УДК 669.018:54

В. З. Тыднюк, О. И. Шинский, В. П. Кравченко, С. И. Клименко
Физико-технологический институт металлов и сплавов НАН Украины, Киев

ОЦЕНКА ТЕПЛОВОГО ПОТОКА ПРИ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ОТЛИВОК С УЧЁТОМ ОБОБЩЁННОГО ЗАКОНА ФУРЬЕ И ФОНОННОЙ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

Получены формулы для вычисления коэффициентов в обобщённом законе Фурье и определения теплового потока в отливках с учётом фононной теплопередачи.

Ключевые слова: *тепловой поток, обобщённый закон Фурье, гиперболическое уравнение теплопроводности, механизмы теплопередачи, температурные волны, фононная теплопередача, кристаллизация отливок, влияние размеров зерна на теплопередачу.*

Отримано формули для обчислення коефіцієнтів в узагальненому законі Фур'є і визначення теплового потоку у виливках з урахуванням фононної теплопередачі.

Ключові слова: *тепловий потік, узагальнений закон Фур'є, гіперболічне рівняння теплопровідності, механізми теплопередачі, температурні хвилі, фононна теплопередача, кристалізація виливок, вплив розмірів зерна на теплопередачу.*

The formulas for calculating coefficients in the generalized Fourier's law, and for determination of heat flow in castings considering the generalized Fourier's law and phonon heat transfer, were obtained.

Keywords: *heat flow, generalized Fourier's law, hyperbolic heat conductivity equation, heat transfer mechanism, temperature waves, phonon heat transfer, crystallization of castings, influence of grain size on heat transfer.*

Исследования температурных полей в затвердевающей отливке и литейной форме были и остаются одной из главных задач литейного производства. Для соответствия необходимым требованиям, которые предъявляются к микроструктуре и механическим свойствам литых деталей и, в свою очередь, для соответствия химического состава и свойств микроструктуры отливок необходимо постоянно совершенствовать технологии литья и разрабатывать новые концепции и модели построения литейно-металлургических технологий. При этом следует учитывать некоторые простые формульные соотношения, которые лежат как в основе различных физико-математических моделей тепломассопереноса, так и используются при экспериментальном определении важнейших параметров тепловых процессов.

Одной из основных проблем при инженерных расчётах является определение теплового потока в различных областях жидкого металла, зоне кристаллизации и разных участках литейной формы, так как этот поток является динамическим фактором и зависит от многих нестационарных условий. Классическое определение теплового потока, как известно, определяется законом Фурье, и в трёхмерном или простейшем одномерном случае выражается формулами [1-2]:

$$q = -k \operatorname{grad} u(M, t);$$
$$q = -k\frac{\partial u}{\partial x} \approx -k\frac{\Delta u}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Здесь q – плотность теплового потока, Вт/м^2; k – коэффициент теплопроводности, Вт/м · град; $u\ (M, t)$ – температура, град. по шкале Цельсия (^{0}С) или Кельвина (K); *М* – точка пространства. При инженерных расчётах дифференциалы часто заменяют конечным расстоянием Δx между двумя близкими точками и разностью температур Δu в этих точках, [2]. Коэффициент теплопроводности предполагается постоянным лишь для определённого температурного интервала и не зависит от направления только в изотропной (по тепловым свойствам) среде.

Формально одномерный тепловой поток как функция двух переменных $q\ (x, t)$ раскладывается в ряд Тейлора и, при сохранении линейных слагаемых, будет иметь вид:

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha\frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (2)$$

Вторым слагаемым можно пренебречь лишь в случае достаточно малого значения среднего значения коэффициента α по сравнению со средним значением коэффициента теплопроводности k для некоторого интервала времени Δt. Но при этом в разных фазовых точках теплового процесса производные $\partial u/\partial x$ и $\partial u/\partial t$ могут отличаться на несколько порядков, что вносит свой вклад во второе слагаемое в (2). То есть, нет никаких предусловий считать этот коэффициент постоянно близким к нулю и независимым по величине от некоторых дополнительных физических факторов, которые не были учтены в классической теории теплопереноса. Поэтому формулу теплового потока в форме (1) можно считать верной лишь в единственном случае, когда производная потока по времени в (2) при любых условиях, по крайней мере для малых промежутков времени, является линейной функцией от производной теплового потока по координате: $\frac{\partial u}{\partial t} = \beta\frac{\partial u}{\partial x}$; $\beta = \text{const}$.

