

УДК 669.018:54

**В. З. Тыднюк, О. И. Шинский, В. П. Кравченко,
С. И. Клименко**

Физико-технологический институт металлов и сплавов НАН Украины, Киев

КВАНТОВЫЕ ОСОБЕННОСТИ РАЗМЕРОВ ЗЕРНА СТРУКТУРЫ МЕТАЛЛА НА ОСНОВАНИИ КОНЦЕПЦИИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЛН

Построена физико-математическая модель определения микроструктуры и размеров зерен в металлах и сплавах с учетом квантовых особенностей фоновой компоненты теплопередачи. Модель описывает калибровку размеров зерен в 18 баллов по ГОСТ 5639-82.

Ключевые слова: тепловой поток, ГОСТ 5639-82, обобщенный закон Фурье, гиперболическое уравнение теплопроводности, механизмы теплопередачи, температурные волны, фоновая теплопередача, кристаллизация отливок, влияние размеров зерна на теплопередачу.

Побудовано фізико-математичну модель визначення мікроструктури та розмірів зерна в металах і сплавах з урахуванням квантових особливостей фоновної компоненти теплопередачі. Модель описує калібровку розмірів зерен у 18 баллів відповідно ГОСТ 5639-82.

Ключові слова: тепловий потік, ГОСТ 5639-82, узагальнений закон Фур'є, гіперболічне рівняння теплопровідності, механізми теплопередачі, температурні хвилі, фоновна теплопередача, кристалізація виливків, вплив розмірів зерна на теплопередачу.

It was developed the physico-mathematical model of determining microstructure and grain size in metals and alloys, taking into account the features of quantum phonon heat transfer components. The model describes the calibration of grain size of 18 points in accordance with GOST 5639-82.

Keywords: heat flow, GOST 5639-82, generalized Fourier's law, hyperbolic heat equation, heat transfer mechanisms, temperature waves, phonon heat transfer, crystallization of castings, the influence of grain size on the heat transfer.

Среди препятствий для прогностической оценки микроструктуры отливки при совпадении исходного химического состава расплава и технологий отвердевания следует выделить множественность и ветвление процессов кристаллизации и отвердевания. Классические теории тепломассопереноса и их инженерные приложения не учитывают в полном объеме нелинейный характер таких процессов, наличие температурных волн различного типа, а также квантовые эффекты и явления, которые влияют и на кристаллизацию, и на теплоперенос, и на различные типы процессов отвердевания и перекристаллизации.

Гиперболическое уравнение теплопроводности, описывающее процесс затуха-

ния температурных волн, было, как известно, получено А. В. Лыковым [1] на основе варианта закона Фурье, сформулированного Каттанео, при котором учитывается не только градиент температурного поля по координатам, но и производная температуры по времени. При этом возникла довольно парадоксальная ситуация, так как гиперболическое уравнение теплопереноса фактически не является дополнением к классической форме параболического уравнения теплопроводности, а заменяет его, исключая неточности и несоответствия, которые заложены уже в изначально принятой классической формулировке закона Фурье. Изложение самых известных парадоксов параболического уравнения теплопроводности можно найти в одной из фундаментальных монографий по волновой природе теплопередачи [2]. Обширный обзор исследований по решениям как нелинейного параболического, так и гиперболического уравнений теплопроводности, изложен в [3].

Гиперболическое уравнение теплопроводности, полученное А. В. Лыковым, имеет следующий вид:

$$c\rho \left(\tau_r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) = k \operatorname{div}(\operatorname{grad} u), \quad (1)$$

а обобщенный закон Фурье, сформулированный Каттанео, представляет собой уравнение с частными производными первого порядка, где плотность теплового потока q зависит не только от производных температуры u по координатам, но и от производной по времени:

$$q = -k \operatorname{grad} u - \tau_r \frac{\partial q}{\partial t}. \quad (2)$$

Постоянные c , ρ и k в (1-2) соответствуют теплоемкости, плотности и коэффициенту теплопроводности.

