УДК 517.9

*Д. Я. Хусаинов, Е. А. Юнькова*

# Оценка величины запаздывания в линейных дифференциальных системах с отклоняющимся аргументом

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau), \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $t \geqslant t_0$, $\tau > 0$, $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^n$ — постоянные матрицы. Система вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + Q(x(t), x(t-\tau)), \tag{2}$$

где функция $Q(x(t), x(t-\tau))$ такова, что (2) допускает решение, называется системой, возмущенной по отношению к (1). Если запаздывание отсутствует, т. е. $\tau = 0$, то система (1) имеет вид

$$\dot{x}(t) = (A + B)x(t). \tag{3}$$

Исследование устойчивости решения $x(t) \equiv 0$ системы (1) будем проводить методом функций Ляпунова.

Решение $x(t) \equiv 0$ системы (1) называется асимптотически устойчивым, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого другого решения $x(t)$ системы (1) из неравенства $\| x(t) \| < \delta(\varepsilon)$ при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$ следует $\| x(t) \| < \varepsilon$ при $t > t_0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \| x(t) \| = 0$.

Решение $x(t) \equiv 0$ системы (1) называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют $\delta(\varepsilon) > 0$ и $\eta(\varepsilon) > 0$ такие, что для любого решения $x_Q(t)$ возмущенной системы (2) из неравенств $\| x_Q(t) \| < \delta(\varepsilon)$ при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$ и $\| Q \| < \eta(\varepsilon)$ следует $\| x_Q(t) \| < \varepsilon$ при $t > t_0$.

Если запаздывание $\tau$ достаточно мало, то из асимптотической устойчивости решения $x_0(t) \equiv 0$ системы без запаздывания (3) следует асимптотическая устойчивость и устойчивость при постоянно действующих возмущениях решения $x(t) \equiv 0$ системы с запаздыванием (1) [1, 2].

В настоящей работе вычисляется оценка запаздывания $\tau$, при которой справедливо приведенное выше утверждение. Если решение $x_0(t) \equiv 0$ системы (3) асимптотически устойчиво, то для любой симметричной положительно определенной матрицы $C$ существует единственная положительно определенная матрица $H$, являющаяся решением уравнения Ляпунова

$$(A^T + B^T)H + H(A + B) = -C. \tag{4}$$

Функция Ляпунова для системы (3) ищется в виде квадратичной формы $v(x) = (x^T, Hx)$. Величины запаздывания $\tau_0$, начального возмущения $\delta(\varepsilon)$ и возможного возмущения $\eta(\varepsilon)$ системы (2) вычисляются с использованием значений $\lambda_{\min}(H)$, $\lambda_{\min}(C)$, $\lambda_{\max}(H)$, являющихся наименьшими и наибольшими собственными числами матриц $H$ и $C$.

Теорема 1. *Если решение $x_0(t) \equiv 0$ системы (3) асимптотически устойчиво, то при $\tau < \tau_0$, где $\tau_0 = \lambda_{\min}(C)\,[2(\| A \| + \| B \|)\,\| HB \|]^{-1} \times (\lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H))^{1/2}$, решение $x(t) \equiv 0$ системы (1) также асимптотически устойчиво.*

Предварительно введем ряд определений. Поверхность уровня $v(x) = \alpha$ будем обозначать $\partial v^\alpha$, а область, ограниченную поверхностью уровня, через $v^\alpha$, т. е. $\partial v^\alpha = \{x : v(x) = \alpha\}$, $v^\alpha = \{x : v(x) \leqslant \alpha\}$.

