КОРОТКІ ПОВІДОМЛЕННЯ

УДК 517.983

Ю. С. Лінчук (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

ОПЕРАТОРНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ОДНОГО РЕЗУЛЬТАТУ РУБЕЛА

We describe all pairs of linear continuous operators that act in spaces of functions analytic in domains and satisfy a relation that is an operator analog of the Rubel equation.

Описаны все пары линейных непрерывных операторов, действующих в пространствах аналитических в областях функций и удовлетворяющих соотношению, которое является операторным аналогом уравнения Рубела в классе функционалов.

Нехай G — довільна область комплексної площини. Через $\mathcal{H}(G)$ позначимо простір усіх аналітичних в області G функцій, що наділений топологією компактної збіжності, а через $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ — множину всіх лінійних неперервних операторів на просторі $\mathcal{H}(G)$. Л. А. Рубел [1], узагальнюючи формулу для диференціювання добутку двох функцій, поставив і розв'язав задачу про знаходження всіх пар лінійних неперервних функціоналів L та M на просторі $\mathcal{H}(G)$, які задовольняють співвідношення

$$L(fg) = L(f)M(g) + L(g)M(f) \tag{1}$$

для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(G)$. Н. Р. Нандакумар [2] розв'язав задачу Рубела у класі лінійних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G)$. Подальші дослідження щодо опису пар лінійних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G)$, які задовольняють подібні співвідношення, виконано Н. Р. Нандакумаром та П. Каннапаном в [3, 4]. У монографіях [5, 6] систематизовано ці дослідження та їхні узагальнення.

У зв'язку з цими задачами природним чином виникає питання про опис усіх пар лінійних неперервних операторів A та B на просторі $\mathcal{H}(G)$ таких, що

$$(A(fg))(z) = (Af)(z)(Bg)(z) + (Ag)(z)(Bf)(z) \tag{2}$$

для довільних функцій $f(z)$ та $g(z)$ з простору $\mathcal{H}(G)$ при $z \in G$. Для розв'язування цієї задачі нам буде потрібне інтегральне зображення Кете операторів з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ [7]. Для зручності наведемо його.

Нехай G — довільна однозв'язна область комплексної площини, а $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність однозв'язних областей, кожна з яких обмежена замкненою спрямною жордановою кривою, яка апроксимує зсередини область G, тобто $\overline{G_n} \subset G_{n+1}$, $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Через $\mathcal{B}_n$ позначимо банахів простір, що складається з функцій $f(z)$, які неперервні на $\overline{G_n}$ і є аналітичними в G_n, з нормою $\|f\| = \max_{z\in\overline{G_n}} |f(z)|$, $n = 1, 2, \ldots$. Якщо оператор T належить $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, то для довільного натурального числа n існує натуральне число $N(n)$ таке, що оператор T однозначно продовжується до лінійного неперервного оператора, який діє з простору $\mathcal{B}_{N(n)}$ в $\mathcal{B}_n$. Тому функція

$$t(\lambda, z) = (Tf_\lambda)(z), \quad f_\lambda(z) = \frac{1}{\lambda - z}, \quad \lambda \in \complement G, \quad z \in G, \tag{3}$$

© Ю. С. ЛІНЧУК, 2011

є локально аналітичною на множині $\complement G \times G$ в такому сенсі: існує монотонно зростаюча функція $N(n)\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ така, що для кожного натурального n функція $t(\lambda, z)$ є аналітичною на множині $\complement\overline{G_{N(n)}} \times G_n$, при цьому $t(\infty, z) = 0$; крім того, якщо $m > n$, то функція $t(\lambda, z)$, яка визначена на множинах $\complement\overline{G_{N(n)}} \times G_n$ і $\complement\overline{G_{N(m)}} \times G_m$, збігається на їхньому перетині $\complement\overline{G_{N(m)}} \times G_n$. При цьому для $g \in \mathcal{H}(G)$ при $z \in G_n$

$$(Tg)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} t(\lambda, z) g(\lambda) d\lambda, \tag{4}$$

де γ_n — межа області $G_{N(n)+1}$.