В [3] и других многочисленных работах показано, что решения как гиперболического, так и нелинейного параболического уравнения, где коэффициент теплопроводности не постоянная, а представляет собой функцию, состоят из суммы параболических решений и гиперболических – волновой части. Но основная проблема современных исследований механизмов теплопередачи и их физико-математических моделей состоит в том, что гиперболическое уравнение теплопроводности (1) не имеет широкого распространения из-за чрезвычайной малости коэффициента τ_r , который традиционно связывается со временем релаксации вязких тепловых напряжений. А порядок этой величины составляет $10^{-9} - 10^{-12}$ с [1-3].

В [4], [5] обобщенный закон Фурье (2) дополняется еще одним уравнением, при этом его формулировка становится более прозрачной:

$$q = -k \operatorname{grad} u - \tau \frac{\partial q}{\partial t};$$
$$q = -k \operatorname{grad} u - s \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (3)$$

В [5] показано, что производная температуры по времени определяется, в основном, фононной теплопередачей, тогда из (3) и некоторых квантовых особенностей такой теплопередачи непосредственно следует, что коэффициент τ в (3) зависит лишь от коэффициента затухания тепловой квантованной фононной волны и определяется формулой (для продольной фононной волны):

$$\tau = 1/\delta \cdot v, \tag{4}$$

где v – скорость звука, м/с; δ – коэффициент затухания, Нп/м = 1/м. Порядок величины τ тогда составляет $10^{-5} - 10^{-4}$ с, что сравнимо с порядком температуропроводности в той же системе единиц. Так, например, температуропроводность a ($a = k/c\rho$) серебра составляет $1,7 \cdot 10^{-4}$, м²/с, алюминия – $8,4 \cdot 10^{-5}$ м²/с. Из этого следует, что второй производной по времени в уравнении (1) пренебрегать нельзя.

Определение коэффициента затухания для тепловой фононной волны в конкретном металле или сплаве определяется максимальной длиной квантованной фононной волны λ_{\max} в этой среде. В [5] получена оценка λ_{\max} для куперовских электронных пар при состоянии сверхпроводимости металлов и сплавов, при этом $\lambda_{\max} \cong 0,1$ мм. Так как кооперативное квантовое взаимодействие атомных единиц в жидкой, или твердой фазе металла, при излучении фононов несколько отличается от коллективного взаимодействия куперовских пар при состоянии сверхпроводимости, то оценим также величину λ_{\max} , исходя из соотношения неопределенностей Гейзенберга. Для фонона неопределенность (дисперсия, рассеивание результатов измерений) импульса Δp и неопределенность его координаты Δx по любой выбранной оси будут удовлетворять неравенству:

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{5}$$

где \hbar – постоянная Планка.

Фонон относится к бозонам, и его импульс определяется формулой

$$p = \hbar k = \hbar \cdot \frac{2\pi}{\lambda}. \text{ Соответственно, разброс значений импульса фонона будет равен}$$

$$\Delta p = \frac{2\pi\hbar}{\Delta\lambda} \text{ и неравенство (5), сократив на } \hbar, \text{ можно записать в виде}$$

$$\Delta\lambda \leq 4\pi \cdot \Delta x. \tag{6}$$

Так как длина свободного пробега фонона определяется разными экспериментальными методами, в основе которых лежат разные теоретические модели, и при этом не всегда учитывается упругое столкновение фононов, то есть рассеивание одних и тех же фононов на неоднородностях среды, то величину Δx в (6) заменим: $\Delta x = v \cdot \Delta\tau_{\phi}$, где v – скорость звука, а τ_{ϕ} – среднее время жизни фонона. Далее рассмотрим фонон – фотонное взаимодействие, поскольку тепловые процессы в твердых, жидких и газообразных средах всегда сопровождаются как тепловым электромагнитным излучением, так и фононным излучением. Одним из наиболее вероятных вариантов такого взаимодействия является комбинационное (неупругое) рассеивание фотонов.

Опыты по рассеиванию электромагнитных волн в конденсированных средах были начаты в 1926 году Л. С. Ландсбергом и Л. И. Мандельштамом. В результате было установлено, что в спектре рассеянного света присутствует излучение, частота которого сдвинута относительно частоты первичного излучения ω_0 на величину $\Delta\omega$. В спектре присутствуют несколько симметричных относительно частоты ω_0 спутников с частотами $\omega_0 - \Delta\omega$ (стоксов спутник) и $\omega_0 + \Delta\omega$ (антистоксов спутник), [6]. В 1928 году аналогичные опыты в жидкостях выполнили индийские физики Ч. Раман и К. Кришнан. За открытие этого явления в 1930 году Ч. Раман был удостоен Нобелевской премии.

