УДК 621.745.5

В. З. Тыднюк, О. И. Шинский, В. П. Кравченко
Физико-технологический институт металлов и сплавов НАН Украины, Киев

КРИСТАЛЛИЗАЦИЯ И ЗАТВЕРДЕВАНИЕ ОТЛИВОК В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Показано, что при учёте как решёточной теплопередачи, так и теплопереноса с участием фононного и электромагнитного теплового излучения, температурное поле в твёрдых и жидких телах будет гиперболическим. Решения гиперболического уравнения теплопроводности более точно описывают процессы теплопередачи, кристаллизации и охлаждения в отливках. Получено аналитическое решение одномерной и плоской общих краевых задач гиперболического уравнения теплопроводности в рамках теории Максвелла-Каттанео-Лыкова при формулировке обобщённого закона Фурье с помощью системы из двух уравнений. С точки зрения концепции температурных волн определяются некоторые механизмы влияния вибрации на процесс кристаллизации металлов и сплавов.

Ключевые слова: *обобщённый закон Фурье, температурные волны, фононная компонента теплопередачи, затухающие стоячие волны, параметрический резонанс, влияние вибрации на кристаллизацию металлов и сплавов.*

Показано, що при урахуванні теплопередачі як за допомогою механічного теплового руху, так і теплопереносу за участі фононного та електромагнітного теплового випромінювання, температурне поле у твердих та рідких тілах визначається гіперболічним рівнянням теплопровідності. Рішення такого рівняння більш достеменно описують процеси теплопередачі, кристалізації та охолодження у виливках. Отримано аналітичні розв'язки гіперболічного рівняння теплопровідності у межах теорії Максвелла-Каттанео-Ликова при формулюванні узагальненого закону Фур'є за допомогою системи двох рівнянь. З точки зору концепції температурних хвиль визначаються деякі механізми впливу вібрацій на процеси кристалізації металів та сплавів.

Ключові слова: *узагальнений закон Фур'є, температурні хвилі, фононна компонента теплопередачі, затухаючі стоячі хвилі, параметричний резонанс, вплив вібрації на кристалізацію металів і сплавів.*

It is shown that taking into account both the lattice heat transfer and heat transfer involving a phonon and electromagnetic thermal radiation, temperature field in solids and liquids is hyperbolic. Solution of the hyperbolic heat equation more accurately describes the processes of heat transfer, crystallization and solidification of castings. The analytical solution of one-dimensional and flat general boundary value problems of hyperbolic heat equation in the theory of Maxwell-Cattaneo-Lykov in the formulation of the generalized Fourier law through a system of two equations is oltained. From the point of view of the concept of temperature waves some mechanisms of influence of vibration on the crystallization of metals and alloyswere were idenbified.

Keywords: *generalized Fourier law, thermal wave, phonon component of heat transfer, damped standing waves, parametric resonance, vibration effect on the crystallization of metals and alloys.*

Постановка задачи

Многими авторами показано, в том числе и в экспериментальных исследованиях, что при сохранении одинакового химического состава сплавов их свойства могут существенно меняться в зависимости от кристаллической структуры литья [1]. При этом недостаточно используются возможности повышения механических и специальных свойств металлических материалов за счёт управления структурой и параметрами кристаллической решётки, размерами и формой кристаллов, поликристаллов, дисперсностью и расположением упрочняющих фаз, армирующих элементов, а также другими процессами формирования кристаллической структуры в отливках.

Феноменологический (качественный) прогноз свойств, инженерные расчёты, а также задачи математического моделирования и мониторинга процесса кристаллизации в отливках существенно зависят от некоторых фундаментальных теоретических предпосылок в теориях теплопроводности и тепломассопереноса. Прежде всего это относится к закону Фурье и уравнению теплопроводности на его основе. Область применимости классического уравнения теплопроводности ограничена, в частности, тем, что оно не позволяет учесть конечную скорость распространения тепловых возмущений и инерционность процессов теплопереноса. Очевидно также, что аргументированная гиперболическая модификация классического уравнения теплопроводности даёт другие решения соответствующих краевых задач, что отражается во многих областях практического применения теории процессов тепломассопереноса и соответствующих инженерных расчётов.

Гиперболическое уравнение теплопроводности непосредственно следует из обобщённого закона Фурье [2], [3]:

$$q = -k \operatorname{grad} u - \tau_r \frac{\partial q}{\partial t}, \tag{1}$$

где q – плотность теплового потока, k – коэффициент теплопроводности, u – температура, а интерпретация коэффициента τ_r обычно связывается со временем релаксации тепловых напряжений, является основополагающим в исследованиях различных высокоинтенсивных тепловых процессов [2-7].

Для большинства сред и температурных режимов вторым членом в правой части (1) обычно пренебрегают из-за малых значений времени релаксации τ_r, то есть классическое уравнение теплопроводности является пока определяющим для большинства процессов с участием тепломассопереноса. Но порядок отличия теоретической оценки постоянной релаксации теплового потока, например, в металлах – составляет от экспериментальных значений до 10^4 [5]. Обобщение (1) закона Фурье не является также единственным [6]. Более того, физическая интерпретация, экспериментальное и формульное определение коэффициента τ_r в (1) существенно влияют на решения гиперболического уравнения теплопроводности.