Навпаки, якщо функція $t(\lambda, z)$ є локально аналітичною на множині $\complement G \times G$, то вона є аналітичною на множині $\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \complement\overline{G_{N(n)}} \times G_n$ і рівністю (4) визначається оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. Таким чином, формулами (3) та (4) встановлюється взаємно однозначна відповідність між локально аналітичними на множині $\complement G \times G$ функціями $t(\lambda, z)$ і операторами $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. Функцію $t(\lambda, z)$, яка для оператора $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ визначається формулою (3), називають характеристичною за Кете функцією оператора T.

Припустимо, що оператори A та B з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ задовольняють співвідношення (2). Нехай $a(\lambda, z)$ та $b(\lambda, z)$ – характеристичні за Кете функції відповідно операторів A та B. Візьмемо довільне натуральне n, і нехай число $N(n)$ знайдено за означенням локально аналітичних функцій $a(\lambda, z)$ та $b(\lambda, z)$. Тоді ці функції є аналітичними при $\lambda \in \complement\overline{G_{N(n)}}$ та $z \in G_n$. Як зазначалося вище, оператори A та B однозначно продовжуються до лінійних неперервних операторів, які діють з $\mathcal{B}_{N(n)}$ в $\mathcal{B}_n$. Для продовжених операторів зберігатимемо старі позначення. Покладаючи в (2) $f(z) = \dfrac{1}{\lambda - z}$ та $g(z) = \dfrac{1}{\mu - z}$, де $\lambda, \mu \in \complement\overline{G_{N(n)}}$, до того ж $\lambda \neq \mu$, переконуємося, що при $z \in G_n$ виконується рівність

$$\frac{1}{\mu - \lambda}\,(a(\lambda, z) - a(\mu, z)) = a(\lambda, z) b(\mu, z) + a(\mu, z) b(\lambda, z). \tag{5}$$

Зафіксувавши в (5) $z \in G_n$ та $\mu \in \complement\overline{G_{N(n)}}$ і спрямувавши λ до μ, отримаємо

$$a_1'(\mu, z) = -2a(\mu, z) b(\mu, z), \tag{6}$$

де $a_1'(\mu, z) = \dfrac{\partial a}{\partial \mu}(\mu, z)$. З (6) і (5) випливає, що

$$2a(\lambda, z) a(\mu, z)(a(\lambda, z) - a(\mu, z)) = (\lambda - \mu)(a^2(\lambda, z) a_1'(\mu, z) + a^2(\mu, z) a_1'(\lambda, z)) \tag{7}$$

при $z \in G_n$, $\lambda, \mu \in \complement\overline{G_{N(n)}}$, $\lambda \neq \mu$. Замінивши в (7) μ на ν, матимемо

$$2a(\lambda, z) a(\nu, z)(a(\lambda, z) - a(\nu, z)) = (\lambda - \nu)(a^2(\lambda, z) a_1'(\nu, z) + a^2(\nu, z) a_1'(\lambda, z)), \tag{8}$$

$$z \in G_n, \quad \lambda, \nu \in \complement\overline{G_{N(n)}}, \quad \lambda \neq \nu.$$

Виключаючи з рівностей (7) та (8) $a_1'(\lambda, z)$, одержуємо

$$a(\lambda, z)c(\lambda, \mu, \nu, z) = 0 \tag{9}$$

при $z \in G_n$, $\lambda, \mu, \nu \in \complement\overline{G_{N(n)}}$, $\lambda \neq \mu, \lambda \neq \nu$, де $c(\lambda, \mu, \nu, z) = a(\lambda, z)[2(\lambda - \nu)a(\mu, z)a^2(\nu, z) - 2(\lambda - \mu)a(\nu, z)a^2(\mu, z) - (\lambda - \mu)(\lambda - \nu)a^2(\nu, z)a_1'(\mu, z) + (\lambda - \nu)(\lambda - \mu)a^2(\mu, z)a_1'(\nu, z)] - 2(\mu - \nu)a^2(\mu, z)a^2(\nu, z)$.

