УДК 517.948.35

В. Е. Слюсарчук

Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем

Пусть Z_+ — множество неотрицательных целых чисел; Z_- — множество неположительных целых чисел; $Z = Z_- \cup Z_+$; $E(n)$, $n \in Z$, — банаховы пространства с соответствующими нормами $\|\cdot\|_{E(n)}$; $\mathfrak{M}$ — пространство определенных и ограниченных на Z функций $x = x(n)$, для которых $x(n) \in E(n)$ $\forall n \in Z$, с нормой $\|x\|_{\mathfrak{M}} = \sup_{n \in Z} \|x(n)\|_{E(n)}$; $[X, Y]$ — пространство линейных непрерывных операторов $A: X \to Y$ с нормой $\|A\|_{[X,Y]} = \sup\{\|Ax\|_Y : \|x\|_X = 1\}$, где X и Y — банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$.

Рассмотрим операторы $A(n) \in [E(n), E(n+1)]$, $n \in Z$, для которых

$$\sup_{n \in Z} \|A(n)\|_{[E(n), E(n+1)]} < \infty, \tag{1}$$

и уравнение

$$x(n) = A(n-1)\, x(n-1), \quad n \in Z, \tag{2}$$

где $x(n) \in E(n)$ $\forall n \in Z$.

Будем говорить, что для решений уравнения (2) имеет место экспоненциальная дихотомия на Z (уравнение э-дихотомично), если для каждого $m \in Z$ пространство $E(m)$ распадается в прямую сумму замкнутых подпространств $E(m) = E_+(m) + E_-(m)$, причем выполняются следующие условия:

а) проекторы $P_+(m)$ и $P_-(m)$ на подпространства $E_+(m)$ и $E_-(m)$ равномерно ограничены, т. е.

$$\sup_{m \in Z} \|P_+(m)\|_{[E(m), E(m)]} + \sup_{m \in Z} \|P_-(m)\|_{[E(m), E(m)]} < \infty; \tag{3}$$

б) для каждого $z \in E_+(m)$ решение $y(n)$ задачи

$$y(n+1) = A(n)\, y(n), \ n \geqslant m, \ y(m) = z \tag{4}$$

удовлетворяет оценке $\|y(n)\|_{E(n)} \leqslant N_1 q_1^{n-m} \|z\|_{E(m)} \forall n \geqslant m$ с некоторыми $N_1 > 0$ и $q_1 \in (0, 1)$, не зависящими от n и m;

в) для каждого $z \in E_-(m)$ решение $y(n)$ задачи

$$y(n+1) = A(n)\, y(n), \quad n \leqslant m, \quad y(m) = z \tag{5}$$

удовлетворяет оценке $\|y(n)\|_{E(n)} \leqslant N_2 q_2^{m-n} \|z\|_{E(m)} \ \forall\, n \leqslant m$ с некоторыми $N_2 > 0$ и $q_2 \in (0, 1)$, не зависящими от n и m.

Изучению э-дихотомичности уравнения $x(n) = A(n-1)\, x(n-1)$ на множестве Z_+ (Z_-), когда $E(n) = \mathrm{const}$, посвящена работа [1]. Тривиальные рассуждения показывают, что скалярное уравнение

$$x(n) - 2^{\operatorname{sign}(n-1)}\, x(n-1) = 0$$

э-дихотомично на каждом из множеств Z_- и Z_+, однако не э-дихотомично на Z, т. е. э-дихотомичности уравнения $x(n) = A(n-1)\, x(n-1)$ на множествах Z_- и Z_+ недостаточно для э-дихотомичности уравнения (2) на Z.

Укажем некоторые условия э-дихотомичности уравнения (2) на Z, аналогичные соответствующим условиям э-дихотомичности обыкновенных дифференциальных уравнений [2—5] и дифференциальных уравнений запаздывающего и нейтрального типа [6, 7], и приведем новые условия э-дихотомичности уравнения (2).

Определим оператор $\mathfrak{A} \in [\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$ равенством

$$(\mathfrak{A}y)(n) = y(n) - A(n-1)\, y(n-1), \quad n \in Z,$$

где $y = y(n) \in \mathfrak{M}$.