В многочисленном ряде работ, затрагивающих вопрос о конечной скорости распространения теплоты, для вывода гиперболического уравнения теплопроводности используют теорию Максвелла-Каттанео-Лыкова [8], [9], [2], и обобщённый закон Фурье в виде выражения (1). Такие работы относятся и к практическим приложениям гиперболического уравнения теплопроводности для исследования процессов кристаллизации металлов и сплавов. Так, например, О. Н. Шабловским была исследована неравновесность процесса теплопереноса [10] и построена тепловая модель периодической кристаллизации расплава металла в изложнице на основе упрощённого (без учёта дисперсии) волнового уравнения теплопроводности.

Тем не менее для эффективного практического применения гиперболического уравнения теплопроводности теоретические и экспериментальные исследования времени релаксации тепловых напряжений в различных средах осложнены как разнообразием различных физико-математических моделей, так и не полным учётом множественных механизмов тепломассопереноса и их взаимодействия.

Обобщённый закон Фурье и гиперболическое уравнение теплопроводности

Оператор классического параболического однородного уравнения теплопроводности имеет вид:

$$u_{,t}(M,t) = a^2 \cdot div\,(grad\; u(M,t)), \tag{2}$$

где $a^2 = k/c\rho$ – коэффициент температуропроводности, в системе СИ, м²/с; c – удельная теплоёмкость, Дж/кг·К; ρ – плотность, кг/м³ ; k – коэффициент теплопроводности, Вт/м·К; $u(M, t)$ – температура, К; M – точка пространства. Запятую в нижних индексах перед символом дифференцирования используем для отличия операции дифференцирования от индексирования по координатам или другим параметрам.

Кратко рассмотрим построение гиперболического уравнения теплопроводности и некоторые его решения для твёрдого тела и, при некоторых приближениях, также для жидкости – без ограничения температурных режимов. Энергия теплового движения атомной единицы в узле кристаллической решётки состоит из средней энергии хаотического поступательного движения, энергии колебаний атомной единицы и энергии вращательного движения (спина). Под атомной единицей следует понимать атомное ядро совместно с электронами только внутренних орбит, атом или ион, несколько атомных единиц, составляющих квазичастицу, часть молекулы, либо молекулу в случае молекулярного типа кристаллической или аморфной решёток, которые движутся как одно целое при тепловом движении.

Поскольку при тепловом процессе движение атомных единиц в кристаллах имеет периодический или квазипериодический характер, то каждому из типов движений такой единицы соответствует некоторый собственный спектр колебаний. Поэтому в классических теориях квантовой статистики и физико-математических моделях влияния температуры на теплоёмкость все типы тепловых движений отдельно не рассматриваются, а сводятся лишь к колебаниям в кристаллической решётке [11].

Квантовые теории теплоёмкости, в частности, теория Дебая, учитывают, что тепловое движение атомных единиц будет иметь оптическую и акустическую ветви [12]. В последнем случае трансляционно-колебательные движения многих атомных единиц в кристаллической решётке, аморфном теле или жидкости будут согласованными (коллективными) с образованием, излучением и поглощением квазичастиц – фононов. Акустической ветви соответствуют звуковые частоты (гиперзвук и частично ультразвук) с достаточно малой длиной волны. Если исходить из наличия как решёточной теплопередачи с помощью упругих и неупругих столкновений, так и акустической компоненты, то коэффициент температуропроводности a в (2) можно рассматривать как комплексный, где мнимая часть определяет теплопередачу с участием фононной компоненты. В таком случае уравнение (2) имеет решение в виде стоячих температурных волн [13], но некоторые параметры полученного волнового решения остаются неопределёнными, и не учитывается участие теплового электромагнитного излучения в процессе теплопереноса.

Так как тепловое движение в каждой точке сплошной среды одновременно вызывает процессы фононного и электромагнитного теплового излучения (поглощения), то реальный теплоперенос состоит из трёх разных компонент: решёточной теплопередачи путём механических упругих и неупругих столкновений атомных единиц, фононной компоненты и фотонной (электромагнитной). Фононное и фотонное излучение обеспечивает не только механизм релаксации (рассеивания) тепловой энергии, но и непосредственно участвует в теплопередаче по направлению вектора теплового потока. Поэтому, в отличие от (1), обобщённый закон Фурье будем одновременно формулировать в двух разных формах как систему уравнений:

$$q = -k\,grad\,u - \tau \frac{\partial q}{\partial t};$$

$$q = -k\,grad\,u - s^2 \frac{\partial u}{\partial t};\ s^2 = s_{fn}^2 + s_f^2. \qquad (3)$$

Здесь слагаемое $s^2 \cdot (\partial u/\partial t)$ представляет собой ту часть плотности теплового потока, где тепловая энергия непосредственно переносится с участием фононного $s_{fn}^2(\partial u / \partial t)$ и фотонного $s_f^2(\partial u / \partial t)$ излучения, s^2 – коэффициент пропорциональности. Физическую интерпретацию коэффициента τ в первом уравнении (2) со временем релаксации тепловых напряжений или другими потенциально возможными теоретическими моделями пока не связываем.