Но комбинационное рассеивание фотонов сопровождается и фононным излучением. При неупругом рассеивании света поглощается квант падающего излучения и рождается квант рассеянного излучения, при этом происходит также одновременное рождение или уничтожение кванта (или квантов) возбуждений кристалла (молекул жидкости) – фонона, [6]. Фононным излучением сопровождается и любой другой электронный переход, но время жизни квазичастиц, которые электроны образуют с кристаллической решеткой, уже меньше, чем время жизни возбужденного состояния атома, поглотившего фотон. Таким образом, среднее время жизни фонона будет меньше, чем время существования атома в возбужденном состоянии. Диапазон времени жизни возбужденного атома составляет 10^{-8} – 10^{-9} с [7], следовательно, неопределенность времени жизни фонона будет не больше максимальной величины времени жизни возбужденного состояния атома: $\Delta\tau_{\text{ф}} \leq 10^{-8}$ с.

Чтобы оценить скорость звука в выражении $\Delta x = v \cdot \Delta\tau_{\text{ф}}$, следует учесть факты, что в жидкостях и газах существует только продольная волна и что скорость продольной волны в твердых телах больше, чем в жидкостях, а в жидкостях выше, чем в газах. А скорость продольной волны, в свою очередь, превышает скорость поперечной волны. Для определения температурной зависимости скорости звука (ультразвука) рассмотрим формулу общего вида зависимости скорости распространения ультразвука от температуры, [8]:

$$v = v_0 + K_v (u - v_0), \quad (7)$$

где v_0 – скорость ультразвука при исходной температуре u_0 , K_v – температурный коэффициент скорости ультразвука, м/с·°С. Значения этого коэффициента у твердых тел отрицательны и лежат в диапазоне $[-2,0; -0,4]$. То есть, для определения верхнего предела скорости ультразвука можно ориентироваться на максимальную скорость продольной волны в твердых телах при стандартных температурах.

По справочным данным в алюминии максимальная скорость звуковой продольной волны для металлов – $6,36 \cdot 10^3$ м/с, [9]. Обобщая приведенные результаты, получим верхнюю границу для выражения: $v \cdot \Delta\tau_{\text{ф}} \leq 6,36 \cdot 10^3 \cdot 10^{-8}$ м. Подставим последнее численное значение вместо Δx в неравенство (6) и получим:

$$\Delta\lambda \leq 4\pi \cdot \Delta x \leq 80 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,8 \text{ мм} \cong 1 \text{ мм}. \quad (8)$$

Теперь следует определить соотношение между величинами $\Delta\lambda$ и λ_{max} . Квантовая неопределенность численного значения физической величины не полностью соответствует дисперсии некоторой макроскопической случайной величины с известной плотностью распределения вероятности. Так как каждая физическая величина в квантовой механике описывается соответствующим оператором в гильбертовом, или многомерном пространстве, то ее численные значения меняются дискретно, квантами (исключая специальные случаи непрерывного спектра).

То есть, для импульса фонона $p = \hbar k$ его неопределенность Δp будет определяться возможной шириной перехода из квантового состояния с импульсом p_1 в другое квантовое состояние с импульсом p_2 , $\Delta p = p_2 - p_1$. При этом фотон излучает, или поглощает квант энергии, поэтому ширина перехода из квантового состояния 1 в состояние 2 тоже входит в спектр значений импульса $\{p_n\}$, и $\Delta p = p_2 - p_1 = p_n \in \{p_n\}$, где множество квантовых значений импульса $\{p_n\}$ определяется граничными условиями, начальными значениями, или другими ограничениями.