Теперь обратим внимание на некоторые физические факторы. Во-первых, тепло распространяется с конечной скоростью. Во-вторых, существует, как минимум, четыре разных механизма теплопереноса. Это так называемая «решёточная» теплопередача, когда кинетическая и потенциальная энергии теплового движения передаются путём механических упругих и неупругих столкновений атомных единиц (атомов, молекул, ионов) в твёрдых, жидких или газообразных средах. Далее, теплота распространяется также с помощью электромагнитного излучения. При любых температурах выше абсолютного нуля при движении электрически заряженных зон или диполей в атомных единицах среды в разных диапазонах излучается лучистая электромагнитная энергия. Зависимость такого излучения от температуры в классической области описывают закон Стефана-Больцмана и закон смещения Вина. Однако, в проводниках и полупроводниках с большим коэффициентом поглощения эта энергия тут же поглощается в ближайших атомных слоях, и через некоторое время задержки опять переизлучается. Определение оптико-геометрических свойств среды в металлах и полупроводниках связано со значительными математическими трудностями [1], но ввиду большого поглощения электромагнитного излучения, особенно в металлах, можно считать, что скорость лучистой теплопередачи в таких проводящих средах будет мало отличаться от скорости решёточной теплопередачи. Тем не менее, при больших температурах лучистую теплопередачу (особенно в инфракрасном диапазоне) следует учитывать на границах отливки, а также в литейных формах, которые выполнены из диэлектрических материалов.

В проводниках и полупроводниках в теплопередаче отдельно участвует электронный газ из свободных электронов проводимости или других носителей электрического заряда. Как известно, теплопроводность чистых металлов почти полностью определяется теплопроводностью их электронного газа [3]: $k = k_{\text{реш}} + k_{\text{эл}}$; $k_{\text{реш}}/\, k_{\text{эл}} \cong 5\cdot 10^{-2}$.

Но средняя длина свободного пробега электрона при этом составляет всего лишь $l_{\text{эл}} \cong 10^{-8}$ м$=10^{-6}$см. Так как размер атома водорода $\cong 10^{-8}$ см, то электрон на этом пути проходит не более 100 атомов кристаллической решётки или жидкокристаллического кластера. При наличии дефектов, дислокаций и примесных атомов длина свободного пробега электрона ещё более уменьшается, и уменьшается и доля электронной теплопроводности, $k_{\text{реш}} \cong k_{\text{эл}}$, [3].

Но теория невзаимодействующих электронов является очень приближённой, не учитывающей различные взаимодействия. Существует теория Хартри-Фока, метод самосогласованного поля и другие [4], более точные теории для описания электронного газа. Электроны взаимодействуют с фононами, между собой, с фотонами теплового электромагнитного излучения, с атомами кристаллической решётки или жидкокристаллических кластеров, при этом образуются различные квазичастицы: плазмоны, поляроны и др. [4]. И, на самом деле, свободное тепловое движение электронов не может само по себе вносить большой вклад в теплопередачу из-за малой массы электрона, по сравнению с массой атомной единицы, но при образовании квазичастиц значительно увеличивается эффективная масса электрона, при этом снижается и скорость квазичастицы. Поэтому приближённо также будем считать, что скорость теплопередачи с участием электронов проводимости сравнима со скоростью решёточной теплопередачи. Это подтверждает и закон Видемана-Франца, [5]:

$$\frac{\textit{коэффициент теплопроводности}}{\textit{удельная электропроводность}} = \alpha T \qquad (3)$$

где α = const, T – абсолютная температура. То есть, при увеличении температуры пропорционально возрастает и количество свободных электронов, но при этом пропорционально возрастает в той же среде и решёточная теплопередача.

