УДК 517.535.4

М. Н. Шеремета

Об одной теореме Пойа

Формулировка основной теоремы. Пусть

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\ z=x+iy, \tag{1}$$

— целая трансцендентная функция с вещественными коэффициентами, $M(r,f)=\max\{|f(z)|:|z|=r\}$, а (λ_k) — последовательность перемен знаков коэффициентов, т. е. $a_{\lambda'_k}\cdot a_{\lambda_k}<0$, где $\lambda'_k=\max\{n<\lambda_k:a_n\neq 0\}$. Через $K(t)$ обозначим считающую функцию последовательности (λ_k), т. е. $K(t)=\sum_{\lambda_k\leqslant t}1$, $t\geqslant 0$. Если существует предел $\lim_{t\to\infty}t^{-1}K(t)=\Delta$, то (λ_k) называется измеримой последовательностью, а число Δ — ее плотностью. В [1] показано, что если $\Delta=0$, то в каждом угле $\{z:|\arg z|\leqslant\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$, функция (1) имеет тот же порядок, что и во всей плоскости. Возникает вопрос: можно ли в теореме Пойа угол $\{z:|\arg z|\leqslant\varepsilon\}$ заменить лучом $\{z:\arg z=0\}$? Изучению поведения функции (1) на положительном луче посвящены работы [2—5], но ни в одной из них не получено полного ответа на поставленный вопрос. В частности, в [5] показано, что если $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-1}<\infty$, то

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\ln|f(x)|/\ln M(x,f)=1. \tag{2}$$

С другой стороны [2], для каждой последовательности (λ_k) натуральных чисел такой, что $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} = \infty$, существует целая функция, ограниченная на положительном луче, для которой (λ_k) — последовательность перемен знаков коэффициентов. Значит, в классе всех целых функций условие $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} < \infty$ необходимо и достаточно для выполнения (2). Возникает вопрос: можно ли в классе целых функций конечного порядка условие $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} < \infty$ заменить более слабым условием $\Delta = 0$? Положительные ответы на поставленные выше вопросы дает следующая теорема.

Теорема 1. *Если целая функция* (1) *имеет конечный порядок* ρ *и* $\Delta = 0$, *то имеет место равенство* (2) *и*

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \ln\ln|f(x)|/\ln x = \rho. \tag{3}$$

Условие $\Delta = 0$ существенно для выполнения утверждений теоремы 1. Действительно [2], для любой последовательности (λ_k) натуральных чисел такой, что $\underline{\lim}_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} \sum_{\lambda_k \leqslant x} \lambda_k^{-1} = \delta > 0$, существует целая функция порядка $\rho = 0{,}5\,\delta^{-1}$, ограниченная на положительном луче, для которой (λ_k) — последовательность перемен знаков коэффициентов. Так как в нашем случае последовательность (λ_k) измеримая и $K(0) = 0$, то $\delta = \Delta$ и, таким образом, в классе целых функций конечного порядка с измеримой последовательностью перемен знаков тейлоровских коэффициентов условие $\Delta = 0$ необходимо и достаточно для выполнения равенств (2) и (3).

Теорему 1 получим из более общей теоремы 3, при доказательстве которой используется метод интегральных преобразований, впервые примененный в [2], а затем в [3, 6], а также модификация метода Вимана — Валирона, разработанная в [7, 8]. Оценки, получаемые методом Вимана —Валирона, обычно выполняются вне некоторых множеств, для характеристики которых будем пользоваться следующими понятиями: логарифмическими мерой lE и верхней плотностью DE измеримого множества $E \subset [0, \infty)$ называются соответственно величины

$$lE = \int_{E\cap[1,\infty)} d\ln r,\ DE = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{l(E\cap[1,r])}{\ln r}.$$

Многочлены с вещественными коэффициентами. Пусть $P(z) = a_1 z + \ldots + a_N z^N$ — алгебраический многочлен степени N с вещественными коэффициентами, меняющими знак при $n = \lambda_k$, K — число перемен знаков,

$$\omega_k = \lambda_k - 0{,}5,\ B(z) = \prod_{k=1}^{K} (\omega_k - z)/(\omega_k + z) \ \text{ и } \ I(r, P) = \int_0^r |P(t)|\, d\ln t,\quad r > 0.$$

