Компьютерная математика

Теория и методы оптимизации

УДК 519.85

П.И. СТЕЦЮК, А.В. ЛЕФТЕРОВ, А.И. ФЕДОСЕЕВ

КРАТЧАЙШИЙ *K*-ВЕРШИННЫЙ ПУТЬ

Приводится формулировка задачи смешанного булевого линейного программирования для поиска кратчайшего пути из вершины a в вершину b, проходящего через заданное количество вершин полного графа. Построен тестовый пример для нахождения кратчайших маршрутов посещения заданного количества пунктов виноделия из 20 наиболее посещаемых для направления Львов – Вроцлав – Львов. Проведены расчеты с помощью программы Gurobi.

Введение. «Задачи о кратчайшем пути, в которых на пути накладываются некоторые ограничения, часто настолько сложны, что соответствующие алгоритмы позволяют находить оптимальные решения лишь таких задач, размеры которых (например, число вершин) на несколько порядков меньше, чем в аналогичных задач без ограничений» [1, стр. 177]. Это замечание Н. Кристофидеса лучше всего характеризует NP-трудная задача коммивояжера, которая состоит в нахождении для взвешенного графа гамильтонового цикла наименьшего веса, где вес цикла определяется как сумма весов, входящих в него ребер. Ничуть не проще и задача поиска в полном графе кратчайшего гамильтонового пути.

Задачи на построение в графе путей, удовлетворяющих различным ограничениям рассматриваются в [2, 3]. Им посвящена книга [4], где излагаются теория и методы решения задач об оптимальном распределении однородных и неоднородных потоков в сетях. Специальные задачи поиска кратчайшего пути при малом количестве линейных ограничений общего вида рассматриваются в [5]. Для них алгоритмы решения релаксированных задач используют метод эллипсоидов в сочетании с алгоритмом Дейкстры для нахождения кратчайших путей в ориентированном графе.

В статье исследуется задача поиска кратчайшего пути, проходящего через заданное количество вершин графа. Для нее сформулирована задача смешанного булевого линейного программирования. С ее помощью найдены оптимальные маршруты для посещения пунктов виноделия в направлении Львов – Вроцлав – Львов.

1. Задача о кратчайшем *k*-вершинном пути. Пусть $D_{n,n}$ – полный граф, где n – количество вершин, а $d_{ij} > 0$ – длина дуги между вершинами i и j, $i \neq j$. Будем рассматривать ориентированный граф, как на рис. 1, включающий граф $D_{n,n}$ и две дополнительные вершины a и b, которые не совпадают с вершинами графа $D_{n,n}$. Обозначим $d_{ai} \geq 0$ – длину дуги, связывающей вершину a и вершину i графа $D_{n,n}$, а $d_{ib} \geq 0$ – длину дуги, связывающей вершину i графа $D_{n,n}$ с вершиной b.

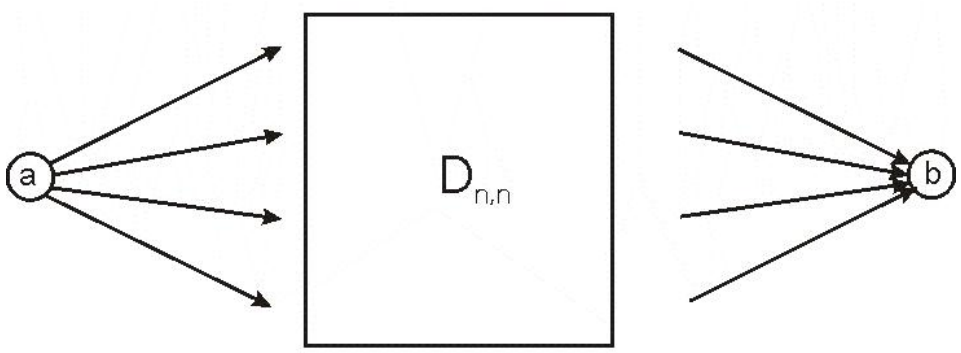

РИС. 1. Орграф, включающий граф $D_{n,n}$ и вершины a, b

Связный путь из вершины a в вершину b, который проходит через k вершин графа $D_{n,n}$, где $1 \leq k \leq n$, будем называть k-вершинным путем из a в b. Если $k = n$, то этот путь проходит через все вершины графа $D_{n,n}$. Обозначим $(a, i_1, \ldots, i_k, b)$ – последовательность вершин в k-вершинном пути, где $i_1, \ldots, i_k$ – идущие по порядку вершины графа $D_{n,n}$. Он содержит $(k+1)$ дуг, где одна дуга соединяет вершину a с вершиной i_1, $(k-1)$ дуг последовательно соединяют вершины $i_1, \ldots, i_k$, и одна дуга соединяет вершину i_k с вершиной b. Связный k-вершинный путь, которому соответствует наименьшая суммарная длина входящих в него $(k+1)$ дуг, будем называть кратчайшим k-вершинным путем, а его длину обозначим d^*_{abk}.

