УДК 517.521.8

Н. А. Давыдов

Одно свойство и одна теорема тауберова типа для консервативных матриц

1. Пусть дана бесконечная матрица $A = \| a_{nk} \|$, n, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Говорят [1, с. 61], что матрица A суммирует к числу S последовательность комплексных чисел $\{S_n\}$, если ряды $t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k$ сходятся для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ и существует конечный предел $\lim_{n \to \infty} t_n = S$. Матрица $A = \| a_{nk} \|$ называется консервативной (регулярной) или K (T)-матрицей, если она суммирует каждую сходящуюся последовательность (к ее пределу). Как известно [1, с. 62, 63], для того чтобы матрица $A = \| a_{nk} \|$ была консервативной, необходимо и достаточно выполнение следующих трех условий:

а) $\sum_{k=0}^{\infty} | a_{nk} | \leqslant H < \infty$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, где H не зависит от n;

б) $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \to a$, $n \to \infty$;

в) $\lim_{n \to \infty} a_{nk} = \alpha_k$ для каждого фиксированного $k = 0, 1, \ldots$.

Для регулярности матрицы $A = \| a_{nk} \|$ необходимо и достаточно выполнения условий а)—в) при $a = 1$ и $\alpha_k = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

2. Докажем следующее свойство K-матриц.

Т е о р е м а 1. *Если K-матрица (в частности, T-матрица) суммирует какую-нибудь расходящуюся ограниченную последовательность, то она суммирует некоторую ограниченную последовательность, множество частичных пределов которой содержит некоторый отрезок прямой (и, значит, имеет мощность континуума).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть K-матрица $A = \| a_{nk} \|$ суммирует некоторую расходящуюся ограниченную последовательность $\{S_n\} : \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k = S$. Рассмотрим матрицу $B = \| b_{nk} \|$, где $b_{nk} = a_{nk} - \alpha_k$, $n, k = 0, 1, 2, \ldots$. Известно [1, с. 63], что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ сходится абсолютно. Так как $\{S_k\}$ — ограниченная последовательность, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} S_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k S_k \to S - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k S_k, \quad n \to \infty, \tag{1}$$

т. е. матрица B суммирует последовательность $\{S_n\}$ к числу $S^* = S - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k S_k$. Для любого фиксированного $k = 0, 1, 2, \ldots$ имеем

$$\lim_{n \to \infty} b_{nk} = 0. \tag{2}$$

Кроме того,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} = a - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \equiv b; \tag{3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} | b_{nk} | \leqslant H + \sum_{k=0}^{\infty} | \alpha_k | = H_1 < \infty, \tag{4}$$

где H_1 не зависит от n.

Таким образом, матрица B является K-матрицей, для которой справедливы соотношения (1)—(4). Если $b \neq 0$, то матрица B суммирует к нулю последовательность $\{S_n - \frac{1}{b} S^*\}_0^{\infty}$. Если $b = 0$, то, как известно [2], матрица B суммирует к нулю некоторую расходящуюся ограниченную последовательность. Итак, во всех случаях матрица B суммирует к нулю некоторую расходящуюся ограниченную последовательность $\{x_n\}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}x_k = 0. \tag{5}$$

Если множество частичных пределов последовательности $\{x_n\}$ содержит некоторый отрезок прямой, то доказывать нечего. Предположим, что множество всех частичных пределов последовательности $\{x_m\}$ не содержит никакого отрезка прямой. Возьмем подпоследовательность $\{x_{m_\nu}\}_1^\infty$, сходящуюся к числу $\alpha \neq 0$,

$$\lim_{\nu\to\infty} x_{m_\nu} = \alpha \neq 0. \tag{6}$$

Зададимся монотонно убывающей стремящейся к нулю последовательностью положительных чисел ε_n, $n = 1, 2, \ldots$,

$$0 < \varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n \to 0, \ n \to \infty. \tag{7}$$

Используя свойства (2) и (4), индуктивно построим две возрастающие последовательности натуральных чисел $\{n_i\}_1^\infty$ и $\{k_i\}_1^\infty$ такие, что

$$\sum_{k=0}^{k_i} |b_{nk}| < \varepsilon_i \ \text{для всех} \ n \geqslant n_{i+1}; \tag{8}$$

$$\sum_{k=k_{i+1}}^{\infty} |b_{nk}| < \varepsilon_{i+1} \ \text{для всех} \ n, \ 0 \leqslant n \leqslant n_{i+1}, \tag{9}$$

полуотрезок $[k_i, \ k_{i+1})$ содержит по крайней мере одно из чисел m_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$,

$$m_{\nu_i} \in [k_i, k_{i+1}), \ i = 1, 2, \ldots . \tag{10}$$

Возьмем последовательность $\{y_n\}_2^\infty$ действительных чисел, всюду плотную на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющую условию

$$y_{n+1} - y_n \equiv \beta_n \to 0, \ n \to \infty. \tag{11}$$

Убедимся в том, что последовательность

$$z_k = \begin{cases} x_k y_i & \text{для } k_{i-1} \leqslant k < k_i, \ i = 2, 3, \ldots, \\ x_k & \text{для } k = 0, 1, 2, \ldots, k_1 - 1 \end{cases} \tag{12}$$

суммируется к нулю матрицей $B = \| b_{nk} \|$.