Лемма 1. *Пусть для $t \geqslant t_0 + \tau$ существует $\alpha > 0$ такое, что $x(t) \in \partial v^\alpha$, а при $t - 2\tau \leqslant s \leqslant t$ $x(s) \in v^\alpha$. Тогда для произвольного $\gamma > 0$ существует $\tau_0 > 0$ такое, что при $\tau \leqslant \tau_0$ будет $\| x(t) - x(t-\tau) \| < \gamma \| x(t) \|$.*

Доказательство. Пусть существует $\alpha > 0$ такое, что $x(t) \in \partial v^\alpha = \{x : v(x) = \alpha\}$, а при $t - 2\tau \leqslant s \leqslant t$ $x(s)$ лежит внутри области, ограниченной $\partial v^\alpha$, т. е. $x(s) \in v^\alpha = \{x : v(x) \leqslant \alpha\}$ Тогда, как следует из оценок функции Ляпунова для линейных систем [3], $\sup\limits_{t-2\tau \leqslant s \leqslant t} \{\| x(s) \|\} \leqslant (\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H))^{1/2} \| x(t) \|$, где $x(t) \in \partial v^\alpha$, $\lambda_{\max}(H)$, $\lambda_{\min}(H)$ — соответственно наибольшее и наименьшее собственные числа симметричной положительно определенной матрицы $H$

Из интегрального представления решения уравнения (1) получим

$$\| x(t) - x(t-\tau) \| = \| \int [Ax(s) + Bx(s-\tau)]\, ds \| \leqslant \tau(\| A \| +$$

$+ \| B \|) \sup\limits_{t-2\tau \leqslant s \leqslant t} \{ \| x(s) \| \} \leqslant \tau (\| A \| + \| B \|) (\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H))^{1/2} \| x(t) \|,$

и при $\tau \leqslant \tau_0$, где $\tau_0 = \gamma (\| A \| + \| B \|)^{-1} (\lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H))^{1/2}$, будет $\| x(t) - x(t-\tau) \| \leqslant \gamma \| x(t) \|$.

Доказательство теоремы. Для произвольных $\alpha > 0$ и $\tau > 0$ найдем $\delta(\alpha, \tau)$ такое, что из $\| x(t) \| < \delta(\alpha, \tau)$ при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$ будет $x(t) \in v^\alpha$ при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0 + \tau$. Из равенства

$$x(t) = x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} [Ax(s) + Bx(s-\tau)]\, ds$$

следует, что при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau$

$$\| x(t) \| \leqslant \delta + \int\limits_{t_0}^{t} [\| A \| \| x(s) \| + \| B \| \delta]\, ds.$$

Используя неравенство Беллмана, получаем $\| x(t) \| \leqslant \delta (1 + \| B \| \tau) \times \exp(\| A \| \tau)$. Если справедливо неравенство $\delta (1 + \| B \| \tau) \exp(\| A \| \tau) \leqslant (\alpha/\lambda_{\max}(H))^{1/2}$, то при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0 + \tau$ $x(t) \in v^\alpha$. Таким образом, $\delta$ выбираем из соотношения $\delta(\alpha, \tau) = \exp(-\| A \| \tau)(1 + \| B \| \tau)^{-1} (\alpha/\lambda_{\max} \times (H))^{1/2}$.

Рассмотрим полную производную функции Ляпунова $v(x) = (x^T, Hx)$, используя (1),

$$\dot{v}[x(t)] = -(x^T(t), Cx(t)) + ([x(t-\tau) - x(t)]^T B^T, Hx(t)) + \\ + (x^T(t), HB[x(t-\tau) - x(t)]).$$

Пусть $x(t) \in \partial v^\alpha$ и $x(s) \in v^\alpha$ при $t - 2\tau \leqslant s \leqslant t$. Тогда, учитывая леммы 1, 2, для полной производной $v(x)$ в силу (1) можно записать $\dot{v}[x(t)] \leqslant (-\lambda_{\min}(C) + 2\gamma \| HB \|) \| x(t) \|^2$. И при $\gamma < \lambda_{\min}(C)/(2 \| HB \|)$, где $\lambda_{\min}(C)$ — наименьшее собственное число матрицы $C$, $\dot{v}[x(t)] < 0$. Это означает, что вектор движения $x(t)$ системы (1) направлен внутрь $\partial v^\alpha$ и решение не покинет область $v^\alpha$. Причем неравенство $\dot{v}[x(s)] < 0$ будет сохраняться и при $s > t$, т. е. решение $x(t) \equiv 0$ асимптотически устойчиво.