Рассмотрим основные феноменологические элементы гибридного теплопереноса на примере электромагнитной составляющей релаксации и переноса тепловых возмущений. При тепловом движении атомной единицы или квазичастицы внутри тела она периодически излучает фотон (тепловое электромагнитное излучение). Такой фотон после пробега в вакуумной среде между атомами поглощается другой атомной единицей и после некоторого времени задержки переизлучается. Время задержки на более высоких энергетических уровнях определяет скорость света в конкретной среде. Такой механизм излучения относится как к диэлектрикам, так и к проводящим, в частности, металлическим средам, где коэффициент поглощения электромагнитных волн несравнимо выше, тем не менее, первичная электромагнитная волна проникает на глубину так называемого скин-слоя, затем переизлучается вследствие теплового движения, а учёт теплового излучения особенно важен при высоких температурах на границах остывающей отливки.

Далее найдём соотношение между коэффициентами τ и s^2 в выражении (3) для одномерного случая, поскольку трёхмерное (двухмерное) выражение будет аналогичным. Так как $\tau = s^2(\partial u/\partial t)/(\partial q/\partial t)$, но коэффициенты в (3) предполагаются постоянными (осреднёнными) для каждого из температурных интервалов с определённым шагом дискретизации температурной шкалы, то отношение соответствующих производных определим из следующих соображений.

Пусть в точке x одномерного стержня в момент времени t, вследствие теплового движения, атомными единицами одновременно излучается цуг фононных (фотонных) волн. Такое спонтанное излучение происходит даже при наличии теплового равновесия в окрестности точки x, а его интенсивность зависит лишь от температуры и квантовых особенностей элементарных кристаллических ячеек в сечении стержня. Это излучение опять поглощается кристаллической решёткой (жидкостью – для жидкой фазы) в окрестности точки x, изменяя параметры механического теплового движения. В сечении x одномерного стержня в момент времени t другая часть атомных единиц находится в состоянии поглощения фононов (фотонов).

Поэтому рассматриваем излучение (поглощение) акустического (электромагнитного) цуга волн на протяжении небольшого промежутка времени $t + t'$, после которого амплитуда фононной и электромагнитной волны уменьшается не более, чем в интервале $(e/3{,}0)$-$(e/2{,}5)$ раз. В таком случае плотность решёточной части теплового потока и температурное поле, определяемое только механизмом упругих и неупругих столкновений, можно считать квазипостоянными величинами.

Из сравнения первого и второго уравнений в (3) следует $\tau(\partial q/\partial t) = s^2(\partial u/\partial t)$. Если же продифференцировать по времени второе уравнение при условии $(\partial u/\partial x) = \mathrm{const}$, то получим: $(\partial q/\partial t) = - s^2(\partial^2 u/\partial t^2)$; $\tau(\partial q/\partial t) = - \tau s^2 (\partial^2 u/\partial t^2) = s^2(\partial u/\partial t)$; $(\partial^2 u/\partial t^2) = (-1/\tau)\cdot(\partial u/\partial t)$. Аналогичное уравнение можно получить относительно плотности теплового потока q, если продифференцировать по времени первое уравнение из выражения (3) на промежутке $t + t'$.

Представленные выше уравнения определяют потерю тепловой энергии вследствие излучения фононной (фотонной) волны на одном из этапов гибридной фононной (фотонной) теплопередачи, когда кинетическая и потенциальная механическая энергия атомных единиц в кристаллической решётке вследствие обратного процесса поглощения энергии излучения меняется ещё достаточно мало. Решения полученных уравнений относительно $u(x, t)$ и $q(x, t)$ при $\partial u/\partial x$ = const и формулы затухания тепловой энергии вследствие излучения будут иметь следующий вид:

$$u(x,t)\Big|_{\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{const}} = u(x,0)\,e^{-\frac{1}{\tau_{fn}}\cdot t} + u(x,0)\,e^{-\frac{1}{\tau_f}\cdot t};$$

$$q(x,t)\Big|_{\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{const}} = q(x,0)\,e^{-\frac{1}{\tau_{fn}}\cdot t} + q(x,0)\,e^{-\frac{1}{\tau_f}\cdot t}, \tag{4}$$

где $-1/\tau_{fn}$ и $-1/\tau_f$ – коэффициенты затухания соответственно для фононной и фотонной компонент, и сумма двух частных решений при $\tau = \tau_{fn} + \tau_f$, $s^2 = s^2_{fn} + s^2_f$ также является решением, так как и в физической интерпретации квазичастица не может одновременно излучать (поглощать) и фонон, и фотон с одинаковой длиной волны. Таким образом, коэффициент τ в (3) приближённо (лишь для начального периода гибридной теплопередачи) определяет время релаксации, за которое интенсивность колебаний затухающих фононных и фотонных волн, участвующих в теплопередаче, уменьшается в *e* раз.