Теорема 1. *Уравнение (2) э-дихотомично тогда и только тогда, когда оператор $\mathfrak{A}$ имеет непрерывный обратный.*

Доказательство. Пусть оператор $\mathfrak{A}$ имеет непрерывный обратный $\mathfrak{A}^{-1}$. Тогда уравнение

$$X(n+1) = A(n)\, X(n) + \begin{cases} I_m, & \text{если } n = m-1, \\ O_{n+1} & \text{если } n \neq m-1, \end{cases} \tag{6}$$

где I_m — единичный элемент пространства $[E(m), E(m)]$, O_n — нулевой элемент пространства $[E(n), E(n)]$, а $m \in Z$, будет иметь единственное ограниченное решение $X(n) = G(n, m)$ $(G(n, m) \in [E(m), E(n)])$. Также единственные ограниченные решения $Y(n) = G_\varepsilon(n, m)$, $Z(n) = G_{-\varepsilon}(n, m)$ будут иметь при достаточно малом $\varepsilon \in (0, 1/2)$ уравнения

$$Y(n+1) = (1+\varepsilon) A(n) Y(n) + \begin{cases} I_m, & \text{если } n = m-1, \\ O_{n+1}, & \text{если } n \neq m-1, \end{cases}$$

$$Z(n+1) = (1-\varepsilon) A(n) Z(n) + \begin{cases} I_m, & \text{если } n = m-1, \\ O_{n+1}, & \text{если } n \neq m-1, \end{cases}$$

поскольку свойство корректной разрешимости устойчиво по отношению к малым возмущениям [8, с. 54]. Очевидно, что

$$G(n, m) = (1+\varepsilon)^{m-n} G_\varepsilon(n, m) = (1-\varepsilon)^{m-n} G_{-\varepsilon}(n, m), \quad n \in Z, \quad m \in Z.$$

Поэтому согласно ограниченности функций $G_\varepsilon(n, m)$ и $G_{-\varepsilon}(n, m)$

$$\| G(n, m) \|_{[E(m), E(n)]} \leqslant N q^{|n-m|}, \quad n \in Z, \quad m \in Z, \tag{7}$$

где $q = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 \in (0, 1)$, $N = \sup\limits_{n,m \in Z} \max \{ \| G_\varepsilon(n, m) \|_{[E(m), E(n)]}, \| G_{-\varepsilon}(n, m) \|_{[E(m), E(n)]} \}$. Функция $G(n, m)$ как решение уравнения (6) удовлетворяет соотношениям

$$G(m, m) - A(m-1)\, G(m-1, m) = I_m \ \forall\, m \in Z; \tag{8}$$

$$G(n+1, m) = A(n)\, G(n, m) \quad \text{при} \quad n \neq m-1. \tag{9}$$

Рассмотрим линейные операторы

$$Q_+(m) = G(m, m) \in [E(m), E(m)]; \tag{10}$$

$$Q_-(m) = -A(m-1)\, G(m-1, m) \in [E(m), E(m)] \tag{11}$$

и замкнутые подпространства $E_+(m) = \{Q_+(m)\, x : x \in E(m)\}$, $E_-(m) = \{Q_-(m)\, x : x \in E(m)\}$ пространства E.

Заметим, что $Q_+(m)$ и $Q_-(m)$ — взаимно дополнительные проекторы на подпространства $E_+(m)$ и $E_-(m)$, т. е.

$$Q_+(m) + Q_-(m) = I_m; \tag{12}$$

$$Q_+^2(m) = Q_+(m), \quad Q_-^2(m) = Q_-(m). \tag{13}$$

Соотношение (12) вытекает из (8), (10) и (11), а соотношение (13) —

из равенств

$$Q_+(m)\,Q_-(m) = Q_-(m)\,Q_+(m) = O_m, \tag{14}$$

$$Q_+(m) - Q_+^2(m) = Q_+(m)\,(I_m - Q_+(m)) = Q_+(m)\,Q_-(m),$$

$$Q_-(m) - Q_-^2(m) = Q_-(m)\,(I_m - Q_-(m)) = Q_-(m)\,Q_+(m).$$

Если предположить, что не выполняется соотношение (14), то найдется ненулевой вектор $x \in E\ (m)$ такой, что $x \in E_+\ (m) \cap E_-\ (m)$. Тогда ограниченная согласно (7) функция

$$y(n) = \begin{cases} G(n, m)\,v, & \text{если } n > m, \\ x, & \text{если } n = m, \\ -G(n, m)\,u, & \text{если } n < m, \end{cases}$$

