УДК 519.46

И. И. Качурик

О матричных элементах унитарных неприводимых представлений группы ISO (n)

Существует широкий круг физических задач, решение которых приводит к группе ISO (n) движений евклидова пространства E_n. Поэтому возникает существенная необходимость разработки соответствующего расчетного математического аппарата этой группы. Сюда относится прежде всего задача отыскания матричных элементов неприводимых унитарных представлений группы ISO (n). Для представлений класса 1 они были впервые получены в работе [1] (см. также [2]). На основании результатов работы [3] в [4] были вычислены в явном виде матричные элементы произвольного класса s неприводимых представлений группы ISO (n), как унитарных, так и неунитарных. Но ввиду громоздкости найденное для них выражение не всегда приемлемо для использования. В работе [5] была получена довольно компактная формула для матричных элементов неприводимых унитарных представлений группы ISO (n), выражающая их через бесконечную сумму функций Бесселя «n-го порядка» $J_k^{[n]}(z) \overset{\mathrm{df}}{=} z^{1-n/2} J_{k-1+n/2}(z)$ и коэффициентов Клебша—Гордана группы SO (n).

Однако несмотря на компактность, наличие бесконечной суммы явно затрудняет применение этой формулы. Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы на основе последних достижений теории представлений групп [6] получить для таких матричных элементов формулу, выражающую их через конечную сумму функций Бесселя и коэффициентов Клебша—Гордана группы SO (n).

Группа ISO (n) изоморфна группе матриц $(n+1)$-го порядка $g(\vec{t}, h) = \begin{pmatrix} h & \vec{t} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}$, где $h \in$ SO (n), а $\vec{t}$ — вектор-столбец из E_n, $\vec{0}$ — строка с n нулевыми элементами. Она является полупрямым произведением группы SO (n) и группы T_n сдвигов E_n: ISO $(n) =$ SO $(n) * T_n$. Теория унитарных представлений групп движений типа ISO (n) разработана в [7]. Она базируется на методе индуцирования. Применительно к ISO (n) он хорошо описан в [6], гл. II (см. также [4]). Согласно этому методу неприводимое унитарное представление группы ISO (n) характеризуется вещественным числом ρ и $[(n-1)/2]$ дискретными числами $[m_{n-1}] = (m_{1n-1}, m_{2n-1}, \ldots, m_{[(n-1)/2]\, n-1})$, задающими старший вес группы SO $(n-1)$ (все они целые или полуцелые). Обозначим это представление $\pi^{([m_{n-1}]; \rho)}$. Оно содержит неприводимые представления группы SO (n) с единичными кратностями (подробнее см. в [6]).

Пусть D — конечномерное неприводимое унитарное представление группы ISO (n). Оно тривиально на T_n. Это означает, что D — фактически неприводимое представление $D^{[M_n]}$ группы SO (n). Рассмотрим тензорное произведение $\pi^{([0];\rho} \otimes D^{[M_n]}$. Оно разлагается в прямую сумму неприводимых представлений. Согласно теореме II. 2 из [6]

$$\pi^{([0];\rho)} \otimes D^{[M_n]} = \sum_{[q_{n-1}]} \oplus \mathfrak{M}_{[q_{n-1}]} \pi^{([q_{n-1}];\rho)} \qquad (1)$$

Здесь $\mathfrak{M}_{[q_{n-1}]}$ — кратности представлений $\pi^{([q_{n-1}];\rho)}$ в тензорном произведении $\pi^{([0];\rho)} \otimes D^{[M_n]}$. Они определяются из разложения тензорного произведения представлений $D^{[0]}$ и $D^{[M_n]}|_{SO(n-1)}$ группы SO $(n-1)$, где $D^{[M_n]} \mid SO(n-1)$ — сужение представления $D^{[M_n]}$ на SO $(n-1)$. В силу полной приводимости унитарных представлений группы SO (n) это сужение разлагается в прямую сумму неприводимых унитарных представлений $D^{[m_{n-1}]}$ подгруппы SO $(n-1)$ с единичными кратностями

$$D^{[M_n]}|_{SO(n-1)} = \sum \oplus D^{[m_{n-1}]}, \qquad (2)$$

где суммирование ведется по старшим весам $[m_{n-1}]$ неприводимых унитарных представлений $D^{[m_{n-1}]}$. Поэтому

$$D^{[0]} \otimes D^{[M_n]}|_{SO(n-1)} = \sum_{[m_{n-1}]} \oplus (D^{[0]} \otimes D^{[m_{n-1}]}) = \sum_{[m_{n-1}]} \oplus D^{[m_{n-1}]}. \qquad (3)$$

