УДК 517.5

К. М. Жигалло, Ю. І. Харкевич (Волин. нац. ун-т, Луцьк)

НАБЛИЖЕННЯ (ψ, β)-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ МАЛОЇ ГЛАДКОСТІ БІГАРМОНІЧНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА

We solve the Kolmogorov – Nikol'skii problem for biharmonic Poisson integrals on the classes of (ψ, β)-differentiable periodic functions of low smoothness in the uniform metric.

Решена задача Колмогорова – Никольского для бигармонических интегралов Пуассона на классах (ψ, β)-дифференцируемых периодических функций малой гладкости в равномерной метрике.

1. Постановка задачі та деякі історичні відомості. Нехай L_1, L_∞ та C — простори 2π-періодичних відповідно сумовних, вимірних та істотно обмежених неперервних функцій з відомими нормами

$$\|f\|_{L_1} = \|f\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt,$$

$$\|f\|_{L_\infty} = \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_t |f(t)|,$$

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|.$$

Нехай $U(\rho; x)$ — бігармонічна функція в одиничному крузі $|\rho e^{ix}| < 1$, тобто є розв'язком рівняння

$$\Delta^2 U(\rho; x) = 0, \tag{1}$$

де $\Delta^2 U(\rho; x) = \Delta(\Delta U(\rho; x))$, $\Delta = \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\dfrac{\partial}{\partial\rho}\right)$ — оператор Лапласа.

Розв'язок рівняння (1) із граничними умовами

$$\left.\frac{\partial U(\rho; x)}{\partial x}\right|_{\rho=1} = 0, \qquad U(\rho; x)|_{\rho=1} = f(x),$$

де $f(x)$ — сумовна 2π-періодична функція, позначимо через $B(\rho; f; x)$.

У монографії М. П. Тімана [1, с. 256] показано, що функцію $B(\rho; f; x)$, яку називають бігармонічним інтегралом Пуассона функції $f(\cdot)$, можна подати у вигляді

$$B(\rho; f; x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[1 + \frac{k}{2}\left(1-\rho^2\right)\right]\rho^k \cos kt\right\}dt.$$

Функцію

$$B_\delta(f; x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[1 + \frac{k}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\right]e^{-k/\delta}\cos kt\right\}dt, \quad \delta > 0$$

($\rho = e^{-1/\delta}$) будемо використовувати в якості лінійного методу наближення функцій із класів $C^\psi_{\beta,\infty}$, що введені в роботі О. І. Степанця (див. [2]) таким чином.

Нехай $\psi(k)$ — довільна фіксована функція натурального аргументу і β — фіксоване дійсне число, $a_k(f)$, $b_k(f)$ — коефіцієнти Фур'є функції f. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi\,(k)} \left(a_k(f) \cos\left(kx + \frac{\pi\beta}{2}\right) + b_k(f) \sin\left(kx + \frac{\pi\beta}{2}\right)\right)$$

є рядом Фур'є функції $\varphi \in L_1$, то $\varphi(\cdot)$ називають (ψ, β)-похідною функції f і позначають через $f_\beta^\psi(\cdot)$. Клас неперервних функцій $f(\cdot)$, для яких $\|f_\beta^\psi\|_\infty \leq 1$, позначають через $C_{\beta,\infty}^\psi$. Зазначимо, що при $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, класи $C_{\beta,\infty}^\psi$ збігаються з класами $W_{\beta,\infty}^r$ і $f_\beta^\psi = f_\beta^{(r)}$ — (r, β)-похідна в сенсі Вейля – Надя (див. [3, 4, с. 24]). Якщо, крім цього, $\beta = r$, $r \in \mathbb{N}$, то f_β^ψ є похідною порядку r функції f, і при цьому класи $C_{\beta,\infty}^\psi$ є відомими класами Соболєва W_∞^r.