Если функции начальных условий $u(x, 0)$ и $q(x, 0)$ кусочно-непрерывны и интегрируемы в соответствующих температурных интервалах, то для этих интервалов существуют и средние величины для начальной температуры – $\overline{u}(x,0)$, и для начальной плотности теплового потока – $\overline{q}(x,0)$. Средняя плотность теплового потока определяется прежде всего скоростью теплоотвода. При кристаллизации и остывании металлических отливок – это скорости теплоотвода как в отливке, так и в литейной форме. Для отношения средних величин введём дополнительный коэффициент $\tau_0^2 = \dfrac{\overline{u}(x,0)}{\overline{q}(x,0)}$. Так как $\tau = s^2(\partial u/\partial t)/(\partial q/\partial t)$ на основании уравнений (3), то из (4) следует приближённое соотношение между коэффициентами τ и s^2 в (3):

$$\tau \cong s^2\tau_0^2 = s^2\frac{\overline{u}(x,0)}{\overline{q}(x,0)}. \tag{5}$$

Если в (3) использовать только первое уравнение для обобщённого закона Фурье и классическое уравнение баланса тепла в элементарном параллелепипеде, то, после несложных выкладок [2] выводится одномерное уравнение теплопроводности гиперболического типа:

$$\tau\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{6}$$

Двухмерное (трёхмерное) однородное гиперболическое уравнение для переноса тепла в пространстве, [2]-[3], тогда имеет вид:

$$c\rho\left(\tau\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial t}\right)=k\,\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\,u\right). \tag{7}$$

Уравнения (6), (7) используются обычно для высокотемпературных режимов, а также в среде разрежённых газов. При таких физических условиях в (6) и (7) часто пренебрегают первой производной по времени [2]. Более широкое определение обобщённого закона Фурье в виде двух уравнений (3) позволяет включить параметры фононной и фотонной компоненты теплопередачи в уравнение баланса тепловой энергии и обобщить гиперболическое уравнение теплопроводности на все температурные режимы.

Заменив в (6) коэффициент τ по формуле (5), получим одномерное гиперболическое уравнение теплопроводности при формулировке обобщённого закона Фурье в виде системы двух уравнений:

$$\tau_0^2\frac{s^2}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{8}$$

Для плоского (двухмерного) случая гиперболическое уравнение теплопроводности будет иметь вид:

$$\tau_0^2\frac{s^2}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{9}$$

Следует отметить, что определение температурного поля в горизонтальных и вертикальных сечениях отливки позволяет более точно корректировать решения трёхмерного гиперболического уравнения теплопроводности, так как даёт возможность определять точки разрыва для трёхмерного поля температур или его производных. В таких сечениях разрыва температурного поля возможно появление термоупругих напряжений, увеличение плотности дислокаций, изменение типа кристаллизации и среднего размера зерна, увеличение количества газовых микровключений и их кавитация (в жидкой фазе).

Простейшие краевые задачи для гиперболического уравнения теплопроводности и интерпретация решений

Существует достаточное количество экспериментальных методов определения коэффициента решёточной температуропроводности α при установившемся тепловом режиме, где непосредственно не используется закон Фурье в классической форме или уравнение теплопроводности на его основе (например, в [14]). Поэтому для определения и анализа решений уравнений (8-9) прежде следует определить коэффициент s^2. Его формульное выражение можно найти, оценив среднюю энергию элементарной кристаллической ячейки (жидкого кристалла в жидкой фазе) с помощью классических методов статистической физики.

Элементарная кристаллическая ячейка одновременно представляет собой некоторую физическую «точку» $M = \{x, y, z\}$ в среде твёрдого тела, и значение её локальной энергии $\varepsilon_{fn}(M, t)$ для фононных осцилляторов и объёмного фотонного теплового излучения $\varepsilon_f(M, t)$ позволяет далее определить фононную и фотонную компоненту коэффициента s^2 с учётом квантовых особенностей в обобщении закона Фурье в виде системы уравнений (2).

Но для первого приближения при определении коэффициентов в (8) и (9) основой могут служить также формулы (4) и соотношения:

$$\tau_0^2 s^2 \cong \tau; \qquad \tau = \tau_{fn} + \tau_f. \tag{10}$$

Здесь τ_{fn} и τ_f, как и ранее, определяют время затухания соответственно для акустической и электромагнитной тепловой волны, за которое интенсивность волны уменьшается в e раз. Суть такого приближения состоит в том, что в (4) определяется температурное поле лишь для одной из многих ступеней процесса теплопередачи, при этом частично не учитываются параметры кристаллического строения, энтропийные и энергетические факторы, а также квантово-механические особенности.

Тем не менее экспериментальное определение коэффициента решёточной температуропроводности a и средних коэффициентов затухания для теплового акустического и электромагнитного излучения позволяют считать коэффициенты уравнений (8-9) постоянными величинами в температурных диапазонах с определённым шагом дискретизации. При этом акустический коэффициент затухания можно определять по затуханию ультразвука достаточно высокой частоты для выделенного температурного диапазона и пересчитывать его для более высоких частот теплового гиперзвука. В таком случае основные краевые задачи для уравнений (8-9) будут иметь аналитические решения как для твёрдой, так и для жидкой фаз.

Для математического моделирования и мониторинга процессов кристаллизации и остывания отливок наиболее весомое практическое значение будет иметь кусочно-непрерывное сопряжение решений соответствующих краевых задач для уравнения (9). В этом случае в сечениях отливки следует рассматривать сопряжение как минимум трёх температурных полей: в литейной форме, в твёрдой и жидкой фазах отливки. В последнем случае сопряжение будет происходить по движущемуся фронту кристаллизации. А скорость теплоотвода в литейной форме будет зависеть не только от коэффициента теплопроводности материала формы, но и от коэффициентов отражения и поглощения как для теплового фононного излучения, так и для теплового электромагнитного излучения.