Аналогичные соотношения применимы и для неопределенности фононной длины волны $\Delta\lambda$. Так как спектр значений длины волны ограничен максимальной квантованной длиной фононной волны λ_{max} , то при наибольшей неопределенности её длины $\Delta\lambda_{\text{max}} \cong \lambda_{\text{max}}$. Тогда, учитывая (8), получим:

$$\lambda_{\text{max}} \leq 1 \text{ мм}. \quad (9)$$

Кристаллизация и структурообразование сплавов

Оценка верхней границы в [5] для λ_{\max} относительно куперовских пар электронов давала значительно меньший результат, так как фононное взаимодействие между электронами приводит к рождению фононов меньшей длины волны, чем при кооперативном взаимодействии атомных единиц в кристаллической решетке. Длина волны в 1 мм совпадает с дальней границей инфракрасного электромагнитного диапазона. Таким образом, такую же границу сверху имеют и квантованные фононные волны. На рис. 1 приведен весь спектр электромагнитного излучения.

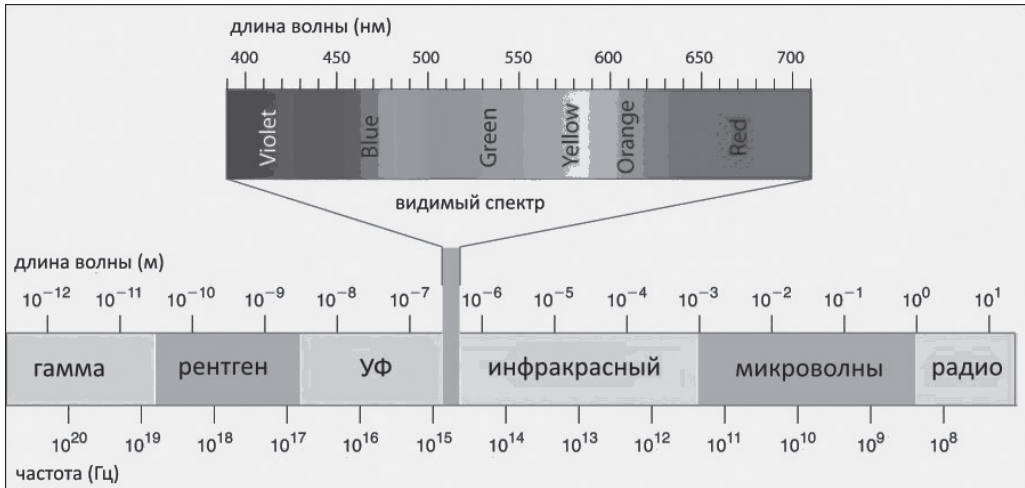


Рис. 1. Спектр электромагнитного излучения: yandex.ua/images>спектр электромагнитных волн

С физической точки зрения ограничение в 1 мм является некоторым оптимальным средним значением, длина волны λ_{\max} не является стационарной и зависит от свойств среды. А именно: верхней границей для фононной длины волны кооперативного квантового движения в кристаллической решетке (или кластере жидкости, молекул газа) будет такая длина волны, при которой к вращательной степени свободы кооперативного движения добавляется колебательная степень свободы. То есть величина λ_{\max} будет зависеть от типа элементарной кристаллической ячейки, атомов химических элементов, расположенных в ней, концентрации вакансий, дислокаций, примесных атомов в сплавах типа твердых растворов и т. п.

Так как все акустические фононные волны (оптическая ветвь) с длиной волны меньшей, чем размер кристаллита (зерна), практически поглощаются внутри зерна, то нижнюю границу для λ_{\max} (акустической фононной ветви) можно далее оценить из следующих соображений. Будем исходить из среднего оптимального стандарта для верхнего предела размера d_{\max} зерна, которое излучает квантованную тепловую

фононную волну, в 1 мм. Площадь сечения такого зерна $S_{\max} = \frac{\pi d_{\max}^2}{4}$ будет

пропорциональна фононной части теплового потока, мощность которого Q можно определить на основании формул для расширенного закона Фурье (3-4), [5]:

$$q = -k \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\delta v} \frac{\partial q}{\partial t}; \quad (10)$$

$$q = -k \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\delta v} \frac{\bar{q}(x,0)}{\bar{u}(x,0)} \cdot \frac{\partial u}{\partial t},$$

где $\bar{q}(x, 0)$ и $\bar{u}(x, 0)$ – средние значения начальных условий для плотности теплового потока и температуры в окрестности точки x (ось x перпендикулярна сечению зерна).