Кроме образования квазичастиц с кристаллической решёткой или атомными кластерами в жидкости, свободные электроны проводимости имеют ещё один канал теплового взаимодействия: обмен тепловыми фононами. Небольшое значение численного коэффициента в законе Видемана-Франца (3), $\alpha = 2{,}47\cdot 10^{-8}$, подтверждает, что фононный обмен электронов с атомной решёткой и другими электронами является процессом с большей вероятностью, по сравнению с другими. Закон Видемана-Франца был открыт в 1853 году, но только с помощью квантовой статистики Зоммерфельдом было получено теоретическое выражение для этого коэффициента, которое очень хорошо согласовалось с экспериментальными данными.

Фонон [4], [6], [7] представляет собой квазичастицу, акустическое излучение квантовой системы, которую образуют большие группы (кластеры) атомных единиц в кристаллической решётке, аморфном твёрдом теле, в жидкости или газе (при большом давлении или температуре). При этом такая группа атомных единиц образует квантовый осциллятор с согласованным тепловым движением. Так как скорость звука, включая области ультразвука и частично гиперзвука, которые и содержат частоты тепловых фононов, значительно превышает скорость решёточной теплопередачи, то в предложенном приближении тепловой поток будет состоять из двух основных компонент: решёточная теплопередача, которую характеризуют коэффициент теплопроводности и коэффициент температуропроводности; фононная тепловая передача, основной параметр которой – коэффициент затухания.

То есть в реальных тепловых процессах при тепловом движении атомных единиц постоянно происходит излучение фононов. Фононная волна обгоняет решёточную теплопередачу, поглощается и снова переизлучается. При этом пробег свободного фонона значительно превышает междуатомные расстояния. Таким образом, второе слагаемое в (2), в большинстве случаев, определяется фононной компонентой теплопередачи.

Тем не менее, при очень развитых теоретических и экспериментальных исследованиях фононного излучения в твёрдых, жидких телах и газах, а также зависимости теплоёмкости и других термодинамических параметров от интенсивности фононного излучения, классическая теория теплопереноса не учитывает фононную компоненту. Классическое уравнение теплопроводности выводится лишь из закона Фурье (1) и закона баланса энергии в элементарном микрообъёме.

Однако, обобщённый закон Фурье, где учитывалась и производная по времени, был вначале сформулирован в несколько отличной форме от (2):

$$q = -k \operatorname{grad} u - \tau_r (\partial q / \partial t) . \qquad (4)$$

Интерпретация коэффициента τ_r в (4) обычно связывается со временем релаксации тепловых напряжений. Обобщённый закон Фурье (4) является уравнением с частными производными первого порядка от двух неизвестных, и не даёт непосредственную формулу для определения теплового потока.

Но такая формулировка обобщённого закона Фурье имеет собственную историю. Классическое параболическое уравнение теплопроводности допускает возможность мгновенного распространения теплового взаимодействия, и на этот парадокс впервые обратил внимание Риман. Максвелл указал (1867 г.), что такого парадокса можно избежать, если в законе теплопроводности Фурье (1) добавить дополнительный член, учитывающий инерцию теплопередачи. Работы Максвелла [8] также являются основополагающими и при исследованиях собственно релаксации (рассеивания) упругих и тепловых напряжений, и во многих других областях молекулярной физики и статистической физики. В 1948 г. Каттанео [9] был предложен вариант закона Фурье с релаксационным членом (4). П. Вернотт и А. В. Лыков независимо друг от друга показали, что скорость v распространения теплоты – конечна, а коэффициент τ_r в (4) – зависимый от времени релаксации, связан с этой скоростью зависимостью: $v\sqrt{\beta/\tau_r}$; $\beta = \text{const}$.

В 1967 г. для скоростного потока газов и других высокоинтенсивных нестационарных процессов А. В. Лыковым был предложен [10] вывод гиперболического (волнового) уравнения теплопроводности на основе обобщённого закона Фурье (4) с коэффициентом релаксации, который определяется экспериментально.