где u и v — такие векторы из подпространств $E_+(m)$ и $E_-(m)$, что

$$Q_+(m)\,u = Q_-(m)\,v = x, \tag{15}$$

принадлежит ядру $\operatorname{Ker}\mathfrak{A}$ оператора $\mathfrak{A}$ (включение $y = y(n) \in \operatorname{Ker}\mathfrak{A}$ устанавливается с помощью (8), (9), (10), (11) и (15)), что противоречит обратимости оператора $\mathfrak{A}$.

Таким образом, $Q_+\ (m)$ и $Q_-\ (m)$ — взаимно дополнительные проекторы на подпространства $E_+\ (m)$ и $E_-\ (m)$.

Заметим, что проекторы $Q_+\ (m)$, $Q_-(m)$, $m \in Z$, удовлетворяют соотношению (3), что следует из (7), (10), (11) и (1).

Условие б) определения э-дихотомичности уравнения (2) выполняется, поскольку решение $y\ (n)$ задачи (4), когда $z \in E_+(m)$, представляется в виде $y\ (n) = G\ (n,\ m)\ z,\ n \geqslant m$, а функция $G\ (n,\ m)$ удовлетворяет соотношению (7).

Условие в) также выполняется, поскольку решение $y\ (n)$ задачи (4), когда $z \in E_-\ (m)$, представляется в виде

$$y(n) = \begin{cases} z, & \text{если } n = m, \\ -G(n, m)\,z, & \text{если } n < m, \end{cases}$$

и функция $G\ (n,\ m)$ удовлетворяет соотношению (6).

Таким образом, из обратимости оператора $\mathfrak{A}$ следует, что уравнение (2) э-дихотомично.

Пусть теперь уравнение (2) э-дихотомично. Покажем, что оператор $\mathfrak{A}$ имеет непрерывный обратный.

Зафиксируем произвольное $m \in Z$. Из предположения об экспоненциальной дихотомии решений уравнения (2) следует, что для каждого $z \in E_+\ (m)$ найдется решение $y\ (n) = y\ (n,\ z)$ задачи (4), удовлетворяющее условию

$$\| y(n, z) \|_{E(n)} \leqslant N_1 q_1^{n-m} \| z \|_{E(m)}\ \forall\, n \geqslant m. \tag{16}$$

Это решение единственное. Если б существовало другое решение $u\ (n) = u\ (n,\ z)$ рассматриваемой задачи, то тогда бы ограниченная на Z функция

$$a(n) = \begin{cases} \theta_n, & \text{если } n \leqslant m, \\ y(n, z) - u(n, z), & \text{если } n > m, \end{cases}$$

где $\| \theta_n \|_{E(n)} = 0$, была решением уравнения (2). А это противоречило бы определению экспоненциальной дихотомии решений уравнения (2), поскольку для некоторых $n > m$ множество $E_+\ (n) \cap E_-\ (n)$ содержало бы ненулевые элементы.

Из единственности функции $y\ (n,\ z),\ n \geqslant m$, и линейности оператора $\mathfrak{A}$ следует существование линейного оператора $B\ (n,\ m) \in [E\ (m),\ \ E\ (n)]$ такого, что

$$B(n, m)\,x = y(n, x) \quad \forall\, x \in E_+(m); \tag{17}$$

и

$$B(n, m)\,x = \theta_n \quad \forall\, x \in E_-(m). \tag{18}$$

Из (16) вытекает, что

$$\| B(n, m) \|_{[E(m), E(n)]} \leqslant N_1 q_1^{n-m} \ \ \forall\, n \geqslant m. \tag{19}$$

Рассмотрим произвольное $z \in E_-(m)$. Найдется решение $g(n) = g(n, z)$ задачи (5), удовлетворяющее условию

$$\| g(n, z) \|_{E(n)} \leqslant N_2 q_2^{m-n} \| z \|_{E(m)} \ \ \forall\, n \leqslant m. \tag{20}$$