Наслідуючи О. І. Степанця (див. [4, с. 93; 5 с. 195]), через $\mathfrak{M}$ будемо позначати множину додатних неперервних опуклих донизу функцій $\psi(u)$, $u \geq 1$, для яких $\lim_{u\to\infty} \psi(u) = 0$. Підмножину функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, що задовольняють умову $\int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t} dt < \infty$, позначимо через $\mathfrak{M}'$. Із множини $\mathfrak{M}$ виділимо підмножину $\mathfrak{M}_0$ (див., наприклад, [5, с. 160]),

$$\mathfrak{M}_0 = \left\{ \psi \in \mathfrak{M}\colon\ 0 < \frac{t}{\eta(t) - t} \leq K \ \ \forall t \geq 1 \right\},$$

де $\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right)$, ψ^{-1} — функція, обернена до функції ψ, а K — стала, яка може залежати від ψ, $\mathfrak{M}_0' = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}'$.

У даній роботі будемо вивчати асимптотичну поведінку при $\delta \to \infty$ величини

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^\psi; B_\delta\right)_C = \sup_{f \in C_{\beta,\infty}^\psi} \|f(\cdot) - B_\delta(f; \cdot)\|_C = \sup_{f \in C_{\beta,\infty}^\psi} \|\rho_\delta(f; \cdot)\|_C. \qquad (2)$$

Якщо в явному вигляді знайдено функцію $\varphi(\delta) = \varphi(\mathfrak{N}; \delta)$ таку, що при $\delta \to \infty$

$$\mathcal{E}\left(\mathfrak{N}; B_\delta\right)_X = \varphi\left(\delta\right) + o\left(\varphi\left(\delta\right)\right),$$

то, наслідуючи О. І. Степанця [5, с. 198], будемо говорити, що розв'язана задача Колмогорова – Нікольського для бігармонічного інтеграла Пуассона на класі $\mathfrak{N}$ у метриці простору X.

Зазначимо, що розв'язок задачі Колмогорова – Нікольського на класі W_∞^1 знайдено у роботах С. Канієва [6] та П. Пих [7]. Апроксимативні властивості бігармонічних інтегралів Пуассона на інших класах функцій досліджувались також Л. П. Фалалєєвим [8], Т. І. Амановим та Л. П. Фалалєєвим [9], М. П. Тіманом [1], авторами [10 – 12], В. П. Заставним [13]. Слід зауважити, що в роботі авторів [12] розв'язано задачу Колмогорова – Нікольського для бігармонічних інтегралів Пуассона на класах $C_{\beta,\infty}^\psi$ у метриці простору C, коли функції $\psi(\cdot)$ мають велику швидкість спадання до нуля. Водночас досить цікавим залишається питання про апроксимативні властивості бігармонічних інтегралів Пуассона на класах (ψ, β)-диференційовних функкцій малої гладкості, тобто таких функцій $\psi(\cdot)$, для яких $\int_1^\infty u\psi(u)du = \infty$.

2. Деякі оцінки для інтегралів типу Фур'є. Нехай $\Lambda = \{\lambda_\delta(k)\}$ — множина функцій натурального аргументу, що залежить від параметра δ, заданого на множині $E_\Lambda \subseteq \mathbb{R}$, яка має принаймні одну граничну точку δ_0, $\lambda_\delta(0) = 1\ \forall \delta \in E_\Lambda$. Якщо $\delta \in \mathbb{N}$, то числа $\lambda_\delta(k)$ є елементами нескінченної прямокутної матриці $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, $n, k = 0, 1, \ldots$, $\lambda_0^{(n)} = 1$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а при додатковій умові $\lambda_k^{(n)} \equiv 0$ при $k > n$ — елементами нескінченної трикутної матриці. Будемо вважати, що $\{\lambda_\delta(k)\}$ має таку властивість: що для кожної функції $f \in L_1$ ряд

$$\frac{a_0(f)}{2}\lambda_\delta(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\delta(k)\left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right), \quad \delta \in E_\Lambda,$$

при кожному фіксованому $\delta \in E_\Lambda$ збігається в метриці простору L_1 до деякої сумовної функції $U_\delta(f; x; \Lambda)$. Кажуть, що кожна множина функцій натурального аргументу Λ при фіксованому $\delta \in E_\Lambda$ визначає лінійний оператор $U_\delta(\Lambda)$, що діє із L_1 в L_1. Зокрема, для бігармонічного оператора Пуассона B_δ маємо

$$\lambda_\delta(k) = \left(1 + \frac{k}{2}\left(1 - e^{-2/\delta}\right)\right) e^{-k/\delta},$$

де $\delta > 0$, а граничною точкою множини E_Λ є $\delta_0 = \infty$.