Зафіксуємо числа μ та ν так, що $\mu \in \complement\overline{G_{N(n)}}$, $\nu \in \complement\overline{G_{N(n)}}$, до того ж $\mu \neq \nu$, і виберемо довільне $\lambda \in \complement\overline{G_{N(n)}}$, для якого $\lambda \neq \mu$, $\lambda \neq \nu$. Тоді з (9) випливає, що для кожної точки $z \in G_n$ або $a(\lambda, z) = 0$, або $c(\lambda, \mu, \nu, z) = 0$. Тому існує підмножина E множини G_n, яка має в G_n хоча б одну граничну точку, і така, що або $a(\lambda, z) = 0$ при $z \in E$, або $c(\lambda, z) = 0$ при $z \in E$. Оскільки кожна з цих функцій є аналітичною по змінній z в області G_n, то за теоремою єдиності для аналітичних функцій одержуємо, що або $a(\lambda, z) = 0$ при $z \in G_n$, або $c(\lambda, z) = 0$ при $z \in G_n$. Оскільки множина $\complement\overline{G_{N(n)}}$ є зв'язною, то, повторюючи ще раз аналогічні міркування відносно змінної λ, одержуємо, що виконується одна з умов: 1) $a(\lambda, z) = 0$ при $\lambda \in \complement\overline{G_{N(n)}}$, $z \in G_n$, або 2) $c(\lambda, \mu, \nu, z) = 0$ при $\lambda \in \complement\overline{G_{N(n)}}$, $z \in G_n$. У першому випадку оператор A є нульовим. Легко бачити, що для $A = 0$ та довільного оператора $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ виконується рівність (2). Залишилося розглянути другий випадок.

Нехай $c(\lambda, \mu, \nu, z) = 0$ при $\lambda \in \complement\overline{G_{N(n)}}$ і $z \in G_n$ та $a(\lambda, z) \not\equiv 0$ при $\lambda \in \complement\overline{G_{N(n)}}$, $z \in G_n$. Не порушуючи загальності, вважатимемо числа $\mu, \nu \in \complement\overline{G_{N(n)}}$ такими, що $a(\nu, z)a(\mu, z) \not\equiv 0$ при $z \in G_n$. Покладемо $2(\mu - \nu)a^2(\mu, z)a^2(\nu, z) = h_n(z)$. Функція $h_n(z)$ є аналітичною в G_n і $h_n(z) \not\equiv 0$ в G_n. Рівність $c(\lambda, \mu, \nu, z) = 0$ можна записати у вигляді

$$a(\lambda, z)(\varphi_{0,n}(z)\lambda^2 + \varphi_{1,n}(z)\lambda + \varphi_{2,n}(z)) = h_n(z), \tag{10}$$

де функції $\varphi_{k,n}(z)$, $k = 0, 1, 2$, є аналітичними при $z \in G_n$ і рівність (10) виконується при $\lambda \in \complement\overline{G_{N(n)}}$ та $z \in G_n$.