Теорема 2. *Для всех* $r > 0$ *выполняется неравенство*

$$M(r, P) \leqslant 8N^2 (8eN/K)^K I(r, P). \tag{4}$$

Доказательство. Следуя [2], рассмотрим интегральное преобразование

$$H_t(z) = \int_0^t P(s)\, s^{-1-z} ds = t^{-z} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n-z} a_n t^n,\quad t > 0. \tag{5}$$

Тогда $\Phi_t(z) = H_t(z)\sin \pi z$ — целая функция, $\Phi_t(n) = (-1)^n \pi a_n$, $n = 1, 2, \ldots, N$, и $\Phi_t(n) = 0$ при $n = N+1, N+2, \ldots$. Изучим расположение положительных нулей функции Φ_t. Если $a_n a_{n+1} > 0$, то $\Phi_t(n)\Phi_t(n+1) < 0$, и на $[n, n+1]$ имеется нуль функции Φ_t, а если $a_n a_{n+1} < 0$, т. е. $n + 1 = \lambda_k$ при некотором k, то $\Phi_t(n)\Phi_t(n+1) > 0$, и на $[n, n+1]$ функция Φ_t может не иметь нуля. Аналогичный результат имеет место и в случае, когда среди коэффициентов a_n есть равные нулю. Действительно, пусть $a_m \neq 0$, $a_{m+1} = \ldots = a_{n-1} = 0$ и $a_n \neq 0$. Возможны два варианта: $n - m = 2l$, $l \geqslant 1$, и $n - m = 2l - 1$, $l \geqslant 1$. Пусть сначала $n - m = 2l$, $l \geqslant 1$, и $a_n a_m > 0$. Тогда $\Phi_t(n)\Phi_t(m) = (-1)^{m+n}\pi^2 a_n a_m = (-1)^{2(m+l)} \times \pi^2 a_n a_m > 0$, т. е. на $[m, n]$ имеется четное число нулей функции Φ_t, а так как $\Phi_t(m+1) = \ldots = \Phi_t(n-1) = 0$ и $n - m - 1 = 2l - 1$ — нечетное число, то имеется еще один нуль m^* функции Φ_t, лежащий в одном из промежутков $[m, m+1]$, $[m+1, m+2]$, $\ldots$, $[n-1, n]$. Если m^* — одно из чисел $m, \ldots, n$, то соответствующий нуль считаем дважды: один раз в $[m^* - 1, m^*]$, второй — в $[m^*, m^* + 1]$. Если же $n - m = 2l$, $l \geqslant 1$, но $a_m a_n < 0$, т. е. $n = \lambda_k$ при некотором k, то $\Phi_t(m)\Phi_t(n) < 0$, и на $[m, n]$ имеется нечетное число нулей функции Φ_t, а так как $n - m - 1$ — нечетное число, то в данном случае одного нуля может не хватить. Случай $n - m = 2l - 1$, $l \geqslant 1$, рассматривается аналогично. Таким образом, в каждом промежутке $[n, n+1]$, за исключением, быть может, промежутков вида $[\lambda_k - 1, \lambda_k]$, $k = 1, 2, \ldots, K$, функция Φ_t имеет хотя бы один нуль. Поэтому функция

$$\varphi(z) = B(z)\Phi_t(z) = B(z)H_t(z)\sin \pi z \tag{6}$$

имеет хотя бы один нуль в каждом промежутке $[n, n+1]$. Из (5) и (6) легко следует, что функция φ аналитична в $\{z : \operatorname{Re} z \geqslant 0\}$ и имеет экспоненциальный тип π. Для всех $y \in \mathrm{R}$ выполняются соотношения

$$|\varphi(iy)| = |\operatorname{sh} \pi y|\,|H_t(iy)| = |\operatorname{sh} \pi y| \left| \int_0^t P(s)\, s^{-1-iy} ds \right| \leqslant I(t, P)\,|\operatorname{sh} \pi y|.$$

Наконец,

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{1}{x} \ln|\varphi(x)| = -\ln t < +\infty.$$

