УДК 517.949

Е. В. Мальцева

Применение сингулярных интегральных уравнений к некоторым задачам математической физики

Пусть r, θ — полярная система координат. В области $0<r<1$, $0<\theta<2\pi$ задано уравнение Гельмгольца с условиями смешанного типа на границе $r=1$. Как обычно, искомая функция предполагается ограниченной в начале координат.

Рассмотрим следующую краевую задачу: найти функцию $u(r, \theta)$, удовлетворяющую уравнению

$$\nabla^2 u+\gamma^2 u=0 \tag{1}$$

и граничным условиям

$$\partial u(1, \theta)/\partial r=f(\theta), \quad \text{если } \theta \in \Gamma, \tag{2}$$

$$u(1, \theta)=0, \quad \text{если } \theta \in[0, 2\pi] \setminus \Gamma,$$

где $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$; $\quad \gamma=\sqrt{\omega} e^{i \frac{\pi}{4}}$; $\quad \Gamma: |\theta|<\alpha$;

ω — заданная положительная постоянная; $f(\theta)$ — четная функция.

Задачи такого типа широко используются в приложениях, например в нестационарных задачах теплопроводности со смешанными граничными условиями.

Для решения задачи (1), (2) применяем конечное интегральное преобразование Фурье

$$W u=u_n=\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta,$$

$$W^{-1} u_n=u=\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n e^{in\theta}, \tag{3}$$

доопределяя при этом граничные условия (2), которые запишем в виде

$$\partial u(1, \theta)/\partial r=f_{-}(\theta)+\varphi_{+}(\theta), \text{ где } \varphi_{+}(\theta) \equiv 0, \text{ если } \theta \in \Gamma \tag{4}$$

и неизвестная при $\theta \in[0, 2\pi] \setminus \Gamma$;

$$u(1, \theta)=\varphi_{-}(\theta), \text{ где } \varphi_{-}(\theta) \equiv 0, \text{ если } \theta \in[0, 2\pi] \setminus \Gamma$$

и неизвестная при $\theta \in \Gamma$.

В результате преобразования (3) приходим к дискретной задаче

$$\Phi_{n+}=|n| \Phi_{n-}-T_n \Phi_{n-}-F_{n-}, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{5}$$

где $T_n=\gamma I_{|n|+1}(\gamma)/I_{|n|}(\gamma)$, а от нее с учетом формулы из [1]

$$W^{-1} \Phi_n |n| \Phi_n=\frac{1}{\pi i} \frac{d}{dt} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(t) e^{it} dt}{e^{it}-e^{i\theta}} \tag{6}$$

и того, что $\varphi_{+}(\theta) \equiv 0$, если $\theta \in \Gamma$ приходим к сингулярному интегральному уравнению

$$K \varphi_{-} \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\varphi_{-}(\tau) d\tau}{1-e^{i(\theta-\tau)}}+\frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} t(\theta-\tau) \varphi_{-}(\tau) d\tau=f_{-}(\theta). \tag{7}$$

Уравнение (7) решим приближенно. Для этого используем теорему из работы [2], согласно которой уравнение $K\varphi = f$ имеет единственное решение

$$\varphi = \tilde{\varphi} + [I + \tilde{K}^{-1}(K - \tilde{K})]^{-1}\tilde{K}^{-1}(f - K\varphi),$$

и при этом имеет место оценка погрешности

$$\| \varphi - \tilde{\varphi} \|_{X_0} \leqslant \| \tilde{K}^{-1}(f - K\tilde{\varphi}) \|_{X_0} / (1 - \| \tilde{K}^{-1}(K - \tilde{K}) \|),$$

если выполняются следующие предположения: 1) приближенное уравнение $\tilde{K}\tilde{\varphi} = \tilde{f}$ имеет единственное решение $\tilde{\varphi}$; 2) $f - \tilde{f} \in Y_0$, где Y_0 — линейное подмножество $Y_0 \subset Y$; 3) оператор $K - \tilde{K}$ действует из X в Y_0; 4) на Y_0 определен обратный оператор $\tilde{K}^{-1}$, действующий из Y_0 в X_0; 5) $\| \tilde{K}^{-1} \| \times \| K - \tilde{K} \| < 1$.