Позначимо $d_n(\lambda, z) = \varphi_{0,n}(z)\lambda^2 + \varphi_{1,n}(z)\lambda + \varphi_{2,n}(z)$ і покажемо, що $d_n(\lambda, z) \neq 0$ при $\lambda \in \complement\overline{G_{N(n)}}$ та $z \in G_n$. Припустимо, що існують числа $\lambda_0 \in \complement\overline{G_{N(n)}}$ та $z_0 \in G_n$, для яких $d_n(\lambda_0, z_0) = 0$. Оскільки функції $\varphi_{0,n}(z), \varphi_{1,n}(z), \varphi_{2,n}(z)$ є аналітичними в G_n і корені квадратного відносно λ рівняння $d_n(\lambda, z) = 0$ неперервним чином залежать від параметра z, то існує окіл $U_\delta(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_0| < \delta\}$ точки z_0 такий, що $U_\delta(z_0) \subset G_n$ і для кожного $z \in G_n$ один із коренів $\lambda(z)$ квадратного рівняння $d_n(\lambda, z) = 0$ відносно λ міститься в $\complement\overline{G_{N(n)}}$. Покладаючи в (10) для довільного $z \in U_\delta(z_0)$ замість λ число $\lambda(z)$, одержуємо, що $h_n(z) = 0$ при $z \in U_\delta(z_0)$. За теоремою єдиності для аналітичних функцій звідси випливає, що $h_n(z) = 0$ при $z \in G_n$, що суперечить умові $h_n(z) \not\equiv 0$ в G_n. Таким чином, дійсно, функція $d_n(\lambda, z) \neq 0$ при $\lambda \in \complement\overline{G_{N(n)}}$, $z \in G_n$. Тоді з (10) випливає, що

$$a(\lambda, z) = \frac{h_n(z)}{\varphi_{0,n}(z)\lambda^2 + \varphi_{1,n}(z)\lambda + \varphi_{2,n}(z)} \tag{11}$$

при $\lambda \in \complement\overline{G_{N(n)}}$ і $z \in G_n$.

Виберемо довільне натуральне число $m > n$ і знайдене для нього число $N(m)$ за означенням локально аналітичних функцій $a(\lambda, z)$ та $b(\lambda, z)$. Тоді за доведеним вище твердженням на множині $\complement\overline{G_{N(m)}} \times G_m$ функцію $a(\lambda, z)$ можна подати у вигляді

$$a(\lambda, z) = \frac{h_m(z)}{\varphi_{0,m}(z)\lambda^2 + \varphi_{1,m}(z)\lambda + \varphi_{2,m}(z)}, \tag{12}$$

де $h_m(z)$, $\varphi_{k,m}(z)$, $k = 0, 1, 2$, є аналітичними функціями на множині G_m і $\varphi_{0,m}(z)\lambda^2 + \varphi_{1,m}(z)\lambda + \varphi_{2,m}(z) \neq 0$ при $\lambda \in \complement\overline{G_{N(m)}}$, $z \in G_m$. Оскільки, за властивістю локально аналітичних функцій, $a(\lambda, z)$, що визначається формулами (11) та (12), набуває однакових значень на перетині множин $\complement\overline{G_{N(n)}} \times G_n$ та $\complement\overline{G_{N(m)}} \times G_m$, то

$$\frac{h_n(z)}{\varphi_{0,n}(z)\lambda^2 + \varphi_{1,n}(z)\lambda + \varphi_{2,n}(z)} = \frac{h_m(z)}{\varphi_{0,m}(z)\lambda^2 + \varphi_{1,m}(z)\lambda + \varphi_{2,m}(z)} \tag{13}$$

на множині $\complement\overline{G_{N(m)}} \times G_n$. З цієї рівності випливає, що на множині G_n множини нулів функцій $h_n(z)$ та $h_m(z)$ збігаються. Нехай S_n — множина нулів функції $h_n(z)$ на множині G_n, $n = 1, 2, \ldots$. Тоді кожна з множин S_n є скінченною і $S_n \subset S_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Тому множина $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ є не більш ніж зліченною. Розглянемо довільну функцію $h(z)$ з простору $\mathcal{H}(G)$, множина нулів якої збігається з множиною S. Тоді для кожного натурального n функцію $h_n(z)$ можна на множині G_n подати у вигляді $h_n(z) = h(z)\tilde{h}_n(z)$, де $\tilde{h}_n(z) = \dfrac{h_n(z)}{h(z)}$, $z \in G_n$. Зрозуміло, що функція $\tilde{h}_n(z)$ є аналітичною на множині G_n і $\tilde{h}_n(z) \neq 0$ при $z \in G_n$. Тому при $\lambda \in \complement\overline{G_{N(n)}}$, $z \in G_n$ функцію $a(\lambda, z)$ можна зобразити у вигляді

$$a(\lambda, z) = \frac{h(z)}{\tilde{\varphi}_{0,n}(z)\lambda^2 + \tilde{\varphi}_{1,n}(z)\lambda + \tilde{\varphi}_{2,n}(z)},$$

