УДК 517.919

Т. К. Мейлиев

О построении асимптотического решения системы линейных дифференциальных уравнений третьего порядка с малым параметром

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon^h \frac{d^3x}{dt^3} = A(t, \varepsilon)\, x + f(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-\frac{h}{3}} \theta(t)\right), \tag{1}$$

где x, $f(t, \varepsilon)$— n-мерные векторы; $\theta(t)$— скалярная функция; A, (t, ε)— действительная квадратная матрица порядка n; $h > 0$ — любое целое число.

Предполагается, что $A(t, \varepsilon)$ и $f(t, \varepsilon)$ допускают разложение

$$A(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(t), \qquad f(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s f_s(t), \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый действительный параметр.

Система линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных первого и второго порядка изучались многими авторами (библиографию см., напр., в [1, 2]). Система (1) исследуется впервые.

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\det[A_0(t) - \lambda E] = 0, \tag{3}$$

где E — единичная матрица. Будем предполагать, что корни $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, ..., $\lambda_n(t)$ этого уравнения простые, т. е.

$$\lambda_i(t) = \lambda_j(t), \quad \forall t \in [0; L], \text{ если } i \neq j; \quad i, j = \overline{1, n}, \tag{4}$$

и

$$\lambda_j(t) \neq 0, \quad \forall t \in [0; L], \quad j = \overline{1, n}. \tag{5}$$

С помощью подстановки $\mu = \sqrt[3]{\varepsilon}$ уравнение (1) приводим к виду

$$\mu^{3h} \frac{d^3x}{dt^3} = A(t, \mu^3)\, x + f(t, \mu^3) \exp(\mu^{-h} \theta(t)). \tag{6}$$

Как и в [1], будем рассматривать два случая: 1) нерезонансный, когда функция $k^3(t)$ ($k(t) = d\theta(t)/dt > 0$) не равна корню уравнения (2) при всех $t \in [0; L]$; 2) резонансный, когда функция $k^3(t)$ при $\forall t \in [0; L]$ равна одному из корней уравнения (3), например,

$$k^3(t) = \lambda_1(t). \tag{7}$$

Построим формальные в смысле [3] частные решения системы (1). Формальным частным решением системы (1), следуя работе [4], будем называть решение, соответствующее определенному корню характеристического уравнения (3).

По предположению корни характеристического уравнения (3) будут простыми согласно работе [5], для матрицы $A_0(t)$ можно указать неособенную неограниченно дифференцируемую матрицу $T(t)$ такую, что

$$T^{-1}(t)\, A_0(t)\, T(t) = \Lambda(t), \tag{8}$$

где

$$\Lambda(t) = \operatorname{diag}[\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t)]. \tag{9}$$

В резонансном случае справедлива теорема.

Теорема 1. *Если матрица $A(t, \mu^3)$, вектор $f(t, \mu^3)$ и функция $k(t)$ неограниченно дифференцируемы по t на отрезке $[0; L]$, элемент $b_{11}(t)$ матрицы $B(t) = T^{-1}(t)\, A_1(t)\, T(t)$ не равен нулю на отрезке $[0; L]$, $f_0(t) \equiv 0$, $\forall t \in [0; L]$ и выполняются условия (7), то система дифференциальных* *уравнений (6) имеет формальное решение вида*

$$x(t, \varepsilon) = u(t, \mu) \exp(\mu^{-h} \theta(t)), \tag{10}$$

где n-мерный вектор $u(t, \mu)$ *представим формальным степенным рядом вида*

$$u(t, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s u_s(t). \tag{11}$$

Доказательство. Для построения решения $x(t, \varepsilon)$ надо определить коэффициенты $u_s(t)$, $s = 0, 1, \ldots,$ ряда (11). Пусть решение (10) есть формальное решение системы (6). Тогда, подставив вектор (10) и его производную третьего порядка в систему (6), получим тождество, из которого, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра μ, получаем бесконечную алгебраическую систему уравнений

$$[A_0(t) - k^3(t) E] u_s(t) = 0, \quad s = 0, 1, 2, \tag{12}$$

$$[A_0(t) - k^3(t) E] u_s(t) = F_s(t), \quad s = 3, 4, \ldots, \tag{13}$$

где

$$F_s(t) = -\left[1 - \left\{\frac{s}{3}\right\}\right] f_{\left[\frac{s}{3}\right]}(t) - \sum_{r=1}^{[s/3]} A_r(t) u_{s-3r}(t) + u'''_{s-3h}(t) + 3k(t) u''_{s-2h}(t) +$$

$$+ 3k^2(t) u'_{s-h}(t) + 3k'(t) u'_{s-2h}(t) + 3k(t) k'(t) u_{s-h}(t) + k''(t) u_{s-2h}(t), \tag{14}$$

$[1 - \{s/3\}]$ — целая часть числа $1 - \{s/3\}$, а $\{s/3\}$ — дробная часть числа $s/3$.