Рассмотрим формулировку задачи целочисленного линейного программирования для нахождения кратчайшего k-вершинного пути. Чтобы обеспечить связность пути, т. е. избежать подциклов в графе $D_{n,n}$, используется идея моделирования задачи о потоке, аналогично тому, как это сделано в [6].

Пусть x_{ij} – булева переменная, которая равна единице, если в путь входит дуга, которая начинается в вершине i и заканчивается в вершине j, и равна

нулю в противоположном случае. Обозначим x_{ai} и x_{ib} – булевы переменные такого же типа как x_{ij}, но для дуг из вершины a в вершину i и из вершины i в вершину b. Количество переменных x_{ai}, x_{ib} и x_{ij} равно $n+n+n(n-1)=n(n+1)$. Пусть y_i – булева переменная, которая равна единице, если путь проходит через вершину i, и равна нулю в противоположном случае. Количество таких переменных равно n. Пусть неотрицательная переменная z_{ij} задает величину потока некоторого продукта от вершины i к вершине j, а неотрицательная переменная z_{ai} задает величину потока от вершины a к вершине i. Количество этих переменных равно $n+n(n-1)=n^2$.

Нахождению кратчайшего k -вершинного пути из вершины a в вершину b соответствует следующая задача: найти

$$d^*_{abk} = \min_{y_i, x_{ij}, z_{ij}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} d_{ai} x_{ai} + \sum_{i=1}^{n} d_{ib} x_{ib} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} d_{ij} x_{ij} \right\} \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ai} = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ib} = 1, \tag{2}$$

$$x_{ai} + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ji} = y_i, \quad \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ij} + x_{ib} = y_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = k, \tag{4}$$

$$z_{ai} - k x_{ai} \leq 0, \quad i = 1, ..., n, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_{ai} = k, \tag{6}$$

$$z_{ij} - (k-1) x_{ij} \leq 0, \quad i, j = 1, ..., n, \quad i \neq j, \tag{7}$$

$$z_{ai} + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} z_{ji} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} z_{ij} = y_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

$$y_i = 0 \vee 1, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

$$x_{ai} = 0 \vee 1, \quad x_{ib} = 0 \vee 1, \quad i = 1, \ldots, n, \quad x_{ij} = 0 \vee 1, \quad i, j = 1, ..., n, \quad i \neq j, \tag{10}$$

$$z_{ai} \geq 0, \quad i = 1, ..., n, \quad z_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, ..., n, \quad i \neq j. \tag{11}$$

Задача (1) – (11) – это задача смешанного булевого линейного программирования. Она содержит $2n(n+1)$ переменных, из которых n^2+2n являются булевыми, а n^2 – неотрицательными, и n^2+3n+4 ограничений, из которых $3n+4$ – линейные равенства, а n^2 – линейные неравенства.

Теорема. Если k – целое число, удовлетворяющее неравенствам $1 \le k \le n$, то ограничения (2) – (11) описывают все возможные k-вершинные пути из вершины a в вершину b.

Доказательство. Ограничение (4) задает в точности k вершин графа $D_{n,n}$, через которые должен проходить путь из вершины a в вершину b. Этим вершинам соответствуют значения $y_i = 1$ и для них ограничения (3) описывают однократный вход в вершину и однократный выход из вершины. Ограничения (2) описывают однократный выход из вершины a и однократный вход в вершину b.

Набор ограничений (5) – (8) обеспечивает связность k-вершинного пути. Здесь ограничения (5) гарантируют перевозку продукта между вершинами a и i только тогда, если $x_{ai} = 1$, а ограничения (7) гарантируют перевозку продукта между вершинами i и j только тогда, если $x_{ij} = 1$. Ограничения (6) и (8) означают, что из вершины a нужно развезти k единиц продукта, оставляя в каждой из тех вершин графа $D_{n,n}$, через которые проходит k-вершинный путь, ровно единицу продукта. Доказательство завершено.

Минимизация целевой функции в (1) отвечает нахождению кратчайшего (минимального по длине) пути из вершины a к вершине b, который проходит через k вершин графа $D_{n,n}$. При этом d^*_{abk} соответствует длине кратчайшего пути. Но сам кратчайший путь может быть не единственным, и, если это так, то решение задачи (1) – (9) обеспечивает только один из возможных кратчайших k-вершинных путей из вершины a в вершину b.