Таким образом, функция φ удовлетворяет условиям теоремы 3 из [3], согласно которой $|\varphi(z)| \leqslant 8\pi |z|\, I(t, P) \exp\{-x \ln t + \pi |y|\}$ для всех $z = x + iy$, $x \geqslant 0$, и всех $t > 0$. Взяв $y = 0$ и $x = n$, получаем, что $|\varphi(n)| \leqslant 8\pi n I(t, P)\, t^{-n}$, а поскольку $\varphi(n) = B(n)\Phi_t(n) = (-1)^n \pi a_n B(n)$, имеем $|a_n| \leqslant 8 n I(t, P)\, t^{-n} |B(n)|^{-1}$ для всех $n = 1, 2, \ldots, N$ и всех $t > 0$. Поэтому

$$M(r, P) \leqslant \sum_{n=1}^{N} |a_n|\, r^n \leqslant 8 I(r, P) \sum_{n=1}^{N} n\, |B(n)|^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant 8 I(r, P)\, N^2 \max\{|B(n)|^{-1} : 1 \leqslant n \leqslant N\}. \tag{7}$$

Пусть n — произвольное число, $n = 1, 2, \ldots, N$, а $k(n)$ — количество тех ω_k, которые удовлетворяют неравенству $\omega_k < n$. Тогда

$$\prod_{k=1}^{K} |\omega_k - n| = \prod_{k=1}^{k(n)} (n - \omega_k) \prod_{k=k(n)+1}^{K} (\omega_k - n) \geqslant 2^{-K} \left(\frac{k(n)}{e}\right)^{k(n)} \times$$

$$\times \left(\frac{K - k(n)}{e}\right)^{K - k(n)} \geqslant (2e)^{-K} \exp(\min\{x \ln x + (K - x)\ln(K - x) :$$

$$: 0 \leqslant x \leqslant K\}) = \left(\frac{K}{4e}\right)^K.$$

Поэтому

$$\max\{|B(n)|^{-1}:1\leqslant n\leqslant N\}\leqslant\max\left\{\prod_{k=1}^{K}|\omega_k+n||\omega_k-n|^{-1}:1\leqslant n\leqslant N\right\}\leqslant$$

$$\leqslant(2N)^K\max\left\{\prod_{k=1}^{K}|\omega_k-n|^{-1}:1\leqslant n\leqslant N\right\}\leqslant\left(\frac{8eN}{K}\right)^K. \tag{8}$$

Неравенство (4) вытекает из соотношений (7) и (8).

Доказательство основной теоремы. Всюду далее через $\mu(r)$ и $\nu=\nu(r)$ обозначаем максимальный член и центральный индекс ряда (1), а через Ω — класс положительных возрастающих выпуклых на $(-\infty,\infty)$ функций Φ таких, что правосторонняя производная φ' функции φ, обратной к Φ, удовлетворяет условиям $t^2\varphi'(t)\uparrow\infty$, $t_0\leqslant t\to\infty$, и $t^2\varphi'(t)/\ln t\to\infty$, $t\to\infty$. Обозначим $\sigma_\eta(r)=\sum_{n>(1+\eta)\nu}|a_n|r^n$, $\nu=\nu(r)$. Тогда, [7, 8], если $\ln M(e^x,f)\leqslant\Phi(x)\in\Omega$, то для каждого $\eta>0$ при $r\to\infty$ вне некоторого множества, верхняя логарифмическая плотность которого не превышает числа $q\in(0,1)$, выполняются соотношения

$$\sigma_\eta(r)=o(\mu(r))\exp\{-0{,}25q\eta^2(1+\eta)^{-2}\nu^2\varphi'(\nu)\} \tag{9}$$

и

$$\ln\mu(r)\geqslant0{,}5q\nu^2\varphi'(\nu). \tag{10}$$

Для целой функции (1) с вещественными коэффициентами обозначим $I(r,f)=\int_0^r|f(t)-f(0)|\,d\ln t$.

Теорема 3. *Если* $\ln M(e^x,f)\leqslant\Phi(x)\in\Omega$ *и*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{K(t)}{t^2\varphi'(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{K(t)}{t^2\varphi'(t)}\ln\frac{t}{K(t)}=0, \tag{11}$$

то для каждого $\varepsilon>0$ *и всех* $r>0$ *вне некоторого множества нулевой логарифмической плотности выполняется неравенство*

$$\ln M(r,f)<(1+\varepsilon)I(r,f). \tag{12}$$

Доказательство. Положим $P_\eta(z)=\sum_{1\leqslant n\leqslant(1+\eta)\nu}a_nz^n$ и $Q_\eta(r)=8(1+\eta)^2\nu^2\{8e(1+\eta)\nu/K((1+\eta)\nu)\}^{K((1+\eta)\nu)}$. Тогда, применяя к многочлену P_η теорему 2, получаем