Это решение единственное. Существует линейный оператор $C(n, m) \in \in [E(m), E(n)]$, для которого

$$C(n, m)\,z = g(n, z) \quad \forall\, z \in E_-(m); \tag{21}$$

$$C(n, m)\,z = \theta_n \quad \forall\, z \in E_+(m). \tag{22}$$

Из (20) следует, что

$$\| C(n, m) \|_{[E(m), E(n)]} \leqslant N_2 q_2^{m-n} \ \ \forall\, n \leqslant m. \tag{23}$$

Поскольку $B(n+1, m)\,x = A(n)\,B(n, m)\,x$ для всех $x \in E(m)$ и всех $n \geqslant m$, что вытекает из (17) и (18), и $C(n+1, m)\,x = A(n)\,C(n, m)\,x$ для всех $x \in E(m)$ и всех $n \leqslant m - 1$, что вытекает и (21) и (22), то

$$B(n+1, m) = A(n)\,B(n, m) \ \ \forall\, n \geqslant m \tag{24}$$

и

$$C(n+1, m) = A(n)\,C(n, m) \ \ \forall\, n \leqslant m - 1. \tag{25}$$

Из способа введения операторов $B(n, m)$ и $C(n, m)$ следует, что операторы

$$B(m, m) = P_+(m); \tag{26}$$

$$C(m, m) = A(m-1)\,C(m-1, m) = P_-(m) \tag{27}$$

являются взаимно дополнительными проекторами на подпространства $E_+(m)$ и $E_-(m)$.

Рассмотрим функцию

$$F(n, m) = \begin{cases} B(n, m), & \text{если } n \geqslant m, \\ -C(n, m), & \text{если } n < m. \end{cases}$$

Из (19) и (23) следует, что

$$\| F(n, m) \|_{[E(m), E(n)]} \leqslant N q^{|n-m|}, \ \ n \in Z, \ \ m \in Z, \tag{28}$$

где $N = \max\{N_1, N_2\}$, $q = \max\{q_1, q_2\}$, а из (24), (25), (26) и (27) следует, что

$$F(n+1, m) - A(n)\,F(n, m) = \begin{cases} I_m, & \text{если } n = m-1, \\ O_{n+1}, & \text{если } n \neq m-1. \end{cases} \tag{29}$$

Возьмем произвольную функцию $f = f(n) \in \mathfrak{M}$. Согласно (28) функция

$$u(n) = \sum_{m \in Z} F(n, m)\,f(m)$$

принадлежит пространству $\mathfrak{M}$. Из цепочки тождеств

$$(\mathfrak{A}u)(n) \equiv u(n) - A(n-1)\,u(n-1) \equiv \sum_{m \in Z} F(n, m)\,f(m) -$$

$$- A(n-1) \sum_{m \in Z} F(n-1, m)\,f(m) \equiv \sum_{m \in Z} (F(n, m) -$$

$$- A(n-1)\,F(n-1, m))\,f(m) \equiv [F(n, n) - A(n-1)\,F(n-1, n)]\,f(n) \equiv f(n),$$

вытекающей из определения оператора $\mathfrak{A}$ и соотношений (28) и (29), следует, что $\{\mathfrak{A}x : x \in \mathfrak{M}\} = \mathfrak{M}$. Поскольку $\operatorname{Ker} \mathfrak{A} = 0$ (в противном случае уравнение (2) не было б э-дихотомичным), то оператор $\mathfrak{A}$ на основании теоремы Банаха об обратном операторе [9] имеет непрерывный обратный $\mathfrak{A}^{-1}$. Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 1. Если $A(n)$ — вполне непрерывный оператор для каждого $n \in Z$, то пространство $E_-(n)$ конечномерное для каждого $n \in Z$, что следует из (11) и теоремы Рисса (см. [8, с. 100]).

Укажем другие условия э-дихотомичности уравнения (2).

Пусть E — произвольное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_E$, K — множество вполне непрерывных линейных операторов $A : E \to E$.