Следовательно, формула (1) имеет вид

$$\pi^{([0];\rho)} \otimes D^{[M_n]} = \sum_{[m_{n-1}]} \oplus \pi^{([m_{n-1}];\rho)}. \qquad (4)$$

В пространстве представления $\pi^{[(m_{n-1}];\rho)}$ выберем ортонормированный базис, состоящий из базисов Гельфанда — Цетлина подпространств неприводимых представлений подгруппы SO (n). Базисные элементы обозначим $\left|\begin{matrix}([m_{n-1}]; \rho \\ \alpha\end{matrix}\right\rangle$, где α — известные схемы Гельфанда—Цетлина, состоящие из строк $[m_k] = (m_{1k}, m_{2k}, \ldots)$, $k = n, n-1, \ldots, 2$. Для представления $\pi^{([0];\rho)}$ строки $[m_k]$ имеют вид $[m_k] = (m_{1k}, 0, 0, \ldots, 0) \equiv [\dot{m}_k]$. В пространстве представления $D^{[M_n]}$ рассматриваем базис Гельфанда—Цетлина $|A\rangle$, состоящий из строк $[M_k]$, $k = n, n-1, \ldots, 2$.

Пусть $\pi^{([0];\rho)}(g) \otimes D^{[M_n]}(g)$ — матрица представления $\pi^{([0];\rho)} \otimes D^{[M_n]}$ в базисе $\left|\begin{matrix}([0]; \rho) \\ \alpha \quad A\end{matrix}\right\rangle$, $\pi^{([m_{n-1}];\rho)}(g)$ — матрица представления $\pi^{([m_{n-1}];\rho)}$ в базисе $\left|\begin{matrix}([m_{n-1}]; \rho) \\ \tilde{\alpha}\end{matrix}\right\rangle$, а u — матрица перехода от одного базиса к другому. Тогда

$$u\,(\pi^{([0];\rho)}(g) \otimes D^{[M_n]}(g))\,u^{-1} = \sum_{[m_{n-1}]} \oplus \pi^{([m_{n-1}];\rho)}(g). \qquad (5)$$

Это выражение в терминах соответствующих матричных элементов принимает вид

$$d^{([m_{n-1}];\rho)}_{\alpha'\tilde{\alpha}'}(g) = \sum_{\substack{\alpha,\tilde{\alpha} \\ A,\tilde{A}}} \left\langle \begin{matrix}([m_{n-1}]; \rho \\ \alpha'\end{matrix} \middle| \begin{matrix}([0]; \rho) \\ \alpha \quad A\end{matrix} \right\rangle d^{([0;\rho)}_{\alpha\tilde{\alpha}}(g) \times$$

$$\times D^{[M_n]}_{A\tilde{A}}(g) \left\langle \begin{matrix}([0]; \rho) \\ \tilde{\alpha} \quad \tilde{A}\end{matrix} \middle| \begin{matrix}([m_{n-1}]; \rho) \\ \tilde{\alpha}'\end{matrix} \right\rangle, \qquad (6)$$

где $\langle I \rangle$ — коэффициенты Клебша—Гордана группы ISO (n) в SO (n)-базисе. Как видим, матрица U состоит из коэффициентов Клебша—Гордана.

Формула (6) устанавливает связь между матричными элементами и коэффициентами Клебша—Гордана.

Мы желаем получить выражение для матричных элементов группы ISO (n) для $g = g_{t_n} = (\vec{t}, e)$, где $\vec{t} = (0, 0, \dots, t_n)$. Учитывая, что $D^{[M_n]}_{A\tilde{A}}(t_n) = \delta_{A\tilde{A}}$, из (6) находим

$$d^{([m_{n-1}];\rho)}_{\alpha'\tilde{\alpha}'}(t_n) = \sum_{\substack{\alpha\tilde{\alpha}\\A}} \left\langle \begin{matrix}([m_{n-1}];\rho)\\ \alpha'\end{matrix} \middle| \begin{matrix}([0];\rho)\\ \alpha \quad A\end{matrix} \right\rangle d^{([0];\rho)}_{\alpha\tilde{\alpha}}(t_n) \left\langle \begin{matrix}([0];\ \rho)\\ \tilde{\alpha} \quad\ A\end{matrix} \middle| \begin{matrix}([m_{n-1}];\ \rho)\\ \tilde{\alpha}'\end{matrix} \right\rangle. \quad (7)$$