Таким образом, для произвольного $\varepsilon > 0$ выбираем $\tau_0 = \lambda_{\min}(C) \times [2(\| A \| + \| B \|) \| HB \|]^{-1} (\lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H))^{1/2}$, $\delta(\varepsilon) = \exp(-\| A \| \tau_0) \times (1 + \| B \| \tau_0)^{-1} (\lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H))^{1/2} \varepsilon$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если решение $x_0(t) \equiv 0$ системы (3) асимптотически устойчиво, то при $\tau < \tau_0$, где $\tau_0 = \lambda_{\min}(C) [2(\| A \| + \| B \|) \| HB \|]^{-1} \times (\lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H))^{1/2}$, решение $x(t) \equiv 0$ системы (1) устойчиво при постоянно действующих возмущениях.*

*При этом произвольное решение $x_Q(t)$ системы (2) не выйдет из $\varepsilon$-окрестности начала координат при $t > t_0$, если $\| x_Q(t) \| < \delta(\varepsilon)$ при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$ и $\| Q \| < \eta(\varepsilon)$, где*

$$\delta(\varepsilon) = (1 - \zeta)(1 + \| B \| \tau_0)^{-1} \exp(-\| A \| \tau_0) (\lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H))^{1/2} \varepsilon,$$

$$\eta(\varepsilon) = \varepsilon (\lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H))^{1/2} \min \{\zeta \tau_0^{-1} \exp(-\| A \| \tau_0),$$

$$(\| A \| + \| B \|)(1 - \xi) \beta/\xi, \qquad (1 - \xi)(1 - \beta) \lambda_{\min}(C)/(2 \| H \|)\},$$

$\xi = \tau/\tau_0$, *$\zeta$ и $\beta$ — произвольные числа,* $0 < \zeta < 1$, $0 < \beta < 1$.

Лемма 2. *Пусть для $t \geqslant t_0 + \tau$ существует $\alpha > 0$ такое, что $x_Q(t) \in \partial v^\alpha$, а при $t - 2\tau \leqslant s \leqslant t$ $x_Q(s) \in v^\alpha$ Тогда для произвольного $\gamma > 0$ будет существовать $\tau_0 > 0$ и $\eta > 0$ такие, что при $\tau < \tau_0$ и $\| Q \| < \eta$ будет $\| x_Q(t) - x_Q(t-\tau) \| < \gamma \| x_Q(t) \|$.*

Доказательство. Проводя оценки решений $x_Q(t)$ системы (2), получим

$$\| x_Q(t)-x_Q(t-\tau)\| \leqslant \int_{t-\tau}^{t} \| Ax_Q(s)+Bx_Q(s-\tau)+Q(x_Q(s), x_Q(s-\tau))\| ds <$$

$$< \tau[(\|A\|+\|B\|) \sup_{t-2\tau\leqslant s\leqslant t} \{\|x_Q(s)\|\}+\eta] \leqslant \tau[(\|A\|+\|B\|)\times$$

$$\times(\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H))^{1/2}\|x_Q(t)\|+\eta].$$

Если положить $\tau_0=\gamma(\lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H))^{1/2}/[\xi+(1-\xi)\beta]\ (\|A\|+\|B\|)$, $\eta=(\|A\|+\|B\|)(1-\xi)\beta/\xi(\alpha/\lambda_{\min}(H)^{1/2}$, где $\xi=\tau/\tau_0$, $0<\beta<1$, то лемма 2 выполняется.