Далі, припустимо, що множина Λ задається підсумовуючою функцією $\lambda_\delta(u)$, $0 \le u < \infty$, такою, що $\lambda_\delta(k) = \lambda\left(\dfrac{k}{\delta}\right)$ і $\lambda_\delta(0) = 1\ \forall \delta \in E_\Lambda$. Для бігармонічного інтеграла Пуассона покладемо

$$\tau_\delta\left(\frac{k}{\delta}\right) = \left(1 - \lambda_\delta(k)\right)\frac{\psi(k)}{\psi(\delta)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

так, що

$$\tau(u) = \tau_\delta(u; \psi) = \begin{cases} \left(1 - [1 + \gamma u]\, e^{-u}\right)\dfrac{\psi(1)}{\psi(\delta)}, & 0 \le u \le \dfrac{1}{\delta}, \\[2ex] \left(1 - [1 + \gamma u]\, e^{-u}\right)\dfrac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, & u \ge \dfrac{1}{\delta}, \end{cases} \tag{3}$$

де $\gamma = \gamma(\delta) = \dfrac{\delta}{2}(1 - e^{-2/\delta})$, $\psi(u)$ — функція, визначена та неперервна при $u \ge 1$.

Перш ніж перейти до вивчення поведінки величини $\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; B_\delta\right)_C$ вигляду (2), покажемо, що мають місце наступні твердження.

Лема 1. *Якщо для функції $\tau(\cdot)$ вигляду* (3) *її перетворення Фур'є*

$$\hat{\tau}(t) = \hat{\tau}_\delta(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \tau(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du \tag{4}$$

є сумовним на всій числовій осі, то має місце співвідношення

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; B_\delta\right)_C = \psi(\delta)A(\tau) + O\left(\psi(\delta)\int_{|t| \ge \delta\pi/2} |\hat{\tau}_\delta(t)|\, dt\right), \tag{5}$$

де величина $A(\tau)$ *визначається рівністю*

$$A(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{\tau}_\delta(t)|\, dt. \tag{6}$$

Доведення. Оскільки, згідно з умовою леми 1, перетворення Фур'є $\hat{\tau}(\cdot)$ є сумовним на всій числовій осі, то, повторюючи наведені в роботі [5, с. 183] міркування, неважко переконатися в тому, що для будь-якої функції $f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}$ у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ справджується рівність

$$\rho_\delta(f; x) = f(x) - B_\delta(f; x) = \psi(\delta) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{\psi}_{\beta}\left(x + \frac{t}{\delta}\right) \hat{\tau}_\delta(t) dt, \quad \delta > 0. \tag{7}$$

Із співвідношення (2), враховуючи інтегральне зображення (7) та беручи до уваги інваріантність класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ відносно зсуву аргументу (див. [4, с. 109]), отримуємо

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; B_\delta\right)_C = \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \left| \psi(\delta) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{\psi}_{\beta}\left(\frac{t}{\delta}\right) \hat{\tau}_\delta(t) dt \right|.$$

Звідси

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; B_\delta\right)_C \leq \frac{\psi(\delta)}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \int\limits_0^{\infty} \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt. \tag{8}$$

З іншого боку, для довільної функції $\varphi_0 \in L_1$, $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_0(t) dt = 0$, такої, що $\operatorname{ess\,sup}\limits_t |\varphi_0(t)| \leq 1$, у класі $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ знайдеться функція $f(x) = f(\varphi_0; x)$, для якої $f^{\psi}_{\beta}(x) = \varphi_0(x)$. Тому в класі $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ існує функція $\hat{f}(t)$ така, що

$$\hat{f}^{\psi}_{\beta}(t) = \operatorname{sign} \int\limits_0^{\infty} \tau(u) \cos\left(u\delta t + \frac{\beta\pi}{2}\right) du, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \tag{9}$$