Матричные элементы $d^{([m_{n-1}];\rho)}_{\alpha'\tilde{\alpha}'}(g)$ для $g = g_{t_n}$ не равны нулю лишь тогда, когда в схемах α' и $\tilde{\alpha}'$ все строки, кроме первой, совпадают. Матричные элементы $d^{([m_{n-1}];\rho)}_{\alpha'\tilde{\alpha}'}(t_n)$ зависят только от $[m_{n-1}]$, ρ и первых двух строк в схемах α' и $\tilde{\alpha}'$. Обозначим эти строки через $[m'_n]$ и $[\tilde{m}'_n]$ соответственно. Через $[m'_{n-1}]$ обозначим вторую строку в α' и $\tilde{\alpha}'$. Тогда

$$d^{([m_{n-1}];\rho)}_{\alpha'\tilde{\alpha}'}(t_n) = d^{([m_{n-1}];\rho)}_{[m'_n][\tilde{m}'_n][m'_{n-1}]}(t_n). \quad (8)$$

Если принять во внимание сказанное выше и учесть свойство ортогональности коэффициентов Клебша—Гордана подгруппы SO $(n-1)$, то из (7) для $d^{([m_{n-1}];\rho)}_{[m'_n][\tilde{m}'_n][m'_{n-1}]}(t_n)$ получаем выражение

$$d^{([m_{n-1}];\rho)}_{[m'_n][\tilde{m}'_n][m'_{n-1}]}(t_n) = \sum_{\substack{[\dot{m}_n],[\tilde{\dot{m}}_n],[\dot{m}''_{n-1}]\\ [M_{n-1}]}} \sum_{r} \left\langle \begin{matrix}([m_{n-1}];\ \rho)\\ [m'_n]\\ [m'_{n-1}]\end{matrix} \middle| \begin{matrix}([0];\ \rho)\\ [\dot{m}_n] \quad [M_n]\\ [\dot{m}''_{n-1}]\ [M_{n-1}]\end{matrix} \right\rangle_r \times$$

$$\times\, d^{([0];\rho)}_{[\dot{m}_n][\tilde{\dot{m}}_n][\dot{m}''_{n-1}]}(t_n) \left\langle \begin{matrix}([0];\ \rho)\\ [\tilde{\dot{m}}_n]\ [M_n]\\ [\dot{m}''_{n-1}]\ [M_{n-1}]\end{matrix} \middle| \begin{matrix}([m_{n-1}];\ \rho)\\ [\tilde{m}'_n]\\ [m'_{n-1}]\end{matrix} \right\rangle_r, \quad (9)$$

где r разделяет кратные представления $D^{[m_{n-1}]}$ в тензорном произведении $D^{[\dot{m}''_{n-1}]} \otimes D^{[M_{n-1}]}$ представлений группы SO $(n-1)$, а $[\dot{m}_n] = (m_n, 0, \dots, 0)$, $[\tilde{\dot{m}}] = (\tilde{m}_n, 0, \dots, 0)$, $[\dot{m}''_{n-1}] = (m'_{n-1}, 0, \dots, 0)$.

Величины $\langle I \rangle$ являются SO $(n-1)$-скалярными факторами коэффициентов Клебша—Гордана группы ISO (n) подробнее о скалярных факторах и их связи с коэффициентами Клебша—Гордана тензорного произведения представлений групп см. в [6], гл. 3, § 6. Согласно формуле (II.22) в [6] они могут быть представлены в виде суммы произведений SO $(n-1)$-скалярных факторов коэффициентов Клебша—Гордана группы SO (n)

$$\left\langle \begin{matrix}([m_{n-1}];\ \rho)\\ [m'_n]\\ [m'_{n-1}]\end{matrix} \middle| \begin{matrix}([0];\ \rho)\\ [\dot{m}_n] \quad [M_n]\\ [\dot{m}''_{n-1}]\ [M_{n-1}]\end{matrix} \right\rangle_r = \left[\frac{(\dim[\dot{m}_n])(\dim[m_{n-1}])}{\dim[m'_n]}\right]^{1/2} \times$$

$$\times \sum_k \left\langle \begin{matrix}[m'_n]\\ [m''_{n-1}]\end{matrix} \middle| \begin{matrix}[\dot{m}_n] \quad [M_n]\\ [\dot{m}''_{n-1}]\ [M_{n-1}]\end{matrix} \right\rangle^k_r \left\langle \begin{matrix}[\dot{m}_n]\ [M_n]\\ [0] \quad [m_{n-1}]\end{matrix} \middle| \begin{matrix}[m'_n]\\ [m_{n-1}]\end{matrix} \right\rangle^k, \quad (10)$$

