УДК 517.5

Р. В. Хаць (Дрогобиц. держ. пед. ун-т, Ін-т фізики, математики та інформатики)

РЕГУЛЯРНІСТЬ ЗРОСТАННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ФУР'Є ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ПОКРАЩЕНОГО РЕГУЛЯРНОГО ЗРОСТАННЯ

We establish a criterion for the improved regular growth of entire functions of positive order with zeros on a finite system of half-lines in terms of their Fourier coefficients.

Установлен критерий улучшенного регулярного роста целых функций положительного порядка с нулями на конечной системе лучей в терминах их коэффициентов Фурье.

Теорія цілих функцій цілком регулярного зростання в розумінні Левіна – Пфлюгера [1] встановлює зв'язок між регулярністю зростання цілої функції і правильним поводженням послідовності її нулів. Численні дослідження присвячено розвиненню теорії Левіна – Пфлюгера і перенесенню її результатів на інші класи функцій (див. [2, 3]). На даний час відомо досить багато різноманітних умов, які є необхідними і достатніми для цілком регулярного зростання цілих функцій. Зокрема, в [4] встановлено критерій цілком регулярного зростання цілих функцій додатного порядку в термінах їх коефіцієнтів Фур'є.

Теорема A [4]. *Для того щоб ціла функція f порядку $\rho \in (0, +\infty)$ була функцією цілком регулярного зростання, необхідно і достатньо, щоб для всіх $k \in \mathbb{Z}$ існували границі*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_k(r, \log|f|)}{r^\rho} = c_k, \quad c_k(r, \log|f|) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ik\varphi} \log|f(re^{i\varphi})|\, d\varphi.$$

У роботі [5, с. 76] (див. також [8]) отримано аналог теореми A в класі мероморфних функцій скінченного λ-типу цілком регулярного зростання, а в [6] — для класу цілих функцій сильно регулярного зростання нульового порядку з нулями на скінченній системі променів. У статті [7] встановлено критерії цілком регулярного зростання цілих, а в [5, с. 78; 8, 9] — мероморфних функцій додатного порядку в $L^p[0, 2\pi]$-метриці (див. також [10]).

У статтях [11, 12] (див. також [13]) введено поняття цілої функції покращеного регулярного зростання і знайдено критерії для цієї регулярності в термінах розподілу нулів за умови, коли останні розміщені на скінченній системі променів. У роботі [14] це поняття поширено на субгармонічні функції. Ціла функція f називається функцією *покращеного регулярного зростання* [11], якщо для деяких $\rho \in (0, +\infty)$, $\rho_1 \in (0, \rho)$ і 2π-періодичної ρ-тригонометрично опуклої функції $h \not\equiv -\infty$ існує множина $U \subset \mathbb{C}$, яка міститься в об'єднанні кругів із скінченною сумою радіусів така, що

$$\log|f(z)| = |z|^\rho h(\arg z) + o(|z|^{\rho_1}), \quad U \not\ni z \to \infty.$$

Якщо ціла функція f є функцією покращеного регулярного зростання, то [11] вона має порядок ρ і індикатор h.

Нехай f — ціла функція, $f(0) = 1$, (λ_n) — послідовність її нулів, p — найменше ціле невід'ємне число, для якого $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^{-p-1} < +\infty$, $n(r, \psi; f) :=$ $:= \sum_{|\lambda_n|\le r,\, \arg\lambda_n=\psi} 1$ і Q_ρ — коефіцієнт при z^ρ експоненціального множника у зображенні Адамара – Бореля [1, с. 38] цілої функції f порядку $\rho \in (0, +\infty)$.

Теорема Б [11]. *Для того щоб ціла функція f нецілого порядку $\rho \in (0, +\infty)$ з нулями на скінченній системі променів $\{z\colon \arg z = \psi_j\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, $0 \leq \leq \psi_1 < \psi_2 < \ldots < \psi_m < 2\pi$, була функцією покращеного регулярного зростання, необхідно і достатньо, щоб для деякого $\rho_2 \in (0, \rho)$ і кожного $j \in \{1, \ldots, m\}$*

$$n(t, \psi_j; f) = \Delta_j t^\rho + o(t^{\rho_2}), \quad t \to +\infty, \quad \Delta_j \in [0, +\infty). \tag{1}$$

При цьому

$$h(\varphi) = \sum_{j=1}^{m} h_j(\varphi), \tag{2}$$

де $h_j(\varphi)$ — 2π-періодична функція, визначена на проміжку $[\psi_j, \psi_j + 2\pi)$ рівністю $h_j(\varphi) = \dfrac{\pi\Delta_j}{\sin \pi\rho} \cos \rho(\varphi - \psi_j - \pi)$.