Обозначим площадь сечения зерна, диаметр которого меньше, чем d_{\max} , через

$$s_k = \frac{\pi d_k^2}{4},$$

а среднее количество фононов, которые излучаются (поглощаются) в сечении s_k за единицу времени $\bar{m}_k = \alpha Q_k$, $\alpha = \text{const}$, где α - коэффициент пропорциональности.

Так как мощность Q фононного теплового излучения кристаллитов тоже имеет квантовый характер, то для любого другого зерна с площадью сечения большей, $s_q > s_k$, фононный поток Q_q может отличаться от потока Q_k только в

целое число раз $\bar{m}_q = \alpha Q_q = n \bar{m}_k = n \alpha Q_k > \bar{m}_k$. То есть наименьшее отличие двух

зерен разного размера будет наблюдаться при $n = 2$. Таким образом, стандартная калибровка зерен различного диаметра в металлах и сплавах, которая исходит от максимального диаметра зерна $d_{\max} \cong 1$ мм, будет определяться следующими формулами:

$$\frac{s_{k+1}}{s_k} = \frac{Q_{k+1}}{Q_k} = 2 = \frac{\pi d_{k+1}^2 / 4}{\pi d_k^2 / 4} = \left(\frac{d_{k+1}}{d_k} \right)^2; \tag{11}$$

$$d_k = \frac{d_{k+1}}{\sqrt{2}}; \quad d_{\max} = 1 \text{ мм}.$$

Такое определение размеров зерен, полученное на основе квантово-механического анализа и неравенства Гейзенберга, соответствует калибровке размеров зерна для сталей и сплавов в 18 баллов по ГОСТ 5639-82, [10], рис. 2 (колонки 2 и 7).

И далее перейдем непосредственно к определению нижней границы для размеров кристаллитов в металлах и сплавах. Результаты рентгеноструктурного анализа и электронной микроскопии определяют нижний диапазон для размеров зерна в 1÷10 мк, [11]. Еще более мелкую зернистость можно получить лишь с помощью специальных современных технологий, [11].

Такой диапазон минимальных размеров для кристаллитов является далеко не случайным. В таком же диапазоне находятся и размеры магнитных доменов в ферромагнетиках. Домен образует коллективное квантовое взаимодействие спинов электронов на некоторых атомных орбиталях. Эти же электроны участвуют и в кооперативном тепловом движении атомных единиц. Ограничение снизу на естественные размеры зерен в металлах и сплавах формируют дислокационные процессы, так как кооперативное квантовое взаимодействие в кристаллической решетке не может распространяться далее, чем расстояние между большими объемными скоплениями винтовых и линейных дислокаций, или расстояния между очень длинными линейными дислокациями. Таким образом, минимальный размер зерен ограничивает и минимальное расстояние между существенными дислокациями и их скоплениями.

Согласно экспериментальным исследованиям в твердых телах идут одновременно два противоположных процесса: слияние вакансий в линейные дислокации, объемное уплотнение линейных и винтовых дислокаций, а также противоположный процесс – расщепление дислокаций, которое при некоторых условиях может быть энергетически более выгодным, [12]. При этом расстояние между плоскостями расщепленных дислокаций в металлах тоже находится в диапазоне не менее 1÷10 мк.

Кристаллизация и структурообразование сплавов

Но- мер зер- на, G	Средняя площадь сения зерна <i>a</i> , мм ²	Число зерен на площади 1 мм ² , <i>m</i>			0Сред- нее число зерен в 1 мм ² , <i>N</i>	Сред- ний ди- аметер зерна <i>d</i> , мм	Средний условный диаметр зерна <i>d</i> , мм
		мини- мальное	среднее	макси- мальное			
-3	1	0,75	1	1,5	1	1,0	0,875
-2	0,5	1,5	2	3	2,8	0,707	0,650
-1	0,25	3	4	6	8	0,5	0,444
0	0,125	6	8	12	22,6	0,353	0,313
1	0,0625	12	16	24	64	0,250	0,222
2	0,0312	24	32	48	181	0,177	0,157
3	0,0156	48	64	96	512	0,125	0,111
4	0,00781	96	128	192	1448	0,088	0,0783
5	0,00390	192	256	384	4096	0,062	0,0553
6	0,00195	384	512	768	1585	0,044	0,0391
7	0,00098	768	1024	1536	32768	0,031	0,0267
8	0,00049	1536	2048	3072	92682	0,022	-,0196
9	0,000244	3072	4096	6144	262144	0,015	0,0138
10	0,000122	6144	8192	12288	741485	0,011	0,0099
11	0,000061	12288	16384	24576	2097152	0,0079	0,0069
12	0,000030	24576	32768	49152	5931008	0,0056	0,0049
13	0,000015	49152	65536	98304	16777216	0,0039	0,0032
14	0,000008	98304	131072	96608	47449064	0,0027	0,0027
ГОСТ 5639-82 С. 5							

