КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Математическое моделирование

УДК 517.9:519.6

А.В. ГЛАДКИЙ, Ю.А. ГЛАДКАЯ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ В СРЕДАХ С УСЛОВИЯМИ НЕИДЕАЛЬНОГО СОПРЯЖЕНИЯ

Предлагается подход к исследованию задачи амплитудно-фазового управления для волнового параболического уравнения типа Шредингера в средах с уловиями неидеального сопряжения. Сформулирован интегральный критерий эффективности, исследованы его дифференциальные свойства, получено выражение для градиента функционала. Это позволяет использовать градиентные методы оптимизации для численного решения рассматриваемой задачи управления.

Введение. В настоящее время актуальность развития методов математического моделирования процессов распространения и оптимизации звуковых волн в неоднородных волноводах объясняется потребностями дистанционного зондирования и акустического мониторинга [1 – 5]. Значительный интерес представляют вопросы формирования акустических полей с заданными свойствами, а также исследование особенностей распространения звуковых волн в неоднородных волноводах с учетом наличия тонких включений.

В работе рассматривается подход к исследованию задачи формирования заданных свойств акустического поля в подводных неоднородных волноводах, используя параболическое волновое уравнение типа Шредингера. Сформулирована задача амплитудно-фазового управления для уравнения типа Шредингера в средах с неидеальными условиями сопряжения, исследованы дифференциальные свойства экстремальной задачи.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу определения звукового поля в подводном слоисто-неоднородном осесимметричном волноводе

$$G = \{r_0 < r < \infty, 0 < z < H, r_0 > 0\},$$

где (r, z) – цилиндрические координаты, ось z направлена вертикально вниз.

Для определенности считаем, что волновод двухслойный с горизонтальной границей раздела сред γ:

$$G_H = G_1 \cup G_2 \cup \gamma = \{(r,z),\ 0<r<\infty,\ 0<z<H\},\ \gamma = \{(r,z),\ 0<r<\infty,\ z=\xi\},$$

где $G_1 = \{(r,z),\ 0<r<\infty,\ 0<z<\xi\}$, $G_2 = \{(r,z),\ 0<r<\infty,\ \xi<z<H\}$.

Предположим, что верхний слой G_1 с абсолютно мягкой верхней границей $z=0$ заполнен средой с постоянной плотностью ρ_1, скоростью звука $c_1(r,z)$ и коэффициентом поглощения $\upsilon_1(r,z)\ge 0.$ Нижний слой G_2 характеризуется постоянной плотностью $\rho_2,$ скоростью звука $c_2(r,z),$ коэффициентом поглощения $\upsilon_2(r,z)\ge 0.$ Тогда расчет звукового поля гармонического источника с учетом влияния тонкой прослойки сводится к решению в области G_H уравнения типа Шредингера с комплекснозначным несамосопряженным оператором [2]

$$Lp = 2ik_0\frac{\partial p}{\partial r} + \rho(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right) + k_0^2(n^2(r,z)-1)p = 0,\ \ z\in(0,\xi)\cup(\xi,H), \tag{1}$$

удовлетворяющего на γ условиям неидеального контакта

$$\left\{\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right\}^+ = \alpha[p]_{z=\xi},\ \ \left\{\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right\}^- = \alpha[p]_{z=\xi}, \tag{2}$$

граничным

$$p\,|_{z=0} = 0,\quad p_{z=H} = 0 \tag{3}$$

и начальному

$$p|_{r=r_0} = u(z) \tag{4}$$

условиям.

Здесь $p(r,z)$ – комплекснозначное решение, $u(z)$ – начальное значение, $i=\sqrt{-1}$ – мнимая единица, $k_0=\omega/c_0$ – волновое число, c_0 – некоторое значение скорости звука $c(r,z)$, ω – частота, $n^2(r,z)=(c_0/c(r,z))^2(1+i\upsilon(r,z))$ – комплекснозначный коэффициент преломления, $\alpha>0$ – коэффициент, определяемый параметрами тонкого включения и учитывающий влияние тонкой прослойки с плотностью ρ_0 и толщиной d путем замены ее линией раздела γ с неидеальными условиями сопряжения, $\upsilon(r,z)\ge 0$ – коэффициент поглощения, $[f(r,z)]|_{z=\xi} = f(r,\xi+0) - f(r,\xi-0)$ – скачок f, $\{f\}^{\pm} = f(r,\xi\pm 0)$.