Теорема В [12]. *Для того щоб ціла функція f порядку $\rho \in \mathbb{N}$ з нулями на скінченній системі променів $\{z\colon \arg z = \psi_j\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, $0 \leq \psi_1 < \psi_2 < \ldots \ldots < \psi_m < 2\pi$, була функцією покращеного регулярного зростання, необхідно і достатньо, щоб для деякого $\rho_2 \in (0, \rho)$ і кожного $j \in \{1, \ldots, m\}$ виконувалась рівність* (1) *і, крім того, для деяких $\rho_3 \in (0, \rho)$ і $\delta_f \in \mathbb{C}$*

$$\sum_{0 < |\lambda_n| \leq r} \lambda_n^{-\rho} = \delta_f + o(r^{\rho_3 - \rho}), \quad r \to +\infty.$$

При цьому

$$h(\varphi) = \begin{cases} \tau_f \cos(\rho\varphi + \theta_f) + \sum\limits_{j=1}^{m} h_j(\varphi), & \rho = p, \\ Q_\rho \cos \rho\varphi, & \rho = p + 1, \end{cases} \tag{3}$$

де $\tau_f = |\delta_f/\rho + Q_\rho|$, $\theta_f = \arg(\delta_f/\rho + Q_\rho)$ і $h_j(\varphi)$ — 2π-періодична функція, визначена на проміжку $[\psi_j, \psi_j + 2\pi)$ рівністю $h_j(\varphi) = \Delta_j(\pi - \varphi + \psi_j) \sin \rho(\varphi - \psi_j) - - \dfrac{\Delta_j}{\rho} \cos \rho(\varphi - \psi_j)$.

Метою цієї статті є встановлення аналогу вищезгаданих результатів з [4, 6] для класу цілих функцій покращеного регулярного зростання з нулями на скінченній системі променів.

Теорема 1. *Для того щоб ціла функція f порядку $\rho \in (0, +\infty)$ з нулями на скінченній системі променів $\{z\colon \arg z = \psi_j\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, $0 \leq \psi_1 < \psi_2 < \ldots \ldots < \psi_m < 2\pi$, була функцією покращеного регулярного зростання, необхідно і достатньо, щоб для деяких $\rho_4 \in (0, \rho)$, $k_0 \in \mathbb{Z}$ і кожного $k \in \{k_0, k_0 + 1, \ldots, k_0 + + m - 1\}$*

$$c_k(r, \log |f|) = c_k r^\rho + o(r^{\rho_4}), \quad r \to +\infty. \tag{4}$$

Для доведення теореми 1 потрібні наступні допоміжні твердження.

Лема 1 [11]. *Нехай $\rho \in (0, +\infty)$, $\rho_1 \in (0, \rho)$ і f — ціла функція покращеного регулярного зростання. Тоді існує така послідовність (r_s), що $0 < r_s \uparrow +\infty$, $r_{s+1}^\rho - r_s^\rho = o(r_s^{\rho_1})$ і $\log |f(r_s e^{i\varphi})| = r_s^\rho h(\varphi) + o(r_s^{\rho_1})$, $s \to +\infty$, рівномірно по $\varphi \in [0, 2\pi]$.*

Лема 2 [15]. *Нехай f — ціла функція порядку $\rho \in (0,+\infty)$ з індикатором $h(\varphi)$. Тоді, якщо існує послідовність (r_s) з леми* 1, *то існує таке $\rho_4 \in (0,\rho)$, що для кожного $k \in \mathbb{Z}$ виконується* (4).