Вначале рассмотрим одномерный случай. Сформулируем общую первую краевую задачу для обобщённого (гиперболического) однородного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами (8):

$$\begin{aligned}
&\tau_0^2 \frac{s^2}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < l,\ t > 0;\\
&u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x),\ 0 < x < l;\\
&u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t > 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Линейной заменой переменных относительно функции $u(x, t)$ общая краевая задача (11) сводится, как известно, к краевой задаче при нулевых граничных условиях [15]. Далее, для упрощения физической и математической интерпретации решений, рассматриваем именно основную вспомогательную задачу с однородными граничными условиями:

$$\begin{aligned}&\tau_0^2 \frac{s^2}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < l,\ t > 0;\\ &u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x),\ 0 < x < l;\\ &u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t > 0.\end{aligned} \tag{12}$$

Начальные условия в (12) позволяют также вычислить значение коэффициента $\tau_0^2 = \dfrac{\overline{u}(x,0)}{\overline{q}(x,0)}$ для более точных решений, с использованием формульного выражения для s^2. Решение задачи (12) можно получить методом разделения переменных, представив функцию $u(x, t)$ в виде произведения двух функций: $u\,(x, t) = X\,(x) \cdot T\,(t)$. После подстановки в (12) и деления на $X\,(x) \cdot T\,(t)$ имеем численное отношение:

$$\frac{\tau_0^2 s^2}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} + \frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -p, \tag{13}$$

где p – некоторая вещественная постоянная, так как левая часть в (13) – функция от t, а правая – функция от x.

Собственные значения и собственные функции как для плоской двухмерной мембраны, так и в одномерном случае (13) для решений $X\,(x, y)$ и $X\,(x)$ известны [15]. В одномерном случае они имеют вид:

$$p \in \left\{ p_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \right\};\ X_n(x) = C_n \sin\frac{\pi n}{l} x, \tag{14}$$

где C_n – произвольная постоянная.

Поэтому для определения функций $T_n(t)$ следует найти решения для уравнений:

$$T_n''(t) + \frac{1}{\tau_0^2 s^2} T_n'(t) + \frac{a^2}{\tau_0^2 s^2} p_n T_n(t) = 0,\ \ t > 0. \tag{15}$$

Каждое из дифференциальных уравнений (15) определяет уравнение затухающих колебаний для произвольных колебательных систем с коэффициентом затухания $\beta = -\,(1/2\tau_0^2 s^2)$ и частотой колебаний $\omega' = \dfrac{2\pi}{T'} = \sqrt{\gamma_n^2 - \beta^2}$, где T' – период, $\gamma_n = \dfrac{a^2}{\tau_0^2 s^2} p_n$, β – коэффициент затухания [16]. Характеристическое уравнение для каждого из уравнений (15) и его корни будут определяться в формулах:

$$\begin{aligned}&\alpha^2 + \frac{1}{\tau_0^2 s^2}\alpha + \frac{a^2}{\tau_0^2 s^2} p_n = 0;\\ &\alpha_{1,2} = -\frac{1}{2\tau_0^2 s^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau_0^4 s^4} - \frac{a^2}{\tau_0^2 s^2}\cdot\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}.\end{aligned} \tag{16}$$

Формально, если собственное число $p_n = (\pi n/l)^2$ удовлетворяет неравенству

$$\sqrt{p_n} = \frac{\pi n}{l} > \frac{1}{2\tau_0 sa} \tag{17}$$

при всех n, то корни уравнения (16) всегда комплексные:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{1}{2\tau_0^2 s^2} \pm i \frac{a}{\tau_0 s} \sqrt{\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 - \frac{1}{4\tau_0^2 s^2 a^2}} = \beta \pm \omega_n i. \tag{18}$$

И общие решения дифференциальных уравнений (15) будут иметь вид:

$$T_n(t) = e^{-\frac{1}{2\tau_0^2 s^2}\cdot t} \left(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t\right). \tag{19}$$

Таким образом, волновое решение краевой однородной задачи (12) относительно одномерного температурного поля отличается от решения соответствующего классического гиперболического уравнения лишь наличием функции, определяющей затухание, и будет определяться сходящимся рядом:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\beta t} \left(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t\right) \sin\frac{\pi n}{l} x, \tag{20}$$

где числа A_n и B_n можно вычислить с помощью разложения в ряд Фурье функций начальных условий [15].

После определения коэффициентов A_n и B_n решение краевой однородной задачи для гиперболического уравнения теплопроводности можно представить в виде:

$$\begin{gathered} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{\beta t} \cos\left(\omega_n t + \delta_n\right) \sin\frac{\pi n}{l} x; \\ D_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}; \quad \omega_n \delta_n = -\mathrm{arctg}\frac{B_n}{A_n}. \end{gathered} \tag{21}$$

Каждая гармоника в (21) представляет собой затухающую стоячую температурную волну. Круговая частота волны ω_n, волновое число k_n, длина волны λ_n и фазовая скорость ν_n будут определяться следующими формулами:

$$\begin{gathered} k_n = \frac{\pi n}{l}; \ \lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2l}{n}; \ \omega_n = \frac{a}{\tau_0 s} \sqrt{\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 - \frac{1}{4\tau_0^2 s^2 a^2}}; \\ v_n = \frac{\omega_n}{k_n} = \frac{1}{\tau_0 s} \sqrt{a^2 - \frac{1}{\tau_0^2 s^2} \left(\frac{l}{2\pi n}\right)^2} \to \frac{a}{\tau_0 s} \ \text{при } n \to \infty. \end{gathered} \tag{22}$$