Если дополнить обобщённый закон Фурье (4) ещё одним уравнением типа (2), то получим модифицированное обобщение закона Фурье в виде системы из двух уравнений, [11]:

$$q = -k \operatorname{grad} u - \tau (\partial q / \partial t), \qquad (5)$$

$$q = -k \operatorname{grad} u - s (\partial u / \partial t) .$$

В [11] получено точное аналитическое решение гиперболического уравнения Лыкова, которое состоит из суммы двух решений: гиперболической (волновой) части и параболической. При этом показано, что параболическое решение может быть представлено как конечный ряд низкочастотных амплитудных модуляций на несущих волнах гиперболического решения. Групповая скорость таких модуляций будет уже близкой к скорости решёточной теплопередачи.

Система уравнений (5) позволяет получить более приемлемую для инженерных расчётов формулу теплового потока, чем обобщённый закон Фурье в виде (4). Вначале сравним скорости решёточной и фононной теплопередачи. Скорость изменения температуры среды посредством механической передачи потенциальной и кинетической энергии от одних атомных единиц к другим будет определяться коэффициентом температуропроводности. Для металлов максимальное значение этого коэффициента составляет $\cong 2\cdot10^{-4}$ м^2/с (калий, серебро). В то же время минимальная скорость звука в металлах для продольной волны в той же системе единиц $\cong 3\cdot10^3$ м/с (серебро). Поэтому в достаточно широких пределах временного интервала оба уравнения системы (5) можно продифференцировать по времени при условии $\partial u/\partial x = \mathrm{const}$ (одномерный вариант). Решения соответствующих дифференциальных уравнений второго порядка будут иметь следующий вид, [11]:

$$u(x,t)\Big|_{\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{const}} = u(x,0)\,e^{-\frac{1}{\tau}\cdot t}; \tag{6}$$

$$q(x,t)\Big|_{\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{const}} = q(x,0)\,e^{-\frac{1}{\tau}t},$$

где $-1/\tau$ – коэффициент затухания во времени для тепловой фононной волны, а $u(x,0)$ и $q(x,0)$ – начальные условия для температуры и плотности теплового потока. Так как из сравнения первого и второго уравнения в (5) имеем $\tau\,(\partial q/\partial t) = s\,(\partial u/\partial t)$, то, дифференцируя (6) по времени, находим следующую зависимость между коэффициентами s и τ: $s = \tau\dfrac{q(x,0)}{u(x,0)}$.

Заменяя в этой формуле отношение начальных условий для плотности теплового потока и температуры их средними значениями в окрестности точки x, $\tau_0 = \dfrac{\overline{q}(x,0)}{\overline{u}(x,0)}$, получим: $s = \tau\cdot\tau_0 = \tau\dfrac{\overline{q}(x,0)}{\overline{u}(x,0)}$, Таким образом, модификация обобщённого закона

Фурье (5) (одномерный вариант) будет иметь следующий вид:

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial x} - \tau\frac{\partial q}{\partial t}; \tag{7}$$

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial x} - \tau\frac{\overline{q}(x,0)}{\overline{u}(x,0)}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Так как в экспериментальных исследованиях затухания ультразвука высоких частот принято пользоваться не коэффициентом затухания во времени – $(1/\tau)$, а коэффициентом затухания в пространстве – δ, [12], то, заменив в экспоненциальном законе затухания (6) $e^{-\frac{1}{\tau}\cdot t}$ время t на x/ν, где – ν скорость звука, получим: $e^{-\frac{1}{\tau}\cdot t} = e^{-\frac{1}{\tau v}\cdot x} = e^{-\delta\cdot x}$, $\tau = \dfrac{1}{\delta\cdot\nu}$. Тогда систему уравнений (7) для обобщённого

закона Фурье запишем следующим образом:

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\delta v}\frac{\partial q}{\partial t};$$
(8)

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\delta v}\frac{\overline{q}(x,0)}{\overline{u}(x,0)}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Для получения численных оценок коэффициента $1/\delta v = \tau$ в (8) следует, прежде всего, определить максимальную длину тепловой фононной волны λ_{max}. Такая длина волны определяет наиболее вероятную низкоэнергетическую частоту излучения при фононных процессах. Действительно, средняя концентрация фононов $\overline{n}_{ф}$ определяется функцией распределения Планка $\overline{n}_{ф} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/T} - 1}$, где $\hbar$ – постоянная Планка, ω квантованная круговая частота, связанная с обычной частотой f формулой $\omega = 2\pi f$, T – абсолютная температура (K), [3], [6]. При высоких температурах $T \gg \hbar\omega$ распределение Планка переходит в соотношение $\overline{n}_{ф} = T / \hbar\omega$. Из каждого из двух распределений очевидно, что наибольшая концентрация фононов при любой фиксированной температуре соответствует максимальной длине квантованной фононной тепловой волны λ_{max}.