Рис. 2. ГОСТ 5639-82, таблица 1, [10]

Наиболее вероятный диаметр d_{\min} кристаллита и соответственно λ_{\min} в обозначенном диапазоне определим из концепции температурных волн, [4]. Минимальную длину фоновой волны излучают два атома, которые образуют отдельную квантовую систему и двигаются согласованно при теплопередаче. Обозначим такую длину волны и ее частоту как λ_0 и f_0 , а частоту фоновонного излучения кристаллита $d_{\min} - f_{\max}$. Тогда максимальную амплитуду в диапазоне $1 \cdot 10^{-3} - 10 \cdot 10^{-3}$ мм будет иметь фоновонная волна, которая находится в параметрическом резонансе с волной частоты f_0 . Условия параметрического резонанса предполагают следующие соотношения для частот:

$$f_{\max} = \frac{2f_0}{n}; \quad n = 1, 2, 3, \dots; \quad \frac{f_0}{f_{\max}} = \frac{n}{2}. \quad (12)$$

Так как частота f и длина λ фоновонной волны связаны между собой зависимостью $f = v/\lambda$, где v скорость звука, то из (12) получим: $\lambda_{\min}/\lambda_0 = n/2$. Тогда из квантовых условий калибровки (11) следует:

$$\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_0} = \frac{n}{2} = (\sqrt{2})^m; \quad n = (\sqrt{2})^{m+2}; \quad (13)$$

$$\lambda_{\min} = (\sqrt{2})^m \cdot \lambda_0.$$

При этом показатель степени m следует определить таким образом, чтобы λ_{\min} находилась в диапазоне значений $1 \cdot 10^{-3} - 10 \cdot 10^{-3}$ мм. Так как фононную волну длины λ_0 излучают два атома, то ее длину будет составлять среднее расстояние между центрами атомов (период кристаллической решетки) и два атомных радиуса. Расстояние между двумя соседними атомами в металлах 2-7 ангстрем, [13], $1 \text{ \AA} = 1 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 10^{-7} \text{ мм}$. Тогда среднее междуатомное расстояние $4,5 \text{ \AA} = 4,5 \cdot 10^{-7} \text{ мм}$. За средний металлический атомный радиус \bar{r}_0 обычно принимается половина кратчайшего межатомного расстояния в кристаллической структуре металла, сплава или интерметаллического соединения, то есть $\bar{r}_0 = 1 \text{ \AA} = 1 \cdot 10^{-7} \text{ мм}$ для рассматриваемого варианта стандартных средних значений размеров зерна в металлах и сплавах. И тогда среднее значение для λ_0 будет составлять:

$$\bar{\lambda}_0 = 4,5 \cdot 10^{-7} \text{ мм} + 2 \cdot 10^{-7} \text{ мм} = 6,5 \cdot 10^{-7} \text{ мм}.$$

При $m = 24$ в (13) среднее значение минимальной длины фононной волны $\bar{\lambda}_{\min}$ и, соответственно, нижний предел для λ_{\max} будут иметь следующие численные значения:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{\min} &= \left(\sqrt{2}\right)^{24} \bar{\lambda}_0 \cong 26,6 \cdot 10^{-4} \text{ мм} \cong 0,0027 \text{ мм}; \\ 0,0027 \text{ мм} &\leq \lambda_{\max} \leq 1 \text{ мм}. \end{aligned} \tag{14}$$

Таким образом, определенные с помощью квантово-механических представлений верхняя и нижняя границы зерен в металлах и сплавах, а также калибровка их размеров в 18 баллов (№ –3...14) полностью совпадают с (таблицей 1) ГОСТ 5639-82, рис. 2.