Соотношения (22) определяют также и дисперсию температурных волн: $\omega = f(k)$, $\partial\omega/\partial k \neq$const. Рассмотрим теперь решение краевой задачи (12) при произвольной длине стержня l, когда неравенство (17) выполняется, лишь начиная с некоторого $n > N_l = \frac{l}{2\pi\tau_0 sa}$. Пусть $n = N_k$ – первое такое целое число. При $n = N_k - 1$ характеристическое уравнение (16) имеет два действительных корня:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{1}{2\tau_0^2 s^2} \pm \frac{a}{\tau_0 s}\sqrt{\frac{1}{4\tau_0^2 s^2 a^2} - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2} = \beta \pm \omega'_n ,$$

и функция $T(t)$ будет определяться двумя рядами разного типа (при условии $\beta \pm \omega'_n < 0$):

$$T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) = e^{\beta\cdot t} \sum_{n=1}^{N_k-1} \left[C_n^{(1)} e^{\omega'_n\cdot t} + C_n^{(2)} e^{-\omega'_n\cdot t} \right] + e^{\beta\cdot t} \sum_{k=N_k}^{\infty} D_k \cos\left(\omega_k t + \delta_k\right) = \\ = e^{\beta\cdot t} V_1(t) + e^{\beta\cdot t} V_2(t) , \qquad (23)$$

где определяющая формула для ω'_n отличается от ω_n лишь знаком подкоренного выражения в формуле для фазовой частоты, (22). Все постоянные, включая $C_n^{(i)}$, как и в решении (21), вычисляются с помощью разложения в ряд Фурье функций начальных условий. Для удобства описания можно также ввести переменную для частоты $\omega_n^{(0)}$, используя в соответствующей формуле (22) абсолютную величину в подкоренном выражении:

$$\omega_n^{(0)} = \frac{a}{\tau_0 s}\sqrt{\left|\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 - \frac{1}{4\tau_0^2 s^2 a^2}\right|} = \omega_n \text{ при } n \geq N_k; \quad \omega_n^{(0)} = \omega'_n \text{ при } n \leq N_k - 1. \qquad (24)$$

При этом следует помнить, что температурных волн с частотами ω_n, $n \leq N_k - 1$ решение

$$u_1(x,t) = T_1(t)\cdot X(x) = e^{\beta\cdot t} \sum_{n=1}^{N_k-1} [C_n^{(1)} e^{\omega'_n\cdot t} + C_n^{(2)} e^{-\omega'_n\cdot t}]\cdot \sin\frac{\pi n}{l} x = e^{\beta\cdot t} V_1(t)\cdot X(x) \qquad (25)$$

формально не описывает, но на сечениях отражения волн (включая концы стержня), которые определяются второй частью решения (23),

$$u_2(x,t) = T_2(t)\cdot X(x) = e^{\beta\cdot t} \sum_{n=1}^{N_k-1} \cos\left(\omega_n t + \delta_n\right)\cdot \sin\frac{\pi n}{l} x = e^{\beta\cdot t} V_2(t)\cdot X(x) , \qquad (26)$$

вследствие сложения волн разных частот, могут существовать колебания с низкими частотами. В сущности, температурное поле, определяемое уравнениями колебаний (23), представляет собой сумму параболического (25) и гиперболического (26) решений.

Используем теперь другое функциональное представление для функции $V_1(t)$. Так как аналитическое выражение для $V_1(t)$ удовлетворяет условиям разложения в ряд Фурье, то её можно разложить в этот ряд на произвольном отрезке времени [0; 2 F]. Гармоники ряда будут определяться частотами $\omega_m^{(1)} = \frac{m\pi}{F}$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ Выберем

некоторое произвольное число $n \leq N_k$ и положим $F = F_n = \frac{n\pi}{\omega_n^{(0)}} = \frac{n\pi}{\omega_n}$, где $\omega_n^{(0)}$ определяется в (24). Тогда $\omega_m^{(1)} = m\pi / (n\pi/\omega_n) = (m/n)\omega_n$.

Выберем также целое число $l \leq N_k - 1$ и рассмотрим сумму трёх колебаний $\omega_{m_1}^{(1)}$, $\omega_{m_2}^{(1)}$ и $\omega_{m_3}^{(1)}$: $m_1 = nl - n$, $m_2 = n$, $m_3 = nl + n$. Можно показать, что сумма двух боковых часто ω_{m_1} и ω_{m_3} определяет в этом случае низкочастотную амплитудную модуляцию колебаний с частотой $\omega_l^{(0)} = \omega'_l$ на несущей частоте $\omega_n^{(0)} = \omega_n$.

Если модулирующая частота $\omega_l^{(1)}$ кратна несущей частоте $\omega_n^{(1)}$, то возникает явление параметрического резонанса [17], которое приводит к появлению температурной волны с частотой $\omega_l^{(1)}$. Существование как высокочастотных, так и низкочастотных температурных волн и низкочастотного параметрического резонанса может иметь достаточно широкие практические приложения.