Далі, оскільки

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; B_\delta\right)_C \geq \frac{\psi(\delta)}{\pi} \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}^{\psi}_{\beta}\left(\frac{t}{\delta}\right) \int\limits_0^{\infty} \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du dt \right|, \tag{10}$$

то, враховуючи (9), маємо

$$\frac{\psi(\delta)}{\pi} \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}^{\psi}_{\beta}\left(\frac{t}{\delta}\right) \int\limits_0^{\infty} \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du dt \right| \geq$$

$$\geq \delta\psi(\delta) \left| \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sign}\hat{\tau}(t\delta) \hat{\tau}(t\delta)\, dt \right| - \psi(\delta) \int\limits_{|t| \geq \delta\pi/2} |\hat{\tau}_\delta(t)|\, dt =$$

$$= \psi(\delta) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\tau}_\delta(t)|\, dt + \gamma(\delta), \tag{11}$$

де $\gamma(\delta) \leq 0$ і

$$|\gamma(\delta)| = O\left(\psi(\delta) \int\limits_{|t| \geq \delta\pi/2} |\hat{\tau}_\delta(t)|\, dt \right).$$

Поєднання співвідношень (8) та (10), (11) дозволяє записати рівність (5).

Лему 1 доведено.

Зазначимо, що для трикутних матриць Λ, $\lambda_k^{(n)} \equiv 0, k > n$, аналогічний результат для класів $W^r_{\beta,\infty}$ отримано у роботі С. А. Теляковського [14], а для класів $C^\psi_{\beta,\infty}$ — у роботі В. І. Рукасова [15]. Для нескінченних прямокутних матриць $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, $n, k = 0, 1, \ldots$, на класах $W^r_{\beta,\infty}$ відомий результат отримав Л. І. Баусов [16].

У лемі 1 вимагається сумовність перетворення $\hat{\tau}(t)$ функції $\tau(\cdot)$ вигляду (3) на всій дійсній осі, тобто збіжність інтеграла $A(\tau)$. Для виконання цієї вимоги, згідно з теоремою 1 роботи [16], необхідною й достатньою умовою є збіжність таких інтегралів:

$$\int\limits_0^{1/2} u|d\tau'(u)|, \qquad \int\limits_{1/2}^{\infty} |u-1||d\tau'(u)|, \tag{12}$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \int\limits_0^{\infty} \frac{|\tau(u)|}{u} du, \qquad \int\limits_0^1 \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u} du. \tag{13}$$

Лема 2. *Якщо ψ належить множині $\mathfrak{M}_0'$, функція $g(u) = u^2\psi(u)$ опукла догори або донизу на $[b, \infty)$, $b \geq 1$, то при $\delta \to \infty$ для інтегралів* (12) *та* (13), *де $\tau(\cdot)$ — функція вигляду* (3), *мають місце оцінки*

$$\int\limits_0^{1/2} u|d\tau'(u)| = O\left(1 + \frac{1}{\delta^2\psi(\delta)} \int\limits_1^{\delta} \psi(u) du \right), \tag{14}$$

$$\int\limits_{1/2}^{\infty} |u-1||d\tau'(u)| = O(1), \tag{15}$$

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{|\tau(u)|}{u} du = \frac{1}{2\delta^2\psi(\delta)} \int\limits_1^{\delta} u\psi(u) du + \frac{1}{\psi(\delta)} \int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{\psi(u)}{u} du +$$

$$+ O\left(1 + \frac{1}{\delta^2\psi(\delta)} \int\limits_1^{\delta} \psi(u) du \right), \tag{16}$$

$$\int\limits_0^1 \frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u}du = O\left(1+\frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\int\limits_1^\delta \psi(u)du\right). \tag{17}$$