Т е о р е м а 2. *Пусть:* 1) $E_n = E \ \forall n \in Z$; 1) $A(n)$ — *почти-периодическая K-значная функция;* 3) $\inf\{\|\mathfrak{A}x\|_{\mathfrak{M}} : \|x\|_{\mathfrak{M}} = 1\} > 0$. *Тогда уравнение* (2) *э-дихотомично.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно второму условию теоремы существует последовательность $\{\omega_m\}_{m\geqslant 1}$, $\omega_m \geqslant m + 4 \ \forall m \geqslant 1$, чисел, для которой

$$\lim_{m\to+\infty} \sup_{n\in Z} \| A(n) - A(n+\omega_m)\|_{[E,E]} = 0. \tag{30}$$

Рассмотрим операторы $\mathfrak{A}_m \in [\mathfrak{M}_{\omega_m}, \mathfrak{M}_{\omega_m}]$, $m \geqslant 1$, определенные равенствами

$$(\mathfrak{A}_m x)(n) = x(n) - A(\beta_m(n-1))\, x(n-1) \ (x \in \mathfrak{M}_{\omega_m}), \quad m \geqslant 1,$$

где $\beta_m(n)$ — ω_m-периодическая функция такая, что $\beta_m(n) = n$, если $n = \overline{1, \omega_m}$, а $\mathfrak{M}_{\omega_m}$ — пространство ω_m-периодических функций $x = x(n) \in \mathfrak{M}$.

Из (30) следует, что

$$\lim_{m\to+\infty} \max_{n=\overline{-\omega_m+1,\omega_m}} \| A(n) - A(\beta_m(n))\|_{[E,E]} = 0. \tag{31}$$

Тогда в силу третьего условия теоремы

$$\lim_{m\to+\infty} \inf\{\|\mathfrak{A}_m x\|_{\mathfrak{M}} : x \in \mathfrak{M}_{\omega_m}, \|x\|_{\mathfrak{M}} = 1\} > 0. \tag{32}$$

Действительно, если

$$\lim_{m\to+\infty} \sup_{n\in Z} \| x_m(n+1) - A(\beta_m(n))\, x_m(n)\|_E = 0 \tag{33}$$

для некоторых $x_m = x_m(n) \in \mathfrak{M}_{\omega_m}$, $\|x_m\|_{\mathfrak{M}} = 1$, $m \geqslant 1$, то

$$\lim_{m\to+\infty} \sup_{n\in Z} \| y_m(n+1) - A(\beta_m(n))\, y_m(n)\|_E = 0, \tag{34}$$

где $y_m(n) = \alpha_m(n)\, x_m(n)$ и

$$\alpha_m(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \in (-\infty, -\omega_m + 1] \cap Z, \\ \dfrac{2(n+\omega_m-1)}{\omega_m - 2}, & \text{если } n \in \left(-\omega_m + 1, -\dfrac{\omega_m}{2}\right) \cap Z, \\ 1, & \text{если } n \in \left[-\dfrac{\omega_m}{2}, \dfrac{\omega_m}{2}\right] \cap Z, \\ \dfrac{2(\omega_m - n)}{\omega_m}, & \text{если } n \in \left(\dfrac{\omega_m}{2}, \omega_m\right] \cap Z, \\ 0, & \text{если } n \in (\omega_m, +\infty) \cap Z. \end{cases}$$

Поэтому на основании (31) и (34) $\lim\limits_{m\to+\infty} \|\mathfrak{A}y_m\|_{\mathfrak{M}} = 0$, что противоречит третьему условию теоремы, поскольку $\|y_m\|_{\mathfrak{M}} = 1 \ \forall m \geqslant 1$, и доказывает невозможность соотношения (33).

Рассмотрим уравнение

$$(\mathfrak{A}_m x_m)(n) = f_m(n), \quad n \in Z, \tag{35}$$

где $f_m \in \mathfrak{M}_{\omega_m}$. Согласно (32) и полной непрерывности оператора $\mathfrak{A}_m - \mathfrak{B}: \mathfrak{M}_{\omega_m} \to \mathfrak{M}_{\omega_m}$, где $\mathfrak{B}$ — единичный элемент пространства $[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$, уравнение (35) при достаточно больших m имеет единственное решение $x_m \in \mathfrak{M}_{\omega_m}$ для каждого $f_m \in \mathfrak{M}_{\omega_m}$, причем справедливо неравенство

$$\| x_m \|_{\mathfrak{M}} \leqslant d \| f_m \|_{\mathfrak{M}}, \tag{36}$$

где постоянная d не зависит от m.