Действительно, возьмем $n_i \leqslant n < n_{i+1}$ и рассмотрим

$$t_n^1 = \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}z_k = \sum_{k=0}^{k_{i-1}-1} b_{nk}z_k + \sum_{k=k_{i-1}}^{k_i-1} b_{nk}z_k + \sum_{k=k_i}^{k_{i+1}-1} b_{nk}z_k + $$

$$+ \sum_{k=k_{i+1}}^{\infty} b_{nk}z_k = \sum_{\nu=1}^{4} \sigma_\nu^{(i)}. \tag{13}$$

Из (8) и (9) и ограниченности последовательности $\{z_k\}$ следует, что

$$\sigma_1^{(i)} = \sum_{k=0}^{k_{i-1}-1} b_{nk}z_k \to 0, \ i \to \infty; \tag{14}$$

$$\sigma_4^{(i)} = \sum_{k=k_{i+1}}^{\infty} b_{nk}z_k \to 0, \ i \to \infty. \tag{15}$$

Далее, используя (12), получаем

$$\sigma_2^{(i)} + \sigma_3^{(i)} = \sum_{k=k_{i-1}}^{k_i-1} b_{nk}z_k + \sum_{k=k_i}^{k_{i+1}-1} b_{nk}z_k = y_i \sum_{k=k_{i-1}}^{k_i-1} b_{nk}x_k + y_{i+1} \sum_{k=k_i}^{k_{i+1}-1} b_{nk}x_k =$$

$$= y_i \sum_{k=k_{i-1}}^{k_{i+1}-1} b_{nk}x_k + \beta_i \sum_{k=k_i}^{k_{i+1}-1} b_{nk}x_k = y_i \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}x_k - \sum_{k=0}^{k_{i-1}-1} b_{nk}x_k - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=k_{i+1}}^{\infty} b_{nk}x_k \right) + \beta_i \sum_{k=k_i}^{k_{i+1}-1} b_{nk}x_k.$$

В силу (5), (8), (9), (11) и ограниченности последовательностей $\{x_k\}$ и $\{y_i\}$ имеем $\sigma_2^{(i)} + \sigma_3^{(i)} \to 0$, $i \to \infty$. Отсюда и из (14) и (15) получаем

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}z_k = 0,$$

т. е. последовательность $\{z_k\}$ суммируется к нулю матрицей $B = \| b_{nk} \|$. Из (6), (10) — (12) находим

$$z_{m_{\nu_{i-1}}} = x_{m_{\nu_{i-1}}} \cdot y_i = (\alpha + o(1))\, y_i = \alpha y_i + o(1), \quad i = 2, 3, \dots .$$

Следовательно, множество всех частичных пределов подпоследовательности $\{z_{m_{\nu_{i-1}}}\}$ заполняет отрезок, соединяющий начало с точкой $\alpha \neq 0$. Каждая точка этого отрезка будет и частичным пределом ограниченной последовательности $\{z_k\}$. Таким образом, матрица $B = \| b_{nk} \|$ суммирует ограниченную расходящуюся последовательность $\{z_k\}$, у которой множество всех частичных пределов содержит некоторый отрезок прямой.

Так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}z_k = \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}z_k + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z_k \to \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z_k, \quad n \to \infty,$$

то этим свойством обладает K-матрица $A = \| a_{nk} \|$. Теорема доказана.

Частным случаем доказанной теоремы является теорема из [3] о том, что если регулярная матрица $A = \| a_{nk} \|$ суммирует какую-нибудь расходящуюся ограниченную последовательность с конечным числом частичных пределов, то она суммирует ограниченную последовательность с бесконечным множеством частичных пределов. Заметим [4], что регулярная (значит, консервативная) матрица, суммирующая расходящуюся ограниченную последовательность с конечным числом частичных пределов, может не суммировать ограниченную последовательность со счетным множеством частичных пределов.

3. Здесь докажем одну общую теорему тауберова типа для ограниченных последовательностей, суммируемых положительными K-матрицами.