Физико-математическая модель теплопереноса в [4-5], построенная с использованием линейного гиперболического уравнения Лыкова (1) и расширенного закона Фурье (3), отличается следующими особенностями.

1. Феноменологические особенности. Очевидно, что сам термин «релаксация» имеет, как минимум, четыре разных семантических наполнения. Это релаксация тепловых деформаций вблизи атомных единиц, элементарных кристаллических ячеек, или кристаллитов, размер которых не превышает максимальную длину квантованной фононной волны. Такая релаксация имеет квантовый характер. Второй тип релаксации – это релаксация (затухание) собственно тепловых волн, которые лежат в области ультразвука и, частично, гиперзвука. Третий тип – релаксация термоупругих или вязких макроскопических напряжений и деформаций, которые порождаются в процессе теплопередачи. Такие задачи осложнены тем, что классические уравнения упругости и термоупругости не описывают квантово-механические эффекты, которые появляются при распространении высокочастотных тепловых волн. Четвертый тип релаксации связан с распространением и затуханием длинноволновых температурных волн, длина волны которых сопоставима с размерами отливки (или другого твердого, или жидкого тела с ограниченным объемом). Такие волны имеют характер низкочастотной амплитудной модуляции [4] на высокочастотной части тепловых волн.

2. Гиперболическое уравнение теплопроводности – линейное, и отличается от уравнения Лыкова лишь интерпретацией и величиной коэффициента τ_r в (1). При этом учитываются квантовые особенности фононной компоненты теплопередачи [5], и на основе расширенного закона Фурье определяется формула для вычисления

τ , в конкретной среде. Коэффициенты в (1) постоянные на каждом из определенных температурных интервалов, которые известны из экспериментальных исследований. При больших размерах сечений отливки следует также вводить пространственную сетку разных значений средних величин начальных условий для температуры и теплового потока.



Список литературы

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: «Высшая школа», 1957. – 599 с.
2. Шашков А. Г., Бубнов В. А., Яновский С. Ю. Волновые явления теплопроводности. Системно-структурный подход. – М.: «Едиториал УРСС», 2004. – 296 с.
3. Малая Ю. А. Математическое моделирование процессов теплопроводности с учетом релаксации теплового потока. – Днепропетровск: Национальная металлургическая Академия Украины, 2015. – 183 с.
4. Тьднюк В. З., Шинский О. И., Кравченко В. П. Кристаллизация и затвердевание отливок в температурном поле гиперболического типа. – К.: Процессы литья. – 2015. – № 4(112). – С. 9-21.
5. Тьднюк В. З., Шинский О. И., Кравченко В. П., Клименоко С. И. Оценка теплового потока при кристаллизации отливок с учетом обобщенного закона Фурье и фононной теплопередачи. – К.: Процессы литья. – 2016. – № 4. – С. 18-25.
6. Гавриленко Л. В., Дубинов А. А., Романов Ю. А. Комбинационное рассеяние света в твердых телах. – Нижний Новгород, Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского 2010. – 17 с.
7. Сергеев И. И. Основы физики лазеров. – Минск: БГУИР, 2010. – 30 с.
8. Неразрушающий контроль (справочник под ред. В. В. Клюева, т. 3), / И. Н. Ермолов, Ю. В. Ланге. Ультразвуковой контроль. – М.: «Машиностроение», 2004. – 864 с.
9. Ермолов И. Н., Вopilкин А. Х., Бадалян В. Г. Расчеты в ультразвуковой дефектоскопии. – М.: НПЦ «Эхо+», 2004. – 108 с.
10. ГОСТ 5639-82. Межгосударственный стандарт. Стали и сплавы. Метод выявления и определения величины зерна. – М.: ИПК Изд. стандартов, 1983. – 21 с.
11. Гаврилюк А. А., Зубрицкий С. М., Петров А. Л. Физика металлов и сплавов. – Иркутск, ГОУ ВПО ИГУ, 2008. – 121 с.
12. Орлов Л. Г., Усиков М. П., Утевский Л. М. Наблюдение дислокаций в металлах с помощью электронного микроскопа. – М.: Успехи физических наук, 1962, т. LXXVI, вып. 1. – С. 109-152.
13. Кириченко В. Г., Коваленко О. В. Элементарное металловедение сталей. – Харьков: ХНУ им. В. Н. Каразина, 212. – 97 с.