$$M(r,f)\leqslant\max\left\{\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant(1+\eta)\nu}a_nz^n\right|:|z|=r\right\}+\sum_{n>(1+\eta)\nu}|a_n|r^n+|a_0|\leqslant$$

$$\leqslant M(r,P_\eta)+\sigma_\eta(r)+|a_0|\leqslant Q_\eta(r)I(r,P_\eta)+\sigma_\eta(r)+|a_0|=$$

$$=Q_\eta(r)\int_0^r\left|f(t)-\sum_{n>(1+\eta)\nu}a_nt^n-a_0\right|d\ln t+\sigma_\eta(r)+|a_0|\leqslant$$

$$\leqslant Q_\eta(r)\left\{I(r,f)+\sum_{n>(1+\eta)\nu}\frac{1}{n}a_nr^n\right\}+\sigma_\eta(r)+|a_0|\leqslant Q_\eta(r)I(r,f)+$$

$$+\{Q_\eta(r)+1\}\sigma_\eta(r)+|a_0|. \tag{13}$$

В силу (9), определения класса Ω и условия (11) имеем

$$Q_\eta(r)\sigma_\eta(r)=o(\mu(r))\exp\{O(\ln\nu)+K((1+\eta)\nu)\ln(8e(1+\eta)\nu/K((1+$$

$$+\eta)\nu))-0{,}25q\eta^2(1+\eta)^{-2}\nu^2\varphi'(\nu)\}=o(\mu(r))\exp\{-0{,}25q\eta^2(1+\eta)^{-2}\times$$

$$\times \nu^2\varphi'(\nu)(1+O(\ln\nu/(\nu^2\varphi'(\nu)))+O(K((1+\eta)\nu)/((1+\eta^2)\nu^2\varphi'((1+\eta)\nu)))+$$
$$+O(\{K((1+\eta)\nu)/((1+\eta)^2\nu^2\varphi'((1+\eta)\nu))\}\ln\{(1+\eta)\nu/K((1+\eta)\nu)\}))\}=$$
$$=o(\mu(r))=o(M(r,f))$$

при $r\to\infty$ вне некоторого множества, верхняя логарифмическая плотность которого не превышает q. Поэтому из (13) получаем, что $M(r,f)\leqslant Q_\eta(r)\times\times I(r,f)+o(M(r,f))$ при $r\to\infty$ вне этого же множества, откуда вытекает неравенство

$$\ln M(r,f)+o(1)\leqslant \ln I(r,f)+\ln Q_\eta(r) \tag{14}$$

при $r\to\infty$ вне некоторого множества, верхняя логарифмическая плотность которого не превышает q. Так как в силу (10)

$$\ln Q_\eta(r)/\ln M(r,f)\leqslant (O(\ln\nu)+K((1+\eta)\nu)\ln\{8e(1+\eta)\nu/K((1+$$
$$+\eta)\nu\})/\ln\mu(r)\leqslant\frac{2}{q}(O(\ln\nu)+K((1+\eta)\nu)\ln\{8e(1+$$
$$+\eta)\nu/K((1+\eta)\nu)\})/(\nu^2\varphi'(\nu))$$

при $r\to\infty$ вне некоторого множества, верхняя логарифмическая плотность которого не превышает q, то в силу определения класса Ω и условия (11), как и выше, получаем, что $\ln Q_\eta(r)/\ln M(r,f)\to 0$ при $r\to\infty$ вне того же множества. Поэтому из (14) следует выполнение (12) для всех $r>0$ вне некоторого множества, верхняя логарифмическая плотность которого не превышает q, а значит, ввиду произвольности q (12) имеет место для всех $r>>0$ вне некоторого множества нулевой логарифмической плотности. Теорема 3 доказана.

Приступим к доказательству основной теоремы 1. Если функция (1) имеет конечный порядок ρ, то в качестве функции Φ можно взять любую положительную возрастающую выпуклую на $(-\infty,\infty)$ функцию такую, что $\Phi(x)=\exp\{(\rho+\varepsilon)x\}$ при $x\geqslant x_0$ и $\ln M(e^x,f)\leqslant\Phi(x)$. Тогда $\varphi(t)=(\rho+\varepsilon)^{-1}\ln t$ и $\varphi'(t)=(\rho+\varepsilon)^{-1}t^{-1}$, $t\geqslant t_0$, т. е., как легко видеть, $\Phi\in\Omega$. Условие (11) в данном случае имеет вид $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}K(t)\ln(t/k(t))==\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}K(t)=0$. Оно выполняется, если $\Delta=0$. Поэтому по теореме 3 имеет место (12) для всех $r>0$ вне некоторого множества нулевой логарифмической плотности.