Нехай [5, с. 104]

$$n_k(r,f) := \sum_{|\lambda_n|\le r} e^{-ik\arg\lambda_n}, \quad N_k(r,f) := \int_0^r \frac{n_k(t,f)}{t}\,dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Відомо [5, с. 107], що

$$N_k(r,f) = c_k(r,\log|f|) - k^2 \int_0^r \frac{dt}{t} \int_0^t \frac{c_k(u,\log|f|)}{u}\,du, \quad k\in\mathbb{Z}, \quad r>0. \tag{5}$$

Лема 3. *Нехай f — ціла функція покращеного регулярного зростання порядку $\rho \in (0,+\infty)$. Тоді для деякого $\rho_4 \in (0,\rho)$ і кожного $k \in \mathbb{Z}$ виконується* (4) *та*

$$N_k(r,f) = c_k(1-k^2/\rho^2)r^\rho + o(r^{\rho_4}), \quad r\to+\infty. \tag{6}$$

Доведення. Справді, (4) безпосередньо випливає з лем 1 і 2. Доведемо (6). Якщо виконується (4), то на основі (5) при $r\to+\infty$ отримуємо

$$N_k(r,f) = c_k r^\rho + o(r^{\rho_4}) - k^2 \int_0^r \frac{dt}{t} \int_0^t (c_k u^{\rho-1} + o(u^{\rho_4-1}))\,du = c_k(1-k^2/\rho^2)r^\rho + o(r^{\rho_4}).$$

Лему 3 доведено.

З леми 3, як наслідок, випливає наступна лема.

Лема 4. *Якщо f — ціла функція покращеного регулярного зростання порядку $\rho \in (0,+\infty)$ з нулями на скінченній системі променів $\{z : \arg z = \psi_j\}$, $j \in \{1,\ldots,m\}$, $0 \le \psi_1 < \psi_2 < \ldots < \psi_m < 2\pi$, то для деякого $\rho_4 \in (0,\rho)$ і кожного $k \in \mathbb{Z}$ виконуються* (4) *та* (6), *де*

$$c_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi}h(\varphi)\,d\varphi = \frac{\rho}{\rho^2-k^2}\sum_{j=1}^m \Delta_j e^{-ik\psi_j}, \quad \Delta_j \in [0,+\infty), \tag{7}$$

якщо ρ — нецiле число, і для $\rho \in \mathbb{N}$

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{\rho}{\rho^2-k^2}\displaystyle\sum_{j=1}^m \Delta_j e^{-ik\psi_j}, & |k|\ne\rho=p, \\ \dfrac{\tau_f e^{i\theta_f}}{2} - \dfrac{1}{4\rho}\displaystyle\sum_{j=1}^m \Delta_j e^{-i\rho\psi_j}, & k=\rho=p, \\ 0, & |k|\ne\rho=p+1, \\ \dfrac{Q_\rho}{2}, & k=\rho=p+1. \end{cases} \tag{8}$$

Доведення. Справді, на підставі (2) отримуємо

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{m} \frac{\pi \Delta_j}{\sin \pi\rho} \left(\int\limits_{\psi_j}^{\psi_j+2\pi} e^{-ik\varphi} \cos \rho(\varphi - \psi_j - \pi)\, d\varphi \right) =$$

$$= \frac{\rho}{\rho^2 - k^2} \sum_{j=1}^{m} \Delta_j e^{-ik\psi_j}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Аналогічно, з огляду на (3) одержуємо

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-ik\varphi} \tau_f \cos(\rho\varphi + \theta_f)\, d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{m} \left(\int\limits_{\psi_j}^{\psi_j+2\pi} e^{-ik\varphi} \left(\Delta_j (\pi - \varphi + \psi_j) \sin \rho(\varphi - \psi_j) - \frac{\Delta_j}{\rho} \cos \rho(\varphi - \psi_j) \right) d\varphi \right) =$$

$$= \frac{\rho}{\rho^2 - k^2} \sum_{j=1}^{m} \Delta_j e^{-ik\psi_j}, \quad |k| \neq \rho = p,$$

і

$$c_\rho = \frac{\tau_f e^{i\theta_f}}{2} - \frac{1}{4\rho} \sum_{j=1}^{m} \Delta_j e^{-i\rho\psi_j}.$$

Випадок $\rho = p + 1$ розглядається аналогічно.

Лему 4 доведено.