При приближении к абсолютному нулю фононный спектр «вымерзает», и остаются лишь длинноволновые тепловые фононные волны акустического диапазона. При этом в металлах появляется состояние сверхпроводимости из-за объединения электронов проводимости в куперовские пары. Квантово-механическое притяжение между двумя электронами куперовской пары объясняется обменом между электронами низкоэнергетическими квантами возбуждения решётки – фононами. При этом притяжение наиболее сильно проявляется между электронами, которые имеют противоположные спины и импульсы.

Куперовская пара и некоторый сегмент кристаллической решётки фактически образуют на некоторое время квазичастицу, эффективный диаметр которой определяет максимальную длину фононной волны, при которой акустическая волна излучается и поглощается дискретно, квантами. Такая длина волны неявно определяет и максимальное эффективное расстояние квантового взаимодействия в кристаллической решётке.

Расстояние между электронами куперовской пары $D \approx 10^{-4}$ см $=10^{-6}$ м, при этом 10^{-6} куперовских пар перекрываются, образуя общий объём, [13]. Такой объём помещается в куб, длина ребра которого определяет потенциально возможную максимальную длину квантованной фононной волны:

$$\lambda_{max} \cong \sqrt[3]{10^6}\cdot D = 10^2 \cdot 10^{-6}\,\text{м} = 10^{-4}\,\text{м} = 0{,}1\,\text{мм}. \quad (9)$$

По ГОСТ 5639-82 для сталей и сплавов, [14] – это соответствует размеру зерна № 3.

Для конкретного образца λ_{max} будет определяться средним размером зерна (кристаллита) $\overline{D}$ для всех $\overline{D} \le \lambda_{max}$. В металлах и сплавах общее затухание состоит из поглощения и рассеивания акустической волны, формула для затухания имеет вид, [12]: $\delta = Af + Bf^4\,\overline{D}^3$, где f – частота колебаний, A, B – некоторые постоянные коэффициенты, которые приводятся в справочной литературе. Если длина акустической волны $\lambda \le \overline{D}$, то затухание определяется преимущественно поглощением, то есть пропорционально частоте.

Приведём численный расчёт коэффициента $\tau = 1/\delta v$ для алюминия. По справочным данным при частоте $f = 2{,}5$ МГц коэффициент затухания $\delta \cong 0{,}1$ Нп/м, скорость продольной звуковой волны $v \cong 6\cdot 10^3$ м/с, , [15]. Средний размер зерна в алюминии без деформационногоотжига $\overline{D} = 0{,}1\,\text{мм} = 10^{-4}$ м. Тогда $f_{\min} = \dfrac{v}{\lambda_{\max}} = \dfrac{6\cdot 10^3}{10^{-4}}\dfrac{\text{м}}{\text{с}}\cdot\dfrac{1}{\text{м}} = 60\,\text{МГц}$.

Коэффициент затухания для частоты $f_{\min}$ находим из соотношения пропорциональности между частотами и коэффициентами затухания: $\dfrac{\delta_{\max}\cdot 1/\text{м}}{0{,}1\cdot 1/\text{м}} = \dfrac{60\,\text{МГц}}{2{,}5\,\text{МГц}}$, $\delta_{\max} = 2{,}4\dfrac{1}{\text{м}}$. Произведение $\delta_{\max} v = 2{,}4\cdot 6\cdot 10^3\,\dfrac{1}{\text{м}}\cdot\dfrac{\text{м}}{\text{с}} = 1{,}44\cdot 10^4\,\dfrac{1}{\text{с}}$. Таким образом, коэффициент $\tau = 1/\delta v$ для алюминия равен: $\tau_{Al} \approx 7\cdot 10^{-5}$ с.