Предположим, что равенство (3) не верно, т. е. для всех $x\geqslant x_1$ выполняется неравенство $|f(x)|\leqslant\exp x^\alpha$, $\alpha<\rho$. Тогда

$$I(r,f)=\int\limits_0^{x_1}|f(x)-a_0|\,d\ln x+\int\limits_{x_1}^{r}\exp\{x^\alpha-\ln x\}\,dx+|a_0|\ln(r/x_1)=$$
$$=O(\ln r)+\int\limits_{x_1}^{r}\exp\{x^\alpha-\ln x\}\,dx\sim O(\ln r)+\frac{1}{\alpha}\exp\{r^\alpha-\alpha\ln r\}\leqslant$$
$$\leqslant(1+o(1))\exp r^\alpha,\quad r\to\infty. \tag{15}$$

Из (15) и (12) следует, что $\ln M(r,f)\leqslant r^\alpha+1$ для всех $r>0$, за исключением, возможно, некоторого множества E_0 нулевой логарифмической плотности. Если же $r\in E_0$, пусть $r'=\inf\{t\bar{\in}E_0: t\geqslant r\}$. Тогда

$$\ln M(r,f)\leqslant\ln M(r',f)\leqslant 1+(r')^\alpha=1+(r'/r)^\alpha r^\alpha. \tag{16}$$

Так как множество E_0 имеет нулевую логарифмическую плотность, то $(\ln r'-\ln r)/\ln r\to 0$ при $r\to\infty$, т. е. $(r'/r)^\alpha=\exp\{\alpha(\ln r'-\ln r)\}==\exp\{o(\ln r)\}=r^{o(1)}$ при $r\to\infty$. Поэтому из (16) вытекает неравенство $\ln M(r,f)\leqslant r^{\alpha+0(1)}$, $r\to\infty$, откуда следует, что порядок функции (1) не превышает α, что невозможно. Равенство (3) доказано.

Доказательство равенства (2) проведем также от противного. Допустим, что для всех $x \geqslant x_2$ выполняется неравенство $\ln f(x) \leqslant \alpha \ln M(x, f)$, $\alpha < 1$. Тогда, как и при доказательстве (3), имеем

$$I(r, f) = O(\ln r) + \int_{x_2}^{r} M^{\alpha}(x, f)\, d \ln x \leqslant O(\ln r) +$$

$$+ M^{\alpha}(r, f) \ln (r/x_2) \leqslant 2M^{\alpha}(r, f) \ln r$$

при $r \to \infty$, т. е. из (12) вытекает, что для каждого $\varepsilon > 0$ и всех $r > 0$ вне некоторого множества нулевой логарифмической плотности $\ln M(r, f) < < (1 + \varepsilon)\{\alpha \ln M(r, f) + \ln (2 \ln r)\}$, откуда следует, что $\alpha \geqslant 1$, а это невозможно. Теорема 1 доказана.

1. *Pólya G.* Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen.— Math. Z., 1929, 29, S. 549—640.
2. *Edrei A.* Gap and density theorems for entire functions.— Scr. math., 1957, 23, p. 117—141.
3. *Kühn J.* Über das Wachstum reeller Potenzreihen mit weniger Vorzeichenvechseln und über das Wachstum ganzer Dirichlet — Reihen.— Mitt. Math. Semin Giessen, 1967, H. 75, S. 3—65.
4. *Павлов А. И.* О росте на положительном луче целых функций с вещественными коэффициентами.— Мат. заметки, 1973, 14, № 4, с. 577—588.
5. *Шеремета М. Н.* Об одном свойстве целых функций с вещественными тейлоровскими коэффициентами.— Там же, 1975, 18, № 3, с. 395—402.
6. *Gaier D.* On the coefficientes and the growth of gap power series.— SIAM J. Numer. Anal., 1966, 3, p. 248—265.
7. *Шеремета М. Н.* Метод Вимана—Валирона для рядов Дирихле.— Укр. мат. журн., 1978, 30, № 4, с. 488—497.
8. *Шеремета М. Н.* О росте в угле целых функций, заданных лакунарными степенными рядами.— Сиб. мат. журн., 1980, 21, № 3, с. 197—208.

Львовский
государственный университет

Поступила в редакцию
04.05.81