Дифференциальное уравнение (1) является базовым для определения дальнего комплекснозначного акустического давления $P(r,z)$, создаваемого гармоническим источником в двухслойном неоднородном осесимметричном волноводе с тонкой прослойкой. Это давление является разрывным на границе раздела сред, а вне источника удовлетворяет уравнению Гельмгольца [1, 5]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right)+\rho(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial P}{\partial z}\right)+k_0^2\left(\frac{c_0}{c(r,z)}\right)^2(1+i\upsilon(r,z))P=0\,,$$
$$z\in(0,\xi)\cup(\xi,H)\,,0<r<\infty, \tag{5}$$

условию неидеального контакта

$$\left\{\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial P}{\partial z}\right\}^+=\alpha[P]_{z=\xi}\,,\quad \left\{\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial P}{\partial z}\right\}^-=\alpha[P]\big|_{z=\xi}\,, \tag{6}$$

граничным условиям

$$P\big|_{z=0}=0,\ P\big|_{z=H}=0, \tag{7}$$

а также условиям излучения на бесконечности.

Следуя [6], можно показать, что условия неидеального контакта (6) описывают влияние тонкой прослойки с плотностью ρ_0 и толщиной d на распространение акустической энергии. Отметим также, что обычные условия идеального контакта [5], выражающие непрерывность давления и нормальной компоненты скорости частиц на границе разрыва свойств, можно получить из условий (6) при $\alpha\to\infty$.

Представляя акустическое давление $P(r,z)$ при $k_0r>>1$ в виде произведения функции Ханкеля первого рода нулевого порядка $H_0^{(1)}(\cdot)$ и плавной амплитуды $p(r,z)$ и подставляя выражение $P(r,z)=H_0^{(1)}(k_0r)\,p(r,z)$ в уравнение (5), приходим к узкоугольному параболическому уравнению типа Шредингера (1). Из условий (6), (7) вытекают соответствующие условия сопряжения и краевые условия (2), (3).

Математическую постановку задачи формирования звуковых полей сформулируем как решение задачи минимизации некоторого функционала для обеспечения заданного распределения звукового поля в заданной части волновода. При этом в качестве управления принимается начальное распределение звукового поля.

Тогда одна из экстремальных задач сводится к минимизации функционала

$$J_\varepsilon(u)=\int_0^H\frac{1}{\rho(z)}\beta(z)\left|p(R,z)-p_0(z)\right|^2dz+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^H\frac{1}{\rho(z)}\left|u(z)\right|^2dz \tag{8}$$

при условии, что $p(r,z;u)$ – решение начально-краевой задачи (1) – (4). Здесь $p(R,z)$ – решение задачи (1)–(4) при $r=R, r_0<R<\infty$, соответвующее управлению $u(z)$, $\beta(z)>0$ – заданная непрерывная вещественная весовая функция; $p_0(z)$ – заданная комплекснозначная функция, $u(z)$ – комплекснозначное управление из некоторого выпуклого замкнутого множества $U = \left\{ u(z) \in L_{2,1/\rho}(\Omega), \Omega = (0,\xi) \cup (\xi, H) \right\}$, где $L_{2,1/\rho}(\Omega)$ – пространство комплекснозначных функций, интегрируемых с квадратом в области Ω с весом $1/\rho$. Скалярное произведение и норма в $L_{2,1/\rho}(\Omega)$ определяются по формулам:

$$(u,v) = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{\rho(z)} u(z)\bar{v}(z)dz\,, \quad \|u\| = (u,u)^{1/2} = \left(\int\limits_{\Omega} \frac{1}{\rho(z)} |u(z)|^2 dz \right)^{1/2},$$

в которых черта означает комплексное сопряжение.

Отметим, что для выделения ограниченного решения в функционал качества (8) добавлен стабилизирующий функционал $\frac{1}{\varepsilon^2}\|u\|^2$ при некотором заданном $\varepsilon > 0$.

Таким образом, оптимизационная задача состоит в определении комплекснозначного управления $u \in U$, при котором функционал (8) достигает своей нижней грани:

$$J_\varepsilon(w) = \inf_{u \in L_{2,1/\rho}(\Omega)} J_\varepsilon(u). \tag{9}$$