де $\tilde{\varphi}_{k,n}(z) = \dfrac{\varphi_{k,n}(z)}{\tilde{h}_n(z)}$, до того ж функції $\tilde{\varphi}_{k,n}(z)$, $k = 0, 1, 2$, є аналітичними на множині G_n. З (13) випливає, що при $m > n$ на множині $\complement\overline{G_{N(m)}} \times G_n$ виконується рівність

$$\frac{h(z)}{\tilde{\varphi}_{0,n}(z)\lambda^2 + \tilde{\varphi}_{1,n}(z)\lambda + \tilde{\varphi}_{2,n}(z)} = \frac{h(z)}{\tilde{\varphi}_{0,m}(z)\lambda^2 + \tilde{\varphi}_{1,m}(z)\lambda + \tilde{\varphi}_{2,m}(z)}. \tag{14}$$

Звідси випливає, що $\tilde{\varphi}_{0,n}(z)\lambda^2 + \tilde{\varphi}_{1,n}(z)\lambda + \tilde{\varphi}_{2,n}(z) = \tilde{\varphi}_{0,m}(z)\lambda^2 + \tilde{\varphi}_{1,m}(z)\lambda + \tilde{\varphi}_{2,m}(z)$ при $\lambda \in \complement\overline{G_{N(m)}}$ і $z \in G_n$. Тому $\tilde{\varphi}_{k,n}(z) = \tilde{\varphi}_{k,m}(z)$ при $z \in G_n$ і кожна з функцій $\varphi_{k,n}(z)$ аналітично продовжується до функції $\varphi_k(z)$, $k = 0, 1, 2$, яка є аналітичною на множині G.

Таким чином, ми показали, що якщо оператори $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ з характеристичними функціями $a(\lambda, z)$ та $b(\lambda, z)$ задовольняють співвідношення (2) і оператор $A \neq 0$, то існують аналітичні в області G функції $h(z)$ та $\varphi_k(z)$, $k = 0, 1, 2$, такі, що на множині $\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty}((\complement\overline{G_{N(n)}}) \times G_n)$

$$\varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z) \neq 0, \tag{15}$$

$$a(\lambda, z) = \frac{h(z)}{\varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z)}, \tag{16}$$

до того ж $h(z) \not\equiv 0$ в G. Оскільки за означенням локально аналітичної функції $a(\infty, z) = 0$ при $z \in G$, то принаймні одна з функцій $\varphi_0(z)$ або $\varphi_1(z)$ не дорівнює тотожно нулеві в G.

Використовуючи (6), одержуємо

$$b(\lambda, z) = \frac{1}{2}\frac{2\lambda\varphi_0(z) + \varphi_1(z)}{\varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z)} \tag{17}$$

на $\mathcal{F}$.

Навпаки, нехай $h(z)$, $\varphi_k(z)$, $k = 0, 1, 2,$ — такі аналітичні в області G функції, що виконується співвідношення (15) на множині $\mathcal{F}$ і $h(z) \not\equiv 0$ в G та $\varphi_0(z)\varphi_1(z) \not\equiv 0$ в G. Тоді формулами (16) та (17) визначаються локально аналітичні на множині $\complement G \times G$ функції $a(\lambda, z)$ та $b(\lambda, z)$. Покажемо, що ненульові оператори A та B, характеристичні функції яких збігаються відповідно з $a(\lambda, z)$ та $b(\lambda, z)$, задовольняють рівність (2).