Лема 5. *Нехай* $\rho \in (0, +\infty)$. *Для того щоб для деякого* $\rho_4 \in (0, \rho)$ *і кожного* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *виконувалась рівність*

$$N(r, \psi_j; f) := \int\limits_0^r \frac{n(t, \psi_j; f)}{t}\, dt = \frac{\Delta_j}{\rho} r^\rho + o(r^{\rho_4}), \quad r \to +\infty, \quad \Delta_j \in [0, +\infty), \quad (9)$$

необхідно і достатньо, щоб для деяких $\rho_4 \in (0, \rho)$, $k_0 \in \mathbb{Z}$ *і кожного* $k \in \{k_0, k_0 + 1, \ldots, k_0 + m - 1\}$ *виконувалось* (6) *з* c_k, *визначеними формулами* (7) *і* (8).

Доведення. *Необхідність* випливає з формул $N_k(r, f) = \sum_{j=1}^{m} e^{-ik\psi_j} N(r, \psi_j; f)$. Доведемо *достатність*. Не зменшуючи загальності міркувань, вважаємо, що $k_0 = 0$. Тоді, як і в [5, с. 127; 6], для $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$

$$N_0(r, f) = N(r, \psi_1; f) + N(r, \psi_2; f) + \ldots + N(r, \psi_m; f),$$

$$N_1(r, f) = e^{-i\psi_1} N(r, \psi_1; f) + e^{-i\psi_2} N(r, \psi_2; f) + \ldots + e^{-i\psi_m} N(r, \psi_m; f),$$

. . . .

$$N_{m-1}(r, f) = e^{-i(m-1)\psi_1} N(r, \psi_1; f) + e^{-i(m-1)\psi_2} N(r, \psi_2; f) + \ldots$$

$$\ldots + e^{-i(m-1)\psi_m} N(r, \psi_m; f).$$

Це система лінійних рівнянь відносно невідомих $N(r,\psi_j;f)$, $j\in\{1,\ldots,m\}$. Її визначником є визначник Вандермонда, який відмінний від нуля. Тому функції $N(r,\psi_j;f)$, $j\in\{1,\ldots,m\}$, можна зобразити як лінійні комбінації функцій $N_k(r,f)$, $k\in\{0,1,\ldots,m-1\}$. Розв'язуючи розглядувану систему за правилом Крамера, на основі (6) одержуємо (9).

Лему 5 доведено.

Лема 6 [11, 16]. *Нехай* $\rho\in(0,+\infty)$. *Для того щоб для деякого* $\rho_2\in(0,\rho)$ *і кожного* $j\in\{1,\ldots,m\}$ *виконувалась рівність* (1), *необхідно і достатньо, щоб для деякого* $\rho_4\in(0,\rho)$ *і кожного* $j\in\{1,\ldots,m\}$ *виконувалось* (9).

Зауваження. З лем 4 – 6 і леми 6 з [12] випливають необхідні частини теорем Б і В.

Доведення теореми **1.** *Необхідність* випливає з леми 4, а *достатність* — з лем 4 – 6, леми 6 з [12] та достатніх частин теорем Б і В.

Теорема 1 є непокращуваною в сенсі наступної теореми.

Теорема 2. *Для кожного* $m\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$ *існує така ціла функція* f *нецілого порядку* $\rho\in(0,+\infty)$ *з нулями на скінченній системі променів* $\{z\colon \arg z=\psi_j\}$, $\psi_j:=\dfrac{2\pi(j-1)}{m}$, $j\in\{1,\ldots,m\}$, *що*

$$c_0(r,\log|f|)=\frac{m}{\rho}r^\rho-\frac{m}{\rho^2}\frac{r^\rho}{\log r}+o\left(\frac{r^\rho}{\log r}\right),\quad r\to+\infty,$$

для будь-якого $\rho_4\in(0,\rho)$ *та кожного* $k\in\{1,\ldots,m-1\}$ *виконується* (4) *і* f *не є функцією покращеного регулярного зростання.*

Доведення. Нехай $\rho\in(0,+\infty)$ — неціле число, $\mu_n=\left(n+\dfrac{n}{\log n}\right)^{1/\rho}$, $\{\lambda_n\colon n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}\}:=\bigcup_{j=1}^m\{\mu_n e^{i\frac{2\pi(j-1)}{m}}\colon n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}\}$ і