Дифференциальные свойства критерия качества. Исследуем дифференциальные свойства экстремальной задачи (1) – (4), (9). Покажем, что функционал (8) дифференцируемый в произвольной точке $u(z) \in U$ в комплексном пространстве со скалярным произведением

$$< u, v > \; = \; \mathrm{Re}(u,v). \tag{10}$$

Для этого оценим главную линейную часть приращения функционала $\Delta J_\varepsilon(u) = J_\varepsilon(u + \delta u) - J_\varepsilon(u)$, где δu – приращение управления. Легко видеть, что $\delta p = \delta p(r,z) = p(r,z;u+\delta u) - p(r,z;u)$ удовлетворяет краевой задаче

$$2ik_0 \frac{\partial \delta p}{\partial r} + \rho(z) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \delta p}{\partial z} \right) + k_0^2 (n^2(r,z) - 1)\delta p = 0,$$

$$z \in (0,\xi) \cup (\xi, H), \;\; r_0 < r < \infty, \tag{11}$$

$$\left\{ \frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \delta p}{\partial z} \right\}^{+} = \alpha \left[\delta p \right]\Big|_{z=\xi}, \qquad \left\{ \frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \delta p}{\partial z} \right\}^{-} = \alpha \left[\delta p \right]\Big|_{z=\xi}, \tag{12}$$

$$\delta\, p\big|_{z=0} = 0, \; \delta p\big|_{z=H} = 0, \tag{13}$$

с начальным условием

$$\delta p\big|_{r=r_0} = \delta u(z). \tag{14}$$

Рассматривая выражение для приращения функционала (8), имеем

$$\Delta J_\varepsilon(u) = \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} \Big\{ \beta(z)\Big(\left|p(u+\delta u) - p_0\right|^2 - \left|p(u) - p_0\right|^2 \Big) + \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\left|u+\delta u\right|^2 - \left|u\right|^2 \Big) dz,$$

для обозначено $p(u+\delta u) = p(R,z;u+\delta u),\ p(u) = p(R,z;u).$

После несложных преобразований это выражение можно записать в виде

$$\Delta J_\varepsilon(u) = 2\,\mathrm{Re}\int_0^H \frac{1}{\rho(z)}\beta(z)\,\delta p\,\Big(\overline{p(u)-p_0}\Big)\,dz + 2\frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{Re}\int_0^H \frac{1}{\rho(z)}\,\delta u\,\bar{u}\,dz +$$

$$+\int_0^H \frac{1}{\rho(z)}\Big(\beta(z)\left|\delta p\right|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\left|\delta u\right|^2 \Big)dz. \qquad (15)$$

Чтобы окончательно определить выражение для главной линейной части, введем в рассмотрение сопряженную функцию $\psi(r,z) = \psi(r,z;u)$ как решение в области $G_R = \{r_0 < r < R,\ 0 < z < H\}$ начально-краевой задачи

$$-2ik_0\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial r} + \rho(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial z}\right) + k_0^2(n^2(r,z)-1)\bar{\psi} = 0,$$

$$z \in (0,\xi)\cup(\xi,H),\ r_0 < r < R, \qquad (16)$$

$$\left\{\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial z}\right\}^- = \alpha\left[\bar{\psi}\right]\Big|_{z=\xi}, \qquad \left\{\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial z}\right\}^+ = \alpha\left[\bar{\psi}\right]\Big|_{z=\xi}, \qquad (17)$$

$$\bar{\psi}_{|z=0} = 0, \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial z}\bigg|_{z=H} = 0, \qquad (18)$$

$$\bar{\psi}\Big|_{r=R} = \beta(z)(\overline{p(u)-p_0}). \qquad (19)$$

Сопряженная задача (16) – (19) может быть получена, умножая уравнение (11) на некоторую комплексно-сопряженную функцию $\bar{\psi}(r,z)$ и интегрируя с весом $1/\rho(z)$ по области G_R, учитывая разрывность $\rho(z)$. После преобразований приходим к выражению

$$\int_{r_0}^R dr\int_\Omega \frac{1}{\rho(z)}\delta p\left(-2ik_0\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial r} + \rho(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial z}\right) + k_0^2(n^2(r,z)-1)\bar{\psi}\right)dz +$$

$$+2ik_0\int_\Omega \frac{1}{\rho(z)}\bar{\psi}(R,z)\delta p(R,z)dz - 2ik_0\int_\Omega \frac{1}{\rho(z)}\bar{\psi}(r_0,z)\delta p(r_0,z)dz +$$

$$+\int_{r_0}^{R}\left(\overline{\psi}\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial\delta p}{\partial z}-\delta p\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=\xi-0}dr+\int_{r_0}^{R}\left(\overline{\psi}\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial\delta p}{\partial z}-\delta p\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=\xi+0}^{z=H}dr=0.$$

Отсюда с учетом (16) – (19) следует утверждение.

