільняк Степан Степанович,

доктор фізико-математичних наук, професор кафедри теорії та технології програмування Київського національного університету імені Тараса Шевченка,

Волковицький Дмитро Борисович,

аспірант Київського національного університету імені Тараса Шевченка.