Пусть $A = \| a_{nk} \|$ — консервативная положительная матрица, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = a > 0. \tag{16}$$

Определение. *Комплексное число z_0 назовем (A)-точкой ограниченной последовательности $\{S_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{\nu_i\}$ такая, что $|S_{\nu_i} - z_0| \leqslant \varepsilon$, $i = 1, 2, \dots$, причем*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{n\nu_i} > a/2. \tag{17}$$

Т е о р е м а 2. *Если ограниченная последовательность* $\{S_n\}$ *суммируется положительной К-матрицей* $A = \| a_{nk} \|$ *и если каждый частичный предел этой последовательности является ее* (A)*-точкой, то последовательность* $\{S_n\}$ *сходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнены условия теоремы и последовательность $\{S_n\}$ расходится. Можем считать последовательность $\{S_n\}$ действительной, удовлетворяющей условию

$$0 = \underline{S} \leqslant S_k \leqslant \overline{S},\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ \underline{S} = \varliminf_{n\to\infty} S_k < \varlimsup_{k\to\infty} S_k.$$

Так как каждый ее частичный предел является ее (A)-точкой, то (A)-точками будут ее нижний $\underline{S}$ и верхний $\overline{S}$ пределы, т. е. для $\varepsilon > 0$ найдутся возрастающие последовательности $\{\nu_i'\}$, $\{\nu_i''\}$ натуральных чисел такие, что $S_{\nu_i'} - \underline{S} \leqslant \varepsilon$, $\overline{S} - \underline{S}_{\nu_i''} \leqslant \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots$, причем

$$\alpha' \equiv \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{n\nu_i'} - \frac{a}{2} > 0,\ \alpha'' \equiv \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{n\nu_i''} - \frac{a}{2} > 0.$$

Тогда, беря $a_1 = \underline{S} + \varepsilon$, $b_1 = \overline{S} - \varepsilon$ и обозначая $\alpha = \min\{\alpha', \alpha''\}$, оценим правую часть выражения (6) из работы [5]. Имеем

$$(\overline{S} - a_1) \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{n\nu_i'} + (b_1 - \underline{S}) \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{n\nu_i''} \geqslant (\overline{S} - \underline{S} - \varepsilon) \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{n\nu_i'} +$$

$$+ (\overline{S} - \underline{S} - \varepsilon) \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{n\nu_i''} \geqslant (\overline{S} - \underline{S} - \varepsilon)\left(\frac{a}{2} + \alpha\right) + (\overline{S} - \underline{S} - \varepsilon)\left(\frac{a}{2} + \alpha\right) =$$

$$= (\overline{S} - \underline{S})\, a + 2\alpha (\overline{S} - \underline{S}) - 2\varepsilon\left(\frac{a}{2} + \alpha\right) > (\overline{S} - \underline{S})\, a$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$. По лемме 1 работы [5] последовательность $\{S_n\}$ не суммируется матрицей A. Полученное противоречие доказывает теорему.

С л е д с т в и е [6]. *Если для любой возрастающей последовательности натуральных чисел* $\{p_i\}$ *справедливо неравенство*

$$\varlimsup_{i\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{np_i} > a/2,$$

где $a = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}$, $A = \| a_{nk} \|$ — *положительная К-матрица, то из суммируемости этой матрицей ограниченной последовательности* $\{S_n\}$ *следует ее сходимость.*

З а м е ч а н и е 1. Условие (17) в определении (A)-точки последовательности $\{S_n\}$ ослабить нельзя, если мы желаем сохранить справедливость теоремы 2. В самом деле, регулярная матрица $A = \| a_{nk}^{(1)} \|$, где $a_{nn}^{(1)} = 1/2$, $n \geqslant 0$, $a_{nn-1}^{(1)} = 1/2$, $n \geqslant 1$, $a_{nk}^{(1)} = 0$ для всех других n и k, суммирует расходящуюся последовательность $\{(-1)^{n+1}\}$, однако для нее $\underline{S} = -1 = S_{2i}$, $\overline{S} = 1 = S_{2i+1}$, $\nu_i' = 2i$, $\nu_i'' = 2i + 1$ и $\sum_{i=1}^{\infty} a_{n\nu_i'} = 1/2$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_{n\nu_i''} = 1/2$.

З а м е ч а н и е 2. Теорему 2 можно перенести на положительные консервативные полунепрерывные матрицы.

1. *Харди Г.* Расходящиеся ряды.— М. : Изд-во иностр. лит., 1951.— 504 с.
2. *Zeller K.* Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. — Math. Z., 1951, **53**, S. 463—487.
3. *Власенко В. Ф.* Суммирование ограниченных расходящихся последовательностей с конечными и бесконечными множествами частичных пределов.— Мат. заметки, 1979, **26**, вып. 4, с. 575—581.
4. *Власенко В. Ф., Давыдов Н. А.* Аналог теоремы В. М. Даревского для ограниченных последовательностей.— Укр. мат. журн., 1982, **34**, № 3, с. 348—350.
5. *Давыдов Н. А.* Консервативные положительные матричные методы суммирования, неэффективные на некоторых множествах последовательностей.— Там же, 1978, **30**, № 6, с. 723—730.
6. *Соколенко А. И.* О линейных методах суммирования, равносильных сходимости : Автореф. дис. ... канд. физ-мат. наук.— Киев, 1975.— 16 с.

Киевский
педагогический институт

Поступила в редакцию 14.05.81
после переработки — 15.04.82