2. Тестовый пример. Вычислительный эксперимент проводился на задачах посещения заданного количества пунктов виноделия из 20 наиболее посещаемых для направления Львов – Вроцлав – Львов [7, 8]. Их расположение показано на рис. 2 и характеризуется тем, что расстояния от Львова и Вроцлава до пунктов виноделия существенно больше, чем расстояния между пунктами виноделия.

РИС. 2. Расположение пунктов виноделия в направлении Львов – Вроцлав

В табл. 1 приведены названия пунктов виноделия, d_{ai} – расстояния до каждого из них от Львова и Вроцлава, а также d_{ib} – расстояния от пунктов виноделия до Вроцлава и Львова. Расстояния даны в километрах и вычислены с помощью веб-сервиса Google Maps (https://maps.google.com/).

ТАБЛИЦА 1. Расстояния Львов – пункты виноделия – Вроцлав

i	Название пунктов виноделия	Львов		Вроцлав	
		d_{ai}	d_{ib}	d_{ai}	d_{ib}
1	Szawapier	386	383	287	286
2	Nad Dobrą Wodą	361	341	267	270
3	Piwnice Antoniego	253	253	389	386
4	Amonit	369	367	274	270
5	Rodziny Steców	272	261	369	369
6	Comte	392	393	244	242
7	Kresy	371	369	277	273
8	Krokoszówka Górska	367	367	273	271
9	Hybridium	365	365	264	263
10	Nad Dworskim Potokiem	289	291	319	318
11	Srebrna Góra	351	347	270	263
12	Zadora	276	275	358	354
13	Zawisza	284	285	367	364
14	Kuźnia	247	265	379	375
15	Demeter	266	268	380	377
16	Uroczysko	284	284	366	363
17	Smykań	338	340	315	315
18	Chodorowa	317	319	387	394
19	Dosłońce	341	343	299	295
20	Gaj	340	339	279	275

В табл. 2 приведены d_{ij} – расстояния между пунктами виноделия, которые даны в километрах и также вычислены с помощью веб-сервиса Google Maps.

В табл. 3 приведены длины всех возможных кратчайших k -вершинных маршрутов для трех задач посещения k пунктов виноделия для направления Львов – Вроцлав (обозначены d^*_{abk}) и для направления Вроцлав – Львов (обозначены d^*_{bak}). В первой задаче в маршрут могли включаться любые из пунктов виноделия, во второй задаче в маршрут обязательно включался девятый пункт виноделия «Hybridium», а в третьей задаче – в маршрут включались как девятый пункт виноделия, так и двенадцатый пункт виноделия «Zadora».

Таблица 2

ТАБЛИЦА 3. Длины кратчайших маршрутов для $k = 1 \div 20$

k	$y_i = 0 \vee 1, i = 1,\ldots,20$		$y_9 = 1$		$y_9 = y_{12} = 1$	
	d^*_{abk}	d^*_{bak}	d^*_{abk}	d^*_{bak}	d^*_{abk}	d^*_{bak}
1	607	608	628	629	–	–
2	607.1	615.1	633.9	634.6	656	657
3	613.2	628.2	637	641.7	645.7	654
4	614.3	630.4	639.7	653	645.7	653
5	617	635	643.8	659.9	648.6	659.9
6	628.9	642.1	648	664.6	652.8	664.6
7	639.7	655	659.9	671.5	659.9	671.5
8	643.3	660.3	670.7	681.6	670.7	681.6
9	647.9	667.3	683.4	695.4	683.4	695.4
10	658.4	671.9	695	707.3	695	707.3
11	670.3	682	716.5	728.3	716.5	728.3
12	681.1	695.8	727.3	738.4	727.3	738.4
13	693.8	707.7	740	752.2	740	752.2
14	705.4	728.2	751.6	764.1	751.6	764.1
15	730.2	743.6	766.3	778.7	766.3	778.7
16	758.5	771.3	777.9	790.6	777.9	790.6
17	806	818.3	806.2	818.3	806.2	818.3
18	853.7	865.9	853.7	865.9	853.7	865.9
19	901.9	913.5	901.9	913.5	901.9	913.5
20	964.8	976.8	964.8	976.8	964.8	976.8

Расчеты проводились с помощью программы Gurobi [9] на NEOS-сервере (http://www.neos-server.org/neos/solvers/). Нахождение кратчайшего маршрута, проходящего через все 20 пунктов виноделия потребовало несколько секунд работы программы Gurobi. Следовательно, результаты вычислительных экспериментов показали возможность использования предложенной модели для выбора оптимальных маршрутов в режиме реального времени.