References

1. Lykov A. V. (1957). Teoriia teploprovodnosti. [The theory of heat conduction]. Moscow: «Vysshiaia shkola», 599 p. [in Russian].
2. Shashkov A. G., Bubnov V. A., Yanovskii S. Yu. (2004). Volnovye iavleniia teploprovodnosti. Sistemno-strukturnyi podkhod. [Wave phenomena conductivity. Systemic-structural approach]. Moscow: Editorial URS, 296 p. [in Russian].
3. Malaia Yu. A. (2015). Matematicheskoe modelirovanie protsessov teploprovodnosti s uchetom relaksatsii teplovogo potoka. [Mathematical modeling of heat conduction processes with heat flux relaxation]. Dnepropetrovsk: Nacional'naia metallurgicheskaia Akademiia Ukrainy, 183 p. [in Russian].

4. Tydniuk V. Z., Shinskii O. I., Kravchenko V. P. (2015). Kristallizaciia i zatverdevanie otlivok v temperaturnom pole giperbolicheskogo tipa. [*The crystallization and solidification of the castings in the temperature field of hyperbolic type*]. Kiev: Protsessy litia, № 4(112), pp. 9-21. [in Russian].
5. Tydniuk V. Z., Shinskii O. I., Kravchenko V. P., Klimenko S. I. (2016). Otsenka teplovogo potoka pri kristallizatsii otlivok s uchetom obobshhennogo zakona Fur'e i fononnoi teploperedachi. [*Assessment of heat flow in the crystallization of castings based on generalized Fourier's law of heat transfer and phonon*]. Kiev: Protsessy litia. [in Russian].
6. Gavrilenko L. V., Dubinov A. A., Romanov Yu. A. (2010). Kombinacionnoe rasseianie sveta v tverdykh telakh. [*Raman Scattering in Solids*]. Nizhnii Novgorod, Nizhegorodskii gosuniversitet named by N. I. Lobachevskogo, 17 p. [in Russian].
7. Sergeev I. I. (2010). Osnovy fiziki lazerov. [*Basics of laser physics*]. Minsk: BGUIR, 30 p. [in Russian].
8. Nerazrushaiushhii kontrol (spravochnik ed. by V. V. Kliueva, vol. 3). [*Unbrakable control*]. I. N. Ermolov, Yu. V. Lange. Ul'trazvukovoi kontrol. Moscow: Mashinostroenie, 2004, 864 p. [in Russian].
9. Ermolov I. N., Vopilkin A. H., Badaljan V. G. (2004). Raschety v ultrazvukovoi defektoskopii. [*Calculations in ultrasonic testing*]. Moscow: NPC Ekho+, 108 p. [in Russian].
10. GOST 5639-82. Mezhdgosudarstvennyj standart. Stali i splavy. Metod vyjavlenija i opredelenija velichiny zerna. [*Interstate standards. Steel and steel alloys. Method for detection and determination of grain size*]. Moscow: IPK Izd. standartov, 1983, 21 p. [in Russian].
11. Gavriiliuk A. A., Zubrickii S. M., Petrov A. L. (2008). Fizika metallov i splavov. [*The Physics of Metals and Alloys*]. Irkutsk, GOU VPO IGU, 121 p. [in Russian].
12. Orlov L. G., Usikov M. P., Utevskii L. M. Nabliudenie dislokacii v metallakh s pomoshh'iu elektronного mikroskopa. [*Observation of dislocations in a metal with an electron microscope*]. Moscow: Uspekhi fizicheskikh nauk, 1962, vol. LXXVI, issue 1, pp. 109-152. [in Russian].
13. Kirichenko V. G., Kovalenko O. V. Elementarnoe metallovedenie stalei. [*Elementary metallurgy steels*]. Kharkov: HNU named by V. N. Karazina, 212, 97 p. [in Russian].

Поступила 10.08.2016