Візьмемо довільне натуральне n і виберемо натуральне число $N(n)$ так, щоб функції $a(\lambda, z)$ та $b(\lambda, z)$ були аналітичними на множині $\complement\overline{G_{N(n)}} \times G_n$. Нехай $\gamma_n = \partial G_{N(n)+1}$ і $\tilde{\gamma}_n = \partial G_{N(n)+2}$. Тоді для довільних функцій f та g з $\mathcal{H}(G)$ при $z \in G_n$ матимемо

$$(Af)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} \frac{h(z)f(\lambda)}{\varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z)} d\lambda, \tag{18}$$

$$(Ag)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n} \frac{h(z)g(\mu)}{\varphi_0(z)\mu^2 + \varphi_1(z)\mu + \varphi_2(z)} d\mu, \tag{19}$$

$$(Bg)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n} \frac{(\mu\varphi_0(z) + \frac{1}{2}\varphi_1(z))g(\mu)}{\varphi_0(z)\mu^2 + \varphi_1(z)\mu + \varphi_2(z)} d\mu, \tag{20}$$

$$(Bf)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} \frac{(\lambda\varphi_0(z) + \frac{1}{2}\varphi_1(z))f(\lambda)}{\varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z)} d\lambda. \tag{21}$$

Тому при $z \in G_n$

$$(Af)(z)(Bg)(z) + (Ag)(z)(Bf)(z) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\gamma_n} d\lambda \int\limits_{\tilde{\gamma}_n} \frac{((\lambda + \mu)\varphi_0(z) + \varphi_1(z))h(z)f(\lambda)g(\mu)}{(\varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z))(\varphi_0(z)\mu^2 + \varphi_1(z)\mu + \varphi_2(z))} d\mu =$$

$$= \frac{h(z)}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\gamma_n} d\lambda \int\limits_{\tilde{\gamma}_n} \left(\frac{1}{\varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\varphi_0(z)\mu^2 + \varphi_1(z)\mu + \varphi_2(z)}\right) \frac{f(\lambda)g(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu =$$

$$= \frac{h(z)}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\gamma_n} \frac{f(\lambda)}{\varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z)} d\lambda \int\limits_{\tilde{\gamma}_n} \frac{g(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu -$$

$$-\frac{h(z)}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\frac{g(\mu)}{\varphi_0(z)\mu^2+\varphi_1(z)\mu+\varphi_2(z)}d\mu\int\limits_{\gamma_n}\frac{f(\lambda)}{\mu-\lambda}d\lambda=$$

$$=\frac{h(z)}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\gamma_n}\frac{f(\lambda)g(\lambda)}{\varphi_0(z)\lambda^2+\varphi_1(z)\lambda+\varphi_2(z)}d\lambda=(A(fg))(z).$$

Таким чином, є правильним наступне твердження.

Теорема. *Для того щоб для ненульових операторів A та B з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ виконувалась рівність* (2) *для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(G)$, необхідно і достатньо, щоб оператори A та B мали вигляд* (18) *та* (21), *де функції $h(z)$ та $\varphi_k(z)$, $k=0,1,2$, належать простору $\mathcal{H}(G)$, до того ж для них на множині $\mathcal{F}$ виконується співвідношення* (15) *і $\varphi_0(z)\varphi_1(z)\not\equiv 0$ та $h(z)\not\equiv 0$ в G.*

Зауваження. Як зазначалось у процесі доведення теореми, оператор $A=0$ та довільний оператор B з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ задовольняють співвідношення (2).

Розглянемо деякі класи операторів, які одержуються з теореми і задовольняють співвідношення (2).

I. Нехай

$$\varphi_0(z)\lambda^2+\varphi_1(z)\lambda+\varphi_2(z)=(\lambda-\psi_1(z))(\lambda-\psi_2(z)),$$