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda_n}\right)\exp\left(\sum_{\nu=1}^{p}\frac{1}{\nu}\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^\nu\right),\quad p=[\rho].$$

Тоді $\mu_n^\rho=n+\dfrac{n}{\log n}=(1+o(1))n$ і $n=(1+o(1))\mu_n^\rho$ при $n\to+\infty$. Звідси при $n\to+\infty$

$$n=\mu_n^\rho\left(1+\frac{1}{\log n}\right)^{-1}=\mu_n^\rho\left(1+\frac{1}{\log((1+o(1))\mu_n^\rho)}\right)^{-1}=$$

$$=\mu_n^\rho\left(1-\frac{1}{\log((1+o(1))\mu_n^\rho)}+o\left(\frac{1}{\log((1+o(1))\mu_n^\rho)}\right)\right)=$$

$$=\mu_n^\rho\left(1-\frac{1}{\rho\log\mu_n+o(1)}+o\left(\frac{1}{\rho\log\mu_n+o(1)}\right)\right)=\mu_n^\rho-\frac{\mu_n^\rho}{\rho\log\mu_n}+o\left(\frac{\mu_n^\rho}{\log\mu_n}\right).$$

Далі, нехай $\mu_n\le t<\mu_{n+1}$. Тоді $n\left(t,\dfrac{2\pi(j-1)}{m};f\right)=n=\mu_n^\rho-\dfrac{\mu_n^\rho}{\rho\log\mu_n}+$ $+o\left(\dfrac{\mu_n^\rho}{\log\mu_n}\right)\le t^\rho-\dfrac{t^\rho}{\rho\log t}+o\left(\dfrac{t^\rho}{\log t}\right)$, $t\to+\infty$. З іншого боку,

$$n\left(t,\frac{2\pi(j-1)}{m};f\right)=n+1-1=\mu_{n+1}^\rho-\frac{\mu_{n+1}^\rho}{\rho\log\mu_{n+1}}+o\left(\frac{\mu_{n+1}^\rho}{\log\mu_{n+1}}\right)-1\ge$$

$$\geq t^\rho - \frac{t^\rho}{\rho \log t} + o\left(\frac{t^\rho}{\log t}\right), \quad t \to +\infty.$$

Тому $n\left(t, \frac{2\pi(j-1)}{m}; f\right) = t^\rho - \frac{t^\rho}{\rho \log t} + o\left(\frac{t^\rho}{\log t}\right)$ при $t \to +\infty$ для кожного $j \in \in \{1, \ldots, m\}$. Отже, для жодного $\rho_2 \in (0, \rho)$ не виконується (1) і, згідно з теоремами Б і В, ціла функція f не є функцією покращеного регулярного зростання. Крім цього, для кожного $j \in \{1, \ldots, m\}$ отримуємо $N\left(r, \frac{2\pi(j-1)}{m}; f\right) = \frac{r^\rho}{\rho} - \frac{r^\rho}{\rho^2 \log r} + + o\left(\frac{r^\rho}{\log r}\right)$, $r \to +\infty$. Тому $c_0(r, \log|f|) = \sum_{j=1}^m N\left(r, \frac{2\pi(j-1)}{m}; f\right) = \frac{m}{\rho} r^\rho - - \frac{m}{\rho^2} \frac{r^\rho}{\log r} + o\left(\frac{r^\rho}{\log r}\right)$, $r \to +\infty$. Таким чином, (4) для $k = 0$ не виконується. До того ж (див. [15; 13, с. 77])

$$c_k(r, \log|f|) = \frac{1}{2k} \sum_{j=1}^m \sum_{\mu_n \leq r} \left[\left(\frac{r}{\lambda_n}\right)^k - \left(\frac{\overline{\lambda}_n}{r}\right)^k\right] =$$

$$= \frac{1}{2k} \sum_{\mu_n \leq r} \left[\left(\frac{r}{\mu_n}\right)^k - \left(\frac{\mu_n}{r}\right)^k\right] \sum_{j=1}^m e^{-ik\frac{2\pi(j-1)}{m}}, \quad 1 \leq k \leq p,$$