где k разделяет кратные представления $D^{[m'_n]}$ в тензорном произведении $D^{[\dot{m}_n]} \otimes D^{[M_n]}$. Поэтому выражение (9) можно записать в виде

$$d^{([m_{n-1}];\rho)}_{[m'_n][\tilde{m}'_n][m'_{n-1}]}(t_n) = (\dim[m_{n-1}]) \left[\frac{(\dim[\dot{m}_n])(\dim[\dot{\tilde{m}}_n])}{(\dim[m'_n])(\dim[\tilde{m}'_n])}\right]^{1/2} \times$$

$$\times \sum_{[\dot{m}],[\dot{\tilde{m}}_n],[\dot{m}''_{n-1}]} \sum_{k,r,k'} \left\langle \begin{matrix}[m'_n]\\ [m'_{n-1}]\end{matrix} \middle| \begin{matrix}[\dot{m}_n] & [M_n]\\ [\dot{m}'_{n-1}] & [M_{n-1}]\end{matrix}\right\rangle^k_r \left\langle \begin{matrix}[\dot{m}_n] & [M_n]\\ [0] & [m_{n-1}]\end{matrix} \middle| \begin{matrix}[m'_n]\\ [m_{n-1}]\end{matrix}\right\rangle^k \times$$

$$\times d^{([0];\rho)}_{[\dot{m}_n][\dot{\tilde{m}}_n][\dot{m}''_{n-1}]}(t_n) \left\langle \begin{matrix}[\tilde{m}'_n]\\ [m_{n-1}]\end{matrix}\middle| \begin{matrix}[\dot{\tilde{m}}_n] & [M_n]\\ [0] & [m_{n-1}]\end{matrix}\right\rangle^{k'} \left\langle\begin{matrix}[\dot{\tilde{m}}_n] & [M_n]\\ [\dot{m}''_{n-1}] & [M_{n-1}]\end{matrix}\middle|\begin{matrix}[\tilde{m}'_n]\\ [m'_{n-1}]\end{matrix}\right\rangle^{k'}_r . \quad (11)$$

Входящие в (11) функции $d^{([0];\rho)}_{[\dot{m}_n][\dot{\tilde{m}}_n][\dot{m}''_{n-1}]}(t_n)$ представляют собой матричные элементы неприводимых унитарных представлений класса 1 группы ISO (n).

В явном виде они были получены в [1, 4]. В [1] показано, что такие матричные элементы, сводятся в частных случаях к функциям Бесселя, а в общем случае являются конечными линейными комбинациями бесселевых функций. В [4] они представлены в виде конечной суммы конфлюэнтных гипергеометрических функций ${}_1F_1$ аргумента $2i\rho t_n$.

Таким образом, матричные элементы произвольного класса неприводимых унитарных представлений группы ISO (n) представимы согласно формуле (11) в виде конечной линейной комбинации функций Бесселя (или ${}_1F_1$) с коэффициентами, выражающимися через произведения SO $(n-1)$-скалярных факторов группы SO (n).

1. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции, связанные с представлениями класса I групп движений пространств постоянной кривизны.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1963, 12, с. 185—257.
2. *Розенблюм Л. В.*, *Розенблюм А. В.* О матричных элементах неприводимых унитарных представлений групп М (n) движений n-мерного евклидова пространства.— Успехи мат. наук, 1974, 29, № 4, с. 179—180.
3. *Kachurik I. I.*, *Klimyk A. U.* Representation matrix elements for the groups SO (f) and $SO_0(f,\ 1)$.— Kiev, 1979.— 42 p.
4. *Качурик И. И.*, *Климык А. У.* Матричные элементы представлений группы ISO(n).—Докл. АН УССР. Сер. А, 1981, № 5, с. 8—11.
5. *Wong M. K.*, *Yeh Hsin Yang.* Eplicit evalution of the representation functions of ISO (n). J. Math. Phys., 1980, 2, N 1, p. 1—5.
6. *Климык А. У.* Матричные элементы и коэффициенты Клебша—Гордана представлений групп.— Киев : Наук. думка, 1979.— 304 с.
7. *Mackey G. W.* Induced representations of locally compact groups, I.— Ann. Math., 1952, 55, N 1, p. 101—139.

Хмельницкий технологический институт
бытового обслуживания

Поступила в редакцию
15.06.81