Доказательство теоремы. Выберем $\delta>0$ и $\eta>0$ таким образом, чтобы $x_Q(t)\in v^\alpha$ при $t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0+\tau$, лишь только $\|x_Q(t)\|<\delta$ при $t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0$ и $\|Q\|<\eta$. Получая оценки аналогично теореме 1, находим:

$$\|x_Q(t)\|\leqslant\|x_Q(t_0)\|+\int_{t_0}^{t}\|Ax_Q(s)+Bx_Q(s-\tau)+Q(x_Q(s), x_Q(s-\tau))\| ds.$$

Используя неравенство Беллмана, запишем $\|x_Q(t)\|\leqslant[\delta(1+\|B\|\tau)+ +\eta\tau]\exp(\|A\|\tau)$. Таким образом, выбираем

$$\delta=(1-\zeta)(1+\|B\|\tau)^{-1}\exp(-\|A\|\tau)(\alpha\lambda_{\max}(H))^{1/2},$$

$$\eta=\zeta\tau^{-1}\exp(-\|A\|\tau)(\alpha/\lambda_{\max}(H))^{1/2},\quad 0<\zeta<1.$$

Оценим полную производную $v(x)$, используя (2):

$$\dot v[x_Q(t)]=-(x_Q^T(t), Cx_Q(t))+([x_Q(t-\tau)-x_Q(t)]^TB^T, Hx_Q(t))+$$

$$+(x_Q^T(t), HB[x_Q(t-\tau)-x_Q(t)])+2(x_Q^T(t)H,\ Q,\ (x_Q(t), x_Q(t-\tau)))\leqslant$$

$$\leqslant(-\lambda_{\min}(C)+2\gamma\|HB\|)\|x_Q(t)\|^2+2\|H\|\eta\|x_Q(t)\|.$$

Положим $\gamma=\lambda_{\min}(C)(2\|HB\|)^{-1}[\xi+(1-\xi)\beta]$, тогда $\tau_0=\lambda_{\min}(C)\times \times[2(\|A\|+\|B\|)\|HB\|]^{-1}(\lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H))^{1/2}$. Выберем для произвольных $\varepsilon>0$ и $\tau<\tau_0$ величины $\delta(\varepsilon)$ и $\eta(\varepsilon)$ следующим образом:

$$\delta(\varepsilon)=(1-\zeta)(1+\|B\|\tau_0)^{-1}\exp(-\|A\|\tau_0)(\lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H))^{1/2},$$

$$\eta(\varepsilon)=\varepsilon(\lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H))^{1/2}\min\{\zeta\tau_0^{-1}\exp(-\|A\|\tau_0),$$

$$(\|A\|+\|B\|)(1-\xi)\beta/\xi,\quad(1-\xi)(1-\beta)\lambda_{\min}(c)/(2\|H\|)\},$$

где $\zeta=\tau/\tau_0$, $0<\zeta<1$, $0<\beta<1$. Тогда решение $x(t)\equiv 0$ будет устойчивым при постоянно действующих возмущениях. Действительно, для произвольных $\varepsilon>0$ и $\tau<\tau_0$ в силу выбора $\delta(\varepsilon)>0$ и $\eta(\varepsilon)>0$ при $t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0+\tau$ $x_Q(t)\in v^\alpha$, где $\alpha=\lambda_{\min}(H)\varepsilon^2$. Но тогда при $t\geqslant t_0+ +\tau$ $\|x_Q(t)-x_Q(t-\tau)\|<\gamma\|x_Q(t)\|$, где $\gamma=\lambda_{\min}(C)[\zeta+(1-\zeta)\beta]/(2\|H\|)$. И так как при этом полная производная $v(x)$ в силу системы (2) отрицательно определена, то $x(t)\equiv 0$ устойчиво при постоянно действующих возмущениях, что и требовалось доказать.

Замечание. Величины $\tau_0$, $\delta(\varepsilon)$ и $\eta(\varepsilon)$ — функции $\lambda_{\min}(H)$, $\lambda_{\min}(c)$, $\lambda_{\max}(H)$. За счет удачного выбора матрицы $C$ эти величины можно улучшить.


1. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971.—296 с.
2. *Хусаинов Д. Я., Шарковский А. Н.* Об устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. — В кн.: Функциональные и дифференциально-разностные уравнения. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974, с. 141—147.
3. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. — М.: Наука, 1970.—240 с.



Киевский
государственный университет



Поступила в редакцию
12.12.81