Влияние параметрического резонанса температурных волн на кристаллизацию отливок при внешней вибрации

В качестве примера влияния низкочастотных температурных волн на процесс кристаллизации в металлах и сплавах рассмотрим влияние на этот процесс принудительной вибрации при остывании отливки. Такое влияние обычно объясняется увеличением числа зародышей кристаллизации, а также появлением при вибрации: кавитации в жидкой фазе газовых микровключений, конвективных потоков и усиленного теплоотвода [18-20]. Рассмотрим данные [19] одного из многих экспериментов по изучению влияния вибрации на кристаллизацию металлов и сплавов. Здесь исследования выполнялись, в частности, на серых доэвтектических чугунах. Отливки – цилиндрической формы, диаметром 30 и 20 мм, высотой 300 мм, при литье в песчаные и металлические формы. Импульс колебаний передавался в осевом вертикальном направлении с частотами 10, 20, 25, 50 и 100 Гц, и амплитудой от 0,1 до 1,2 мм.

Большая амплитуда колебаний вибрации может вызывать значительные разрушения фронта кристаллизации и рост диаметра газовых включений, то есть уменьшает интенсивность кавитации, поэтому влияние величины амплитуды следует рассматривать отдельно от частоты вибрации. Но экспериментально показано, что в зависимости от материала отливки и её размеров, можно найти оптимальную частоту вибрации, при которой наблюдаются максимальные темп кристаллизации и скорость теплоотвода. В отливках, которые подвергались вибрации, процесс перехода сплава из жидкого состояния в твёрдое происходил на 12-25 % быстрее, чем при затвердевании отливок, не подвергнутых вибрации [19].

Рассмотрим этот процесс с точки зрения концепции температурных волн. Давление и вибрация одинаково передаются по разным направлениям в жидкой фазе, а в твёрдой фазе вибрации в осевом направлении вызывают вибрации и в поперечном направлении пропорционально значению коэффициента Пуассона. Обозначим среднюю частоту теплового гиперзвука, связанного с размерами зародышей в конкретном материале, как f_z, частоту температурных колебаний образца в поперечном направлении, связанного с размерами поперечного сечения образца, через f_m, а частоту внешних вибраций – f_v.

Предположим, что найдётся длина волны длинноволнового параметрического резонанса с частотой температурных волн зародышей кристаллизации f_z, при этом длина волны длинноволнового резонанса будет близкая к диаметру мембраны в поперечном сечении отливки, то есть к её собственной частоте – f_m. Условия параметрического резонанса предполагают следующее соотношение для частот [17]:

$$f_z = \frac{2f_m}{n}, n = 1, 2, 3,... \tag{27}$$

Если, в свою очередь, при некоторой частоте внешних вибраций наступает параметрический резонанс также на частотах f_v и f_m, то при этом увеличивается не только амплитуда упругой волны, но и амплитуда соответствующей термоупругой (температурной) волны частоты f_m, что увеличивает скорость теплоотвода в литейную форму. При этом выполняется соотношение:

$$f_m = \frac{2f_v}{k}, k = 1, 2, 3,... \tag{28}$$

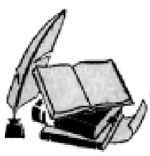
Так как одновременно происходит процесс «двойного» параметрического резонанса: и на собственной частоте температурной волны круглой мембраны в сечении отливки, и на частоте температурных волн зародышей кристаллизации в жидкой фазе, то увеличивается и амплитуда температурных волн частоты f_z. Это, в свою очередь, приводит к увеличению температуры переохлаждения на минимумах, соответствующей стоячей температурной волны, и росту количества зародышей кристаллизации. Перемножая соответствующие части равенств (27) и (28), получим: $f_m^2 = (n/k) f_z \cdot f_v$ Если при незначительном изменении размеров сечения отливки оптимальное отношение целых чисел n/k, определяющих двойной параметрический резонанс, остается прежним, либо n и k меняются пропорционально, то наиболее эффективную частоту вибраций при изменении диаметра отливки D_m можно тогда найти по формуле:

$$f_{v_2} = \left(\frac{f_{m_2}}{f_{m_1}}\right)^2 \cdot f_{v_1} = \left(\frac{D_{m_1}}{D_{m_2}}\right)^2 \cdot f_{v_1}. \qquad (29)$$

В рассматриваемой серии экспериментов [19] при заливке чугуном образца диаметром 30 мм максимальный темп кристаллизации и теплоотвода был получен при частоте $f_{v1} = 25$ Гц, а при заливке образца диаметром 20 мм максимальные значения скорости теплоотвода и скорости кристаллизации соответствовали частоте $f_{v2} = 50$ Гц .Теоретический расчёт частоты вибрации параметрического резонанса по формуле (29) для второго образца даёт:

$$f_{v_2} = (D_{m_1} / D_{m_2})^2 \cdot f_{v_1} = (30\text{мм} / 20\text{мм})^2 \cdot 25\text{Гц} = 56{,}25\text{Гц}.$$

При этом следует учесть, что заливка первого образца производилась в песчаную форму, второго – в металлическую, а испытания на влияние вибрации производились только при частотах 10, 20, 25, 50 и 100 Гц.