Но время релаксации тепловых напряжений τ_r (4) для металлов ещё более малое, в частности, для алюминия оно составляет $\tau_r \approx 10^{-11}$ с, [10], так как определяется согласно связанным задачам термоупругости и классической теории теплопереноса. Такое большое отличие по порядку в 10^6 раз между τ_r в (4) и коэффициентом τ в (7) объясняется тем, что обобщённый закон Фурье изначально трактовался как зависимый от времени релаксации термоупругих напряжений, то есть выравнивания упругих напряжений, появляющихся в результате теплопереноса, в ближайшей окрестности атомной единицы. Такая интерпретация весьма затрудняет и экспериментальное определение именно времени релаксации. Но из расширения обобщённого закона Фурье до системы их двух уравнений (5) непосредственно следует, что коэффициент τ зависит только от затухания тепловой фононной волны по вектору теплового потока, то есть представляет собой релаксацию лишь фононной волны.

Исследованиям распространение термоупругих волн в широком диапазоне значений постоянной релаксации теплового потока, то есть связанным задачам теорий упругости и теплопереноса, посвящено очень много работ. Это достаточно сложная проблема, относительно которой приведём следующую цитату, [16]: «Данная задача представляется актуальной, поскольку теоретическая оценка постоянной релаксации в металлах, согласно фононной теории, составляет несколько пикосекунд (10^{-12} с). В то время как экспериментальные данные дают разброс результатов, отличающихся от теоретической оценки на несколько порядков: от 10^{-8} с до 10^{-11} с… По причине расхождения экспериментальных данных между собой, можно предположить, что существующие методы экспериментального определения релаксации теплового потока нуждаются в дальнейшем усовершенствовании.»

References

1. *Телегин А. С., Швыдкий В. С. , Дорошенко Ю. Г.* Тепло-массоперенос. – М.: «Металлургия», 1995. – 400 с.
2. Эльдарханов А. С., Ефимов В. А., Нурадинов А. С. Процессы формирования отливок и их моделирование. – М.: «Машиностроение», 2001. – 208 с
3. Елманов Г. Н., Зуев М. Т., Смирнов Е. А. Теплопроводность металлов и сплавов. – М.: МИФИ, 2007. – 32 с.
4. Киттель Ч. Квантовая теория твердых тел. – М.: «Наука», 1967. – 492 с.
5. Глазков В. Н. Кинетические и электрические явления в твердых телах и металлах. Лекция 5. – М.: «МФТИ», 2015. – 28 с.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. – М.: «Наука», 1976, ч. 1. - 583 с.
7. *Карпов С. В*. Физика фононов. – Санкт-Петербург: «СПГТУ», 2006.– 129 с.
8. *Ельяшевич М. А., Протько Т. С.* Вклад Максвелла в развитие молекулярной физики и статистических методов. – «Успехи физических наук», 1981, т. 135, вып. 3. – С. 381-423.

9. Carlo Cattaneo. «Sulla conduzione de calore». - Atti del Semine, Mat. Fis. Univ. Modena, 1948.
10. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – М.: «Высшая школа», 1957. – 599 с.
11. Т*ыднюк В. З., Шинский О. И., Кравченко В. П.* Кристаллизация и затвердевание отливок в температурном поле гиперболического типа. – К.: Процессы литья. – 2015. – № 4(112). – С. 9 – 21.
12. *Ермолов И. Н., Алешин Н. П., Потапов А. И.* Акустические методы контроля. – М.: Высшая школа. – 1991. – 283 с.
13. *Савельев И. В.* Курс общей физики. Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц – М.: Наука. – 1987. Т. 3 – 320 с.
14. ГОСТ 5639-82. Межгосударственный стандарт. Стали и сплавы. Метод выявления и определения величины зерна. – М.: ИПК Изд. стандартов. – 1983. – 21 с.
15. *Ермолов И. Н., Вопилкин А. Х., Бадалян В. Г.* / Расчеты в ультразвуковой дефектоскопии. – М.: НПЦ «Эхо+», 2004. – 108 с.
16. *Бабенков М. Б.* Распространение термоупругих волн в среде с учетом релаксации теплового потока. – Санкт-Петербург, Институт проблем машиноведения РАН. – 2013. – 22 с.