де $\psi_1(z)$ та $\psi_2(z)$ — деякі аналітичні в області G функції, які відображають G в себе, до того ж $\psi_1(z)\not\equiv\psi_2(z)$. Тоді умова (15) виконується і для довільної функції $h(z)$ з простору $H(G)$, а відповідні оператори A та B діють за правилами

$$(Af)(z)=h(z)\frac{f(\psi_1(z))-f(\psi_2(z))}{\psi_1(z)-\psi_2(z)}\quad \text{при}\quad z\in G\colon \psi_1(z)\neq\psi_2(z),$$

$$(Af)(z)=h(z)f'(\psi_1(z))\quad \text{при}\quad z\in G\colon \psi_1(z)=\psi_2(z),$$

$$(Bf)(z)=\frac{1}{2}(f(\psi_1(z))+f(\psi_2(z))).$$

II. Нехай

$$\varphi_0(z)\lambda^2+\varphi_1(z)\lambda+\varphi_2(z)=(\lambda-\psi(z))^2,$$

де $\psi(z)$ — деяка аналітична в області G функція, до того ж $\psi(G)\subset G$. Тоді, використовуючи теорему, одержуємо, що для довільної функції $h(z)$ з простору $\mathcal{H}(G)$ оператори A та B, які діють за правилами

$$(Af)(z)=h(z)f'(\psi(z)),\quad (Bf)(z)=f(\psi(z)),$$

належать класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ і задовольняють співвідношення (2).

III. Нехай

$$\varphi_0(z)\lambda^2+\varphi_1(z)\lambda+\varphi_2(z)=\lambda-\psi(z),$$

де $\psi(z)$ — деяка аналітична в області G функція, до того ж $\psi(G)\subset G$. Тоді з теореми випливає, що для довільної функції $h(z)$ з простору $\mathcal{H}(G)$ оператори A та B, які діють за правилами

$$(Af)(z) = h(z)f(\psi(z)), \quad (Bf)(z) = \frac{1}{2}f(\psi(z)),$$

належать класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ і задовольняють співвідношення (2).

Кожному з наведених в I – III класів пар операторів A та B, що задовольняють співвідношення (2), відповідають деякі пари функціоналів, що задовольняють співвідношення (1) і одержані в [1]. Наведемо приклад пари операторів A та B з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, для яких виконується рівність (2), до того ж для них не існує аналогічного розв'язку рівняння (1) у класі лінійних неперервних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G)$.

IV. Нехай $G = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$. Тоді функція

$$\varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z) = \lambda^2 - z$$

задовольняє співвідношення (15) для даної області G. Тому, обчислюючи інтеграли у правих частинах формул (18) і (21), одержуємо, що для довільної функції $h(z)$ з простору $\mathcal{H}(G)$ оператори A та B, які діють за правилами

$$(Af)(z) = h(z)\frac{f(\sqrt{z}) - f(-\sqrt{z})}{2\sqrt{z}} \quad \text{при} \quad z \in G\backslash\{0\}, \quad (Af)(0) = h(0)f'(0),$$

$$(Bf)(z) = \frac{f(\sqrt{z}) + f(-\sqrt{z})}{2},$$

належать класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ і задовольняють співвідношення (2).

1. *Rubel L. A.* Derivation pairs on the holomorphic functions // Funkc. ekvacioj. – 1967. – № 10. – P. 225 – 227.
2. *Nandakumar N. R.* A note on derivation pairs // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – № 21. – P. 535 – 539.
3. *Nandakumar N. R.* A note on the functional equation $M(fg) = M(f)M(g) + L(f)L(g)$ on $H(G)$ // Rend. Semin. Fac. sci. Univ. Cagliari. – 1998. – **68**. – P. 13 – 17.
4. *Kannappan Pl., Nandakumar N. R.* On a cosine functional equation for operators on the algebra of analytic functions in a domain // Aequat. math. – 2001.– **61,** № 3. – P. 233 – 238.
5. *Luecking D.H., Rubel L.A.* Complex analysis, a functional analysis approach. – New York: Springer, 1984. – 178 p.
6. *Kannappan Pl.* Functional equations and inequalities with applications // Springer Monogr. in Math. – New York: Springer, 2009. – 810 p.
7. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie // J. reine und angew. Math. – 1953. – **191**. – S. 30 – 49.

Одержано 22.03.11,
після доопрацювання — 02.10.11