Список литературы

1. *Эльдарханов А. С.* Процессы формирования отливок и их моделирование / А. С. Эльдарханов, В. А. Ефимов, А. С. Нурадинов. – М.: Машиностроение, 2001. – 208 с.
2. *Лыков А. В*. Теория теплопроводности /А. В. Лыков. – М.: Высшая школа, 1957. – 599 с.
3. *Самарский А. А.* Вычислительная теплопередача /А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М.: Эдиториал УРСС», 2003. – 784 с.
4. *Шамровский А. Д.* Термоупругие волны и скорость их распространения в динамической задаче взаимосвязанной термоупругости / А. Д. Шамровский, Г. В. Меркотан // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2011. – Т. 5 – № 7 (53). – С. 36-41.
5. *Бабенков М. Б*. Распространение термоупругих волн в среде с учётом релаксации теплового потока / М. Б. Бабенков. – Санкт-Петербург: изд-во 2013. – 22 с.
6. *Семёнов Д. А*. Распространение связанных термоупругих волн в цилиндрических волноводах / Д. А. Семенов. – Самара: изд-во 2009. – 211 с.
7. *Супельняк М. И.* Исследование температурных волн в цилиндре с учетом инерции теплового потока / М. И. Супельняк, А. К. Карышев. – «Вестник МГТУ им. Баумана», сер. «Естественные науки». – 2013. – № 2. – С. 106-119.
8. *Ельяшевич М. А.* Вклад Максвелла в развитие молекулярной физики и статистических методов / М. А. *Ельяшевич,* Т. С. Протько //Успехи физических наук. – 1981. – Т. 135, Вып. 3. – С. 381-423.
9. *Carlo Cattaneo* Sulla conduzione de calore. – Atti del Semine, Mat. Fis. Univ. Modena, 1948.
10. *Шабловский О. Н*. Тепловая градиентная катастрофа и рост двухмерного свободного дендрита в переохлажденном расплаве / О. Н. Шабловский. – М: Прикладная физика, 2007. – № 3. – С. 29-36.

11. *Ландау Л. Д*. Статистическая физика / Л. Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1976, Ч. 1. – 583 с.
12. *Савельев И. В.* Курс общей физики / И. В. Савельев. – М.: Наука, 1971. – Т. 3 – 527 с.
13. *Тыднюк В. З.* Квантовые особенности теплообмена и кристаллизации в отливках. Сообщение 1 / В. З. Тыднюк, О. И. Шинский, В. П. Кравченко, В. С. Дорошенко, И. О. Шинский // Процессы литья. – 2001. – № 2. – С. 60-70.
14. *Фокин В. М.* Неразрушающий контроль теплофизических характеристик строительных материалов / В. М. Фокин, В. Н. Чернышев. – М.: Машиностроение-1, 2004. – 212 с.
15. *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
16. *Рахштадт Ю. А*. Физика. Колебания и волны / Рахштадт Ю. А. – М.: Дом МИСиС. – 2009. – 180 с.
17. Валишев М. Г. Физика. Часть 4. Колебания и волны / М. Г. Валишев, А. А. Повзнер. – Екатеринбург, ГОУ ВПО «Уральский гос. технический университет». – 2006. – 90 с.
18. О механизме воздействия вибрации на кристаллизацию и структурообразование сплавов / В. Л. Найдек, А. С. Эльдарханов, А. С. Нурадинов, Е. Д. Таранов // Литейное производство. – 2003. – № 9. – С. 13-15.
19. *Куценко А. И.* Исследования тепловых процессов охлаждения отливки в форме при раз личных режимах вибрации / А. И. Куценко, И. Ф. Селянин, Р. М. Хамитов, С. В. Морин. – Ползуновский альманах. – 2004. – № 4. – С. 37-39.
20. Чернов А. А. Процессы кристаллизации и кавитации расплавов при сверхбыстрой закалке из жидкого состояния / А. А. Чернов, А. А. Пильник – Сб. науч. статей. Современная наука. – 2011. – № 2(7). – С. 10-16.

Поступила 06.04.2015

ВНИМАНИЕ!

Предлагаем разместить в нашем журнале рекламу Вашей продукции или рекламный материал о Вашем предприятии. Редакция также может подготовить заказной номер журнала.

Стоимость заказного номера - 4000 грн.

Расценки на размещение рекламы
(цены приведены в гривнях)

Размещение	**Рекламная площадь**	**Стоимость, грн.**
Рекламные блоки в текстовой части журнала		
Цветные	1/2 страницы 1/3 страницы 1/4 страницы	900 600 300
Черно-белые	1/2 страницы 1/3 страницы 1/4 страницы	550 380 200
Цветная реклама на обложке		
Третья страница обложки	1 страница 1/2 страницы 1/4 страницы	2800 1400 700
Четвертая страница обложки	1 страница 1/2 страницы 1/3 страницы	3100 1550 1000

При повторном размещении рекламы - скидка 15 %

Наш адрес: **Украина, 03680, г. Киев- ГСП. Вернадского, 34/1**
Физико-технологический институт металлов и сплавов НАН Украины
телефоны: (044) 424-04-10, 424-34-50
факс: (044) 424-35-15; E-mall: proclit@ptima.kiev.ua