References

1. *Telegin A. S., Shvydkii V. S., Doroshenko Ju. G*. (1995). Teplo-massoperenos. [*Heat and mass transfe*r]. Moscow: Metallurgiia. [in Russian].
2. *Eldarhanov A. S., Yefimov V. A., Nuradinov A. S*. (2001). Processy formirovaniia otlivok i ih modelirovaniie. [*The formation of castings and modeling*]. Moscow: «Mashinostroieniie». [in Russian].
3. *Elmanov G. N., Zuiev M. T., Smirnov E. A*. (2007). Teploprovodnost metallov i splavov. [*The thermal conductivity of metals and alloys]*. Moscow: MIFI. [in Russian].
4. *Kittel Ch.* (1967). Kvantovaia teoriia tverdyh tel. [Quantum theory of solids]. Moscow: Nauka. [in Russian].
5. *Glazkov V. N.* (2015). Kineticheskiie i elektricheskiie yavleniia v tverdyh telah i metallah. Lekciia 5. [*Kinetic and electrical phenomena in solids and metals. Lecture 5*]. Moscow: «MFTI». [in Russian].
6. *Landau L. D., Lifshic E. M.* (1976). Statistichieskaia fizika. [*Statistical physics*]. (Part. 1, 583 p.). Moscow: Nauka. [in Russian].
7. *Karpov S. V*. (2006). Fizika fononov. [*The physics of phonons*]. Sankt-Peterburg: SPGTU. [in Russian].
8. *Eliashevich M. A., Protko T. S.* (1981). Vklad Maksvella v razvitiie molekuliarnoi fiziki i statisticheskih metodov. [*Maxwell's contribution to the development of molecular physics and statistical methods*]. (Vol. 135, issue 3, pp. 381-423). Uspekhi fizicheskikh nauk. [in Russian].
9. *Carlo Cattaneo* (1948). Sulla conduzione de calore. Atti del Semine, Mat. Fis. Univ. Modena.
10. *Lykov A. V.* (1957). Teoriia teploprovodnosti. [*The theory of heat conduction*]. Moscow: Vysshaia shkola. [in Russian].
11. *Tydniuk V. Z., Shinskii O. I., Kravchenko V. P*. (2015). Kristallizaciia i zatverdevaniie otlivok v temperaturnom pole giperbolicheskogo tipa. [*The crystallization and solidification of the castings in the temperature field of hyperbolic type*]. (№ 4 (112), pp. 9-21). Kiev: Protsessy litia. [in Russian].
12. *Yermolov I. N., Aleshin N. P., Potapov A. I*. (1991). Akusticheskiie metody kontrolia. [*Acoustic control methods*]. Moscow: Vysshaia shkola. [in Russian].
13. *Savelev I. V.* (1987). Kurs obshhei fiziki. Kvantovaia optika. Atomnaia fizika. Fizika tverdogo tela. Fizika atomnogo yadra i elementarnyh chastits. [*The course of general physics. Quantum optics. Atomic physics. Solid State Physics. Nuclear physics and elementary particles*]. (Vol. 3). Moscow: Nauka. [in Russian].
14. GOST 5939-82. (1983). Mezhgosudarstvennyi standart. Stali i splavy. Metod vyiavleniia i opredeleniia velichiny zerna. [*Interstate standards. Steel and alloys. Method for detection and determination of grain size*]. Moscow: IPK, Izd. Standartov. [in Russian].
15. *Yermolov I. N., Vopilkin A. H., Badalian V. G*. (2004). Raschety v ultrazvukovoi defektoskopii. [*Calculations in the ultrasonic testing*]. Moscow: NPC 'Ekho+'.[in Russian].
16. *Babenkov M. B.* (2013). Rasprostraneniie termouprugih voln v srede s uchetom relaksacii teplovogo potoka. [*Distribution thermoelastic waves in a medium with heat flow relaxation*]. Sankt-Peterburg: Institut problem mashinovedeniia RAN. [in Russian].

Поступила 08.06.2016