В качестве множества X_0 возьмем $L_2[-\pi/2, \pi/2]$ и

$$\tilde{K}\varphi_- \equiv \frac{1}{\pi i} \frac{d}{d\theta} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\varphi_-(\tau)\, d\tau}{1 - e^{i(\theta-\tau)}} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sum_{n=-N}^{N} T_n e^{in(\theta-\tau)} \varphi_-(\tau)\, d\tau, \tag{8}$$

Нетрудно получить оценку для нормы разности $\| K - \tilde{K} \|$. Оценим норму оператора $K - \tilde{K}$. Используя неравенство Буняковского для любой функции φ из X_0, имеем

$$\| (K - \tilde{K})\varphi_- \|^2 = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left| \frac{1}{\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} T_k \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi_-(\tau) e^{ik(\theta-\tau)} d\tau \right|^2 d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sum_{k=N+1}^{\infty} | T_k |^2 \left[\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi_-(\tau)\, d\tau \right]^2 d\theta \leqslant \frac{2a^2}{\pi^2} \sum_{k=N+1}^{\infty} | T_k |^2 \| \varphi_- \|^2.$$

Следовательно,

$$\| K - \tilde{K} \| \leqslant \frac{a}{\pi} \left[2 \sum_{k=N+1}^{\infty} | T_k |^2 \right]^{1/2} \tag{9}$$

Так как $| T_k | = o\left(\frac{1}{k}\right)$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} | T_k |^2$ сходится. Поэтому $\| K - \tilde{K} \| < 1$ при соответствующем выборе N. Найдем теперь точное решение уравнения $\tilde{K}\tilde{\varphi} = f_-(\theta)$.

Подставляя вместо θ его приближенное значение $\sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ik\theta}$ и обращая интеграл типа Коши для разомкнутого контура в классе ограниченных функций [3], получаем

$$\tilde{\varphi}_-(\theta) = m(\theta) - R(\theta) \sum_{k=1}^{N} \frac{T_k}{k} \tilde{\Phi}_{k-} [\beta_k(\theta) - \beta_{-k}(\theta)] -$$

$$- iT_0 \tilde{\Phi}_0 R(\theta) \sum_{k=1}^{N} a_k [\beta_k(\theta) - \beta_{-k}(\theta)], \tag{10}$$

где

$$m(\theta) = \frac{R(\theta)}{\pi i} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\left[\int f_-(\tau)\, d\tau \right] e^{i\tau} d\tau}{R(\tau)(e^{i\tau} - e^{i\theta})}; \qquad \beta_k(\theta) = \sum_{j=0}^{k-1} P_j(\cos\alpha) e^{(k-j-1)i\theta},$$

$$k > 0; \qquad \beta_k(\theta) = \sum_{j=0}^{-k-1} P_j(\cos\alpha)\, e^{(k+j)i\theta},$$

$P_j(\cos\alpha)$ — полиномы Лежандра; $R(\tau) = \sqrt{\tau^2 - 2\tau\cos\alpha + 1}$.

Для определения коэффициентов $\widetilde{\Phi}_{n-}$ воспользуемся формулой

$$\widetilde{\Phi}_{n-} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \widetilde{\varphi}_-(\tau)\, e^{-in\tau} d\tau. \tag{11}$$

Подставляя (10) в (11), приходим к алгебраической системе уравнений

$$\widetilde{\Phi}_{n-} = M_n - \sum_{k=1}^{N} \frac{T_k}{k} \widetilde{\Phi}_{k-} (N_{kn} - N_{-kn}) - iT_0\widetilde{\Phi}_0 -$$

$$- \sum_{k=1}^{N} a_k (N_{kn} - N_{-kn}), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, N,$$

где

$$M_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} m(\theta)\, e^{-in\theta} d\theta; \qquad N_{kn} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{k-1} A_{m-n+1}(\cos\alpha)\, P_{k-m-1}(\cos\alpha),$$

$$k > 0; \qquad N_{kn} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{-k-1} P_{-k-m-1}(\cos\alpha)\, A_{m+n+1}(\cos\alpha), \quad k \leqslant 0; \quad A_0 = 1;$$

$$A_1 = -\cos\alpha; \qquad A_k(\cos\alpha) = P_k(\cos\alpha) - 2\cos\alpha P_{k-1}(\cos\alpha) + P_{k-2}(\cos\alpha),$$
$$k \geqslant 2.$$

Придавая решению (10) вид

$$\widetilde{\varphi}_-(\theta) = \widetilde{K}^{-1} f = \int_{-\alpha}^{\alpha} k(\theta, \tau)\, f(\tau)\, d\tau,$$

можно оценить норму

$$\| \widetilde{K}^{-1} \|^2 \leqslant \iint_{-\alpha}^{\alpha} | k(\theta, \tau) |^2 d\theta d\tau.$$

В силу малости $\| K - \widetilde{K} \|$ даже грубой оценки нормы $\| \widetilde{K}^{-1} \|$ достаточно, чтобы убедиться в справедливости неравенства $\| \widetilde{K}^{-1} \| \| K - \widetilde{K} \| < 1$.

1. *Черский Ю. И.* Сведения периодических задач математической физики к особым уравнениям с ядром Коши.— Докл. АН СССР, 1961, 140, № 1, с. 69—72.
2. *Гахов Ф. Д.*, *Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки.— М. : Наука, 1978.— 295 с.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.— М.: Наука, 1977.— 640 с.

Одесский институт
народного хозяйства

Поступила в редакцию
24.06.82