Используя (7) и (8), перепишем уравнение (12) в виде

$$[\Lambda[t] - \Lambda_1(t) E] q_s(t) = 0, \quad s = 0, 1, 2, \tag{15}$$

где

$$q_s(t) = T^{-1}(t) u_s(t), \quad s = 0, 1, 2. \tag{16}$$

Согласно выражению (9) уравнение (16) распадается на n уравнений вида

$$[\lambda_j(t) - \lambda_1(t)] q_{sj} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \quad s = 0, 1, 2. \tag{17}$$

Отсюда в силу выражения (7) находим

$$q_{sj}(t) \equiv 0, \quad j = 2, 3, \ldots, n; \quad s = 0, 1, 2. \tag{18}$$

Компоненты $q_{s1}(t)$ векторов $q_s(t)$, $s = 0, 1, 2$, пока не определены. Их можно найти из (13) соответственно при $s = 3$, $s = 4$ и $s = 5$. Действительно, из (13) при $s = 3$, учитывая (7) и (8), имеем

$$[\Lambda(t) - \Lambda_1(t) E] q_s(t) = \widetilde{f}_1(t) - B(t) q_0(t), \tag{19}$$

где

$$q_3(t) = T^{-1}(t) u_3(t), \quad \widetilde{f}_1(t) = -T^{-1}(t) f_1(t), \quad B(t) = T^{-1}(t) A_1(t) T(t). \tag{20}$$

Тогда, переходя в уравнении (19) к координатной форме, находим

$$q_{01}(t) = \widetilde{f}_{11}(t)/b_{11}(t). \tag{21}$$

При $s = 4$ из (13) получаем уравнение, из которого определяется первая компонента вектора $q_1(t)$ и т. д. По методу математической индукции можно доказать, что путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях μ можно найти любой член формального ряда [11].

Зная $q_s(t)$, из (16) и (20) находим вектор

$$u_s(t) = T(t) q_s(t), \quad s = 0, 1, 2, \ldots. \tag{22}$$

Теорема доказана.

Для нерезонансного случая

$$\lambda_j(t) \neq k^3(t), \quad \forall t \in [0; L], \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{23}$$

Теорема 2. *Если матрица $A(t, \mu^3)$, вектор $f(t, \mu^3)$ и функция $k(t)$ неограниченно дифференцируемы по t на отрезке $[0; L]$, то система дифференциальных уравнений (6) имеет формальное решение вида*

$$x(t, \varepsilon) = v(t, \mu) \exp(\mu^{-h} \theta(t)), \tag{24}$$

где n-мерный вектор $v(t, \mu)$ представим формальным степенным рядом

$$v(t, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s v_s(t). \tag{25}$$

Доказательство. Пусть вектор (24) — формальное решение системы (6). Тогда, подставляя его в систему (6), получаем тождество. Приравнивая в этом тождестве коэффициенты при одинаковых степенях параметра μ, приходим к бесконечной алгебраической системе уравнений

$$[A_0(t) - k^3(t) E] v_s(t) = \varphi_s(t), \tag{26}$$

где

$$\varphi_s(t) = -[1 - \{s/3\}] f_{[s/3]}(t) - \sum_{r=1}^{[s/3]} A_r(t) v_{s-3r}(t) + v'''_{s-3h}(t) +$$
$$+ 3k(t) v''_{s-2h}(t) + 3k^2(t) v'_{s-h}(t) + 3k'(t) v'_{s-2h}(t) +$$
$$+ 3k(t) k'(t) v_{s-h}(t) + k''(t) v_{s-2h}(t), \quad s = 0, 1, 2, \ldots .$$

В силу условия (23) для любого $t \in [0; L]$ $\det[A_0(t) - k^3(t) E] \neq 0$. Поэтому из (26) находим $v_s(t) = [A_0(t) - k^3(t) E]^{-1} \varphi_s(t)$, $s = 0, 1, \ldots$. Теорема доказана.

Методом, приведенным в работе [1], можно доказать, что формальные решения как в резонансном, так и в нерезонансном случаях обладают асимптотическим свойством в смысле [6].

1. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николаенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1966.— 251 с.
2. *Мейлиев Т. К.* Асимптотические методы в теории линейных систем дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих малый параметр: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1980.— 15 с.
3. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Изд-во иностр. лит., 1958.— 475 с.
4. *Шкиль Н. И.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами : Автореф. дис.... д-ра физ.-мат. наук.— Киев, 1968.— 23 с.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1967.— 576 с.
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 504 с.

Каршинский филиал Ташкентского института ирригации и механизации сельского хозяйства

Поступила в редакцию 24.03.80; после переработки — 28.12.81