і

$$c_k(r, \log|f|) = -\frac{1}{2k} \sum_{j=1}^m \left\{\sum_{\mu_n > r} \left(\frac{r}{\lambda_n}\right)^k + \sum_{\mu_n \leq r} \left(\frac{\overline{\lambda}_n}{r}\right)^k\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2k} \left\{\sum_{\mu_n > r} \left(\frac{r}{\mu_n}\right)^k + \sum_{\mu_n \leq r} \left(\frac{\mu_n}{r}\right)^k\right\} \sum_{j=1}^m e^{-ik\frac{2\pi(j-1)}{m}}, \quad k \geq p+1.$$

Позаяк

$$\sum_{j=1}^m e^{-ik\frac{2\pi(j-1)}{m}} = \frac{1 - e^{-2\pi ki}}{1 - e^{-i\frac{2\pi k}{m}}} = 0, \quad k \in \{1, \ldots, m-1\},$$

то $c_k(r, \log|f|) = 0$ для кожного $k \in \{1, \ldots, m-1\}$ і всіх $r > 0$. Тому для будь-якого $\rho_4 \in (0, \rho)$ і кожного $k \in \{1, \ldots, m-1\}$ виконується (4).

Теорему 2 доведено.

1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.
2. *Гольдберг А. А.* Б.Я. Левин — создатель теории целых функций вполне регулярного роста // Мат. физика, анализ, геометрия. – 1994. – **1**, № 2. – С. 186 – 192.
3. *Гольдберг А. А., Левин Б. Я., Островский И. В.* Целые и мероморфные функции // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. математики. Фундам. направления. – М.: ВИНИТИ, 1991. – **85**. – С. 5 – 186.
4. *Азарин В. С.* О регулярности роста коэффициентов Фурье логарифма модуля целой функции // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1977. – Вып. 27. – С. 9 – 21.
5. *Кондратюк А. А.* Ряды Фурье и мероморфные функции. – Львов: Вища шк., 1988. – 195 с.
6. *Заболоцький М. В.* Регулярне зростання коефіцієнтів Фур'є логарифму цілої функції нульового порядку // Мат. вісн. НТШ. – 2009. – **6**. – С. 100 – 109.
7. *Калинець Р. З., Кондратюк А. А.* Про регулярність зростання модуля і аргумента цілої функції в $L^p[0, 2\pi]$-метриці // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 7. – С. 889 – 896.

8. *Васильків Я. В.* Асимптотична поведінка логарифмічних похідних та логарифмів мероморфних функцій цілком регулярного зростання в $L^p[0, 2\pi]$-метриці. Ч. 1 // Мат. студ. – 1999. – **12**, № 1. – С. 37 – 58.
9. *Васильків Я. В.* Асимптотична поведінка логарифмічних похідних та логарифмів мероморфних функцій цілком регулярного зростання в $L^p[0, 2\pi]$-метриці. Ч. 2 // Мат. студ. – 1999. – **12**, № 2. – С. 135 – 144.
10. *Боднар О. В., Заболоцький М. В.* Критерії регулярності зростання логарифма модуля та аргументу цілої функції // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 7. – С. 885 – 893.
11. *Винницький Б. В., Хаць Р. В.* Про регулярність зростання цілої функції нецілого порядку з нулями на скінченній системі променів // Мат. студ. – 2005. – **24**, № 1. – С. 31 – 38.
12. *Khats' R. V.* On entire functions of improved regular growth of integer order with zeros on a finite system of rays // Mat. Stud. – 2006. – **26**, № 1. – P. 17 – 24.
13. *Хаць Р. В.* Цілі функції покращеного регулярного зростання: Дис. . . . канд. фіз.-мат. наук. – Дрогобич, 2006. – 125 с.
14. *Гірник М. О.* Субгармонічні функції покращеного регулярного зростання // Доп. НАН України. – 2009. – № 4. – С. 13 – 18.
15. *Хаць Р. В.* Про коефіцієнти Фур'є одного класу цілих функцій // Мат. студ. – 2005. – **23**, № 1. – С. 99 – 102.
16. *Винницький Б. В., Хаць Р. В.* Про асимптотичну поведінку цілих функцій нецілого порядку // Мат. студ. – 2004. – **21**, № 2. – С. 140 – 150.

Одержано 14.03.11