Лемма. Пусть $\delta p, \overline{\psi}$ – решения задачи (1) – (4) и (16) – (19) соответственно. Тогда имеет место соотношение

$$\int_0^H \frac{1}{\rho(z)}\overline{\psi}\,\delta p\big|_{r=r_0}dz=\int_0^H \frac{1}{\rho(z)}\overline{\psi}\,\delta p\big|_{r=R}dz. \qquad (20)$$

На основании леммы легко видеть, что если для уравнения (16) в качестве начального условия $\overline{\psi}\big|_{r=R}$ взять условие (19), то выражение (15) окончательно принимает вид

$$\Delta J_\varepsilon(u)=2\,\mathrm{Re}\int_0^H\frac{1}{\rho(z)}\overline{\psi}\big|_{r=r_0}\delta u dz+\frac{2}{\varepsilon^2}\mathrm{Re}\int_0^H\frac{1}{\rho(z)}\delta u\,\overline{u}\,dz+o(\|\delta u\|).$$

Отсюда следует дифференцируемость функционала $J_\varepsilon(u)$ по $u(z)$ в пространстве $L^2_{2,1/\rho}(\Omega)$ действительных пар $\{\mathrm{Re}u, \mathrm{Im}u\}$.

Таким образом, установлена следующая теорема.

Теорема. Функционал (8) дифференцируемый по Фреше в пространстве $L^2_{2,1/\rho}(\Omega)$ действительных пар $\{\mathrm{Re}u, \mathrm{Im}u\}$. Градиент функционала определяется выражением

$$J'_\varepsilon(u)=2\left\{\psi_1(r_0,z;u)+\frac{1}{\varepsilon^2}u_1,\psi_2(r_0,z;u)+\frac{1}{\varepsilon^2}u_2\right\}, \qquad (21)$$

где $\psi=\psi_1+i\psi_2$ – решение сопряженной задачи (16) – (19), $u=u_1(z)+iu_2(z)$.

Из изложенного следует, что для определения градиента необходимо при фиксированном $u(z)$ получить решение двух краевых задач. Вначале с помощью прямой задачи (1) – (4) следует определить решение $p(R,z,u)$, а затем из (16) – (19) найти значение сопряженной функции при $r=r_0$.

Выводы. В работе предложен подход к исследованию задачи амплитудно-фазового управления для параболического уравнения типа Шредингера в средах с неидеальными условиями сопряжения. Предложен критерий эффективности, исследованы его дифференциальные свойства и получено выражение для градиента. Это позволяет использовать градиентные методы оптимизации для численного решения задачи амплитудно-фазового управления.

А.В. Гладкий, Ю.А. Гладка

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ КЕРУВАННЯ У СЕРЕДОВИЩАХ З УМОВАМИ НЕІДЕАЛЬНОГО СПРЯЖЕННЯ

Розглянуто підхід до дослідження задачі амплітудно-фазовогого керування для хвильового параболічного рівняння типу Шредінгера у середовищах із умовами неідеального спряження. Запропоновано критерій ефективності, досліджені його диференціальні властивості, отримано вираз для градієнта.

A.V. Gladky, Yu.A. Gladka

ABOUT ONE CONTROL PROBLEM IN NON-IDEAL CONTACT DOMAINS

An approach to the study of the amplitude and phase control problem for the wave parabolic equation of Schrödinger type in environments with non-ideal contact coupling conditions is considered. The criterion of efficiency is proposed. Its differential properties are investigated. The expression for the gradient is obtained.

1. *Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. – Л.: Гидрометеоиздат, 1982. – 264 с.
2. *Распространение* волн и подводная акустика / Под ред. Дж. Б. Келлера и Дж. Пападакиса. – М.: Мир, 1980. – 230 с.
3. *Lee D., McDaniel S.T.* Ocean acoustic propagation by finite difference method // Comput. Math. Appl. – 1987. – **14**. – P. 305 – 423.
4. *Lee D., Pierse A.D., Shang E.C.* Parabolic equation development in the twentieth century // J. Comput. Acoust. – 2000. – **1**, N 4. – P. 527 – 637.
5. *Гладкий А.В., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В.* Численно-аналитические методы исследования волновых процессов. – Киев: Наук. думка, 2001. – 452 с.
6. *Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432 с.

Получено 19.10.2015

Об авторах:

Гладкий Анатолий Васильевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведущий отделом Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,
E-mail: gladky@ukr.net

Гладкая Юлия Анатольевна,
доцент Киевского национального торгово-экономического университета.