Доведення. Знайдемо оцінку першого інтеграла з (12) на кожному з проміжків $\left[0;\frac{1}{\delta}\right]$ та $\left[\frac{1}{\delta};\frac{1}{2}\right]$ (при $\delta>2b$). Із (3) при $u\in\left[0,\frac{1}{\delta}\right]$ маємо

$$\tau'(u)=e^{-u}\left(1-\gamma+\gamma u\right)\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)},\qquad \tau''(u)=e^{-u}\left(-1+2\gamma-\gamma u\right)\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}.$$

Із того, що при достатньо великих δ

$$-1+2\gamma-\gamma u>0,\quad u\in\left[0,\frac{1}{\delta}\right],$$

а також із того, що для $0<\gamma<1,\ u>0$

$$1-\gamma+\gamma u>0,$$

випливає опуклість донизу функції $\tau(u)$ при $u\in\left[0;\frac{1}{\delta}\right]$. Тому, враховуючи нерівності

$$\gamma<1,\quad 1-\gamma<\frac{1}{\delta}, \tag{18}$$

$$1-e^{-u}-\gamma ue^{-u}<\frac{u}{\delta}+u^2,\quad u\geq 0, \tag{19}$$

неважко переконатися в тому, що

$$\int\limits_0^{1/\delta} u|d\tau'(u)|\leq\frac{K}{\delta^2\psi(\delta)}. \tag{20}$$

Покладемо $\tau(u)=\tau_1(u)+\tau_2(u)+\tau_3(u),\ u\geq\frac{1}{\delta}$, де

$$\tau_1(u)\colon=\left(1-e^{-u}-\gamma ue^{-u}-\frac{u}{\delta}-\frac{u^2}{2}\right)\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, \tag{21}$$

$$\tau_2(u):=\frac{u}{\delta}\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, \tag{22}$$

$$\tau_3(u):=\frac{u^2}{2}\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}. \tag{23}$$

Тоді

$$\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u|d\tau'(u)|\leq\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u|d\tau_1'(u)|+\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u|d\tau_2'(u)|+\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u|d\tau_3'(u)|. \tag{24}$$

Оцінимо перший інтеграл із правої частини нерівності (24). Для цього дослідимо спочатку таку функцію:

$$\overline{\mu}(u) = 1 - e^{-u} - \gamma u e^{-u} - \frac{u^2}{2} - \frac{u}{\delta}. \tag{25}$$

З того, що

$$\overline{\mu}'(u) = e^{-u} - \gamma e^{-u} + \gamma u e^{-u} - u - 1/\delta,$$

$$\overline{\mu}''(u) = -e^{-u} + 2\gamma e^{-u} - \gamma u e^{-u} - 1,$$

$$\overline{\mu}(0) = 0,\ \overline{\mu}'(0) = 1 - \gamma - 1/\delta < 0,$$

$$-1 + 2\gamma - \gamma u < e^u, \quad u \in [0, \infty),$$

випливає, що при $u \geq 0$

$$\overline{\mu}(u) \leq 0, \qquad \overline{\mu}'(u) < 0, \qquad \overline{\mu}''(u) < 0. \tag{26}$$

Враховуючи (26) і те, що $e^{-u} \leq 1 - u + \dfrac{u^2}{2}$, $e^{-u} \geq 1 - u$, одержуємо

$$|\overline{\mu}(u)| = \frac{u^2}{2} + \frac{u}{\delta} - 1 + e^{-u} + \gamma u e^{-u} \leq$$

$$\leq \frac{u^2}{2} + \frac{u}{\delta} - u + \frac{u^2}{2} + \gamma u - \gamma u^2 + \gamma \frac{u^3}{2} =$$

$$= (-1 + \gamma + 1/\delta)\, u + (1 - \gamma)\, u^2 + \gamma \frac{u^3}{2},$$

$$|\overline{\mu}'(u)| = u + 1/\delta - e^{-u} + \gamma e^{-u} - \gamma u e^{-u} \leq$$

$$\leq u + 1/\delta - 1 + u + \gamma \left(1 