Покажем, что уравнение

$$(\mathfrak{A}x)(n) = f(n), \quad n \in Z, \tag{37}$$

имеет решение $x \in \mathfrak{M}$ для каждого $f \in \mathfrak{M}$. Пусть $\{f_m(n)\}_{m \geqslant 1}$ — такая последовательность, что $f_m \in \mathfrak{M}_{\omega_m}$, $\| f_m \|_{\mathfrak{M}} \leqslant \| f \|_{\mathfrak{M}}$ и

$$\lim_{m\to\infty} \| f(n) - f_m(n) \|_E = 0 \quad \forall n \in Z, \tag{38}$$

и пусть x_m — решение уравнения (35).

Тогда согласно (36) последовательность $\{x_m\}_{m \geqslant m_0}$, где m_0 — достаточно большое число, ограничена. В силу полной непрерывности операторов $A(n) \in [E, E]$, $n \in Z$, тождеств $x_m(n) - A(\beta_m(n-1))\, x_m(n-1) \equiv f_m(n)$, $m \geqslant m_0$, и соотношения (38) можно считать, не ограничивая общности доказательства, что

$$\lim_{m\to+\infty} \| x_m(n) - \tilde{x}(n) \|_E = 0 \quad \forall n \in Z, \tag{39}$$

где $\tilde{x}(n)$ — некоторая функция из $\mathfrak{M}$.

Из очевидного неравенства

$$\| (\mathfrak{A}\tilde{x})(n) - f(n) \|_E \leqslant \| (\tilde{x}(n) - x_m(n)) + A(n-1)(\tilde{x}(n-1) - x_m(n-1)) \|_E + \| A(n-1)\, x_m(n-1) - A(\beta_m(n-1))\, x_m(n-1) \|_E + \| f_m(n) - f(n) \|_E, \quad m \geqslant m_0, \ n \in Z,$$

соотношений (31), (38) и (39) следует, что $(\mathfrak{A}\tilde{x})(n) = f(n)\ \forall n \in Z$, т. е. $\tilde{x}(x)$ является решением уравнения (37).

Таким образом, $\{\mathfrak{A}x : x \in \mathfrak{M}\} = \mathfrak{M}$. Из третьего условия теоремы и теоремы Банаха об обратном операторе следует, что оператор $\mathfrak{A}$ имеет непрерывный обратный $\mathfrak{A}^{-1}$. Тогда уравнение (2) согласно теореме 1 э-дихотомично.

З а м е ч а н и е 2. Условия 3) теоремы 2 в случае не почти-периодической функции $A(n)$ недостаточно для э-дихотомичности уравнения (2). Это подтверждается примером уравнения

$$x(n) - 2^{\operatorname{sign}(n-1)} x(n-1) = 0, \quad n \in Z.$$

1. *Coffman S. V., Schäffer J. J.* Dichotomies for linear difference equations.— Math. Ann., 1967, 172, p. 139—166.
2. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1970.—534 с.
3. *Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С.* Нелинейные почти-периодические колебания.— М. : Наука, 1970.—351 с.
4. *Массера X. Л., Шеффер X. X.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства.— М. : Мир, 1970.—456 с.
5. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Мир, 1970.—720 с.
6. *Колесов Ю. С.* Необходимые и достаточные условия экспоненциальной дихотомии решений линейных почти-периодических уравнений с последействием.— Вестн. Яросл. ун-та, 1973, вып. 5, с. 28—62.
7. *Курбатов В. Г.* О дихотомии решений уравнений нейтрального типа.— В кн. : Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1977, с. 158—166.

8. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве.—М. : Наука, 1971.— 104 с.
9. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М. : Наука, 1968.—496 с.

Украинский институт
инженеров водного хозяйства

Поступила в редакцию
11.05. 1981 г.