Выводы. В статье предложена формулировка задачи (1) – (11) – задачи смешанного линейного булевого програмирования для нахождения кратчайшего пути, который проходит через k вершин полного графа. Ее частный случай позволяет находить как кратчайший гамильтонов путь в полном графе, так и кратчайшие гамильтоновы пути в подграфах, которые получаются вырезанием из полного графа с n вершинами таких полных подграфов, которые содержат k вершин, где $1 < k \le n$. Для этого достаточно в формулировке задачи (1)–(11) либо положить все расстояния d_{ai} и d_{ib} равными нулю, либо убрать вклад в целевую функцию (1) тех дуг, которые связывают вершины a и b с вершинами полного графа.

В настоящее время для пользователей информационного ресурса TourGourMania (http://tourgourmania.com/) разрабатывается сервис с оптимизационными средствами для выбора и построения винных маршрутов. В его основу положена задача нахождения кратчайшего пути, проходящего через заданное количество вершин ориентированного графа. Вершинами графа являются пункты виноделия с их характеристиками (временами: на дегустации, на возможные экскурсии и на ночлег, а так же с описанием производимого вина), которые связываются дугами с такими характеристиками как расстояние, время поездки и приоритетность. Последняя учитывает экскурсионную привлекательность, а также возможность подбора вин в соответствии со вкусовыми предпочтениями пользователя. Сервис позволит пользователю разработать индивидуальный маршрут и решать задачи оптимального выбора своих винных путей.

П.І. Стецюк, О.В. Лефтеров, А.І. Федосєєв

НАЙКОРОТШИЙ k -ВЕРШИННИЙ ШЛЯХ

Наводиться формулювання задачі змішаного булевого лінійного програмування для пошуку найкоротшого шляху з вершини a у вершину b, що проходить через задану кількість вершин повного графа. Побудовано тестовий приклад для знаходження найкоротших маршрутів відвідування заданої кількості пунктів виноробства з 20 найбільш відвідуваних для напрямку Львів – Вроцлав – Львів. Проведено розрахунки за допомогою програми Gurobi.

P.I. Stetsyuk, A.V. Lefterov, A.I Fedosieiev

THE SHORTEST k -NODE PATH

The formulation of the problem of mixed Boolean linear programming to find the shortest path from a node a to a node b, which passes through a given number of nodes of a complete graph, is presented. A test example to find the shortest paths for visits to a given number of wineries from 20 most visited destinations along Lviv-Wroclaw-Lviv direction is constructed. Calculations were conducted using Gurobi program.

1. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432 с.
2. *Ермольев Ю.М.* Кратчайшие допустимые пути // Кибернетика. – 1966. – № 3. – С. 88 – 95.
3. *Ермольев Ю.М., Мельник И.М.* Кратчайшие допустимые пути. II // Там же. – 1967. – № 1. – С. 63 – 71.
4. *Ермольев Ю.М., Мельник И.М.* Экстремальные задачи на графах. – Киев: Наукова думка, 1968. – 176 с.
5. *Стецюк П.И., Петрухин В.А., Бугров Н.В., Хрипко К.Ю.* Метод эллипсоидов и условно-оптимальный маршрут // Міжнародна наукова конференція «Сучасна інформатика: проблеми, досягнення та перспективи розвитку», присвячена 90-річчю від дня народження академіка В.М. Глушкова (12 – 13 вересня 2013 року). – К.: Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2013. – С. 111 – 113.

6. *Стецюк П.И.* Формулировки задач для кратчайшего *k*-вершинного пути и кратчайшего *k*-вершинного цикла в полном графе // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – № 1. – С. 101 – 106.
7. *Fedosieiev O., Lefterov O., Lykhovyd O., Stetsyuk P.* Optimization tools for selecting wine routes // Theses of the conference CAIM-2015, Stefan cel Mare University of Suceava, Romania, September 17 – 20, 2015. – P. 37–38.
8. *Fedosieiev O., Lefterov O., Lykhovyd O., Stetsyuk P.* Optimization tools for touristic routes // Материалы VI-й Международной научной конференции «Транспортные системы и логистика», Кишинэу, 27 – 30 октября, 2015 года. – Кишинэу: Эврика, 2015. – С. 341 – 346.
9. *Gurobi* Optimization, Inc., Gurobi Optimizer Reference Manual, 2014, http://www.gurobi.com/

Получено 03.11.2015

Об авторах:

Стецюк Петр Иванович,
доктор физико-математических наук, заведующий отделом
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,
E-mail: stetsyukp@gmail.com

Лефтеров Александр Владимирович,
научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,
E-mail: alef@mail.ru

Федосеев Александр Иванович,
кандидат экономических наук,
заместитель директора IT-Pro, г. Киев.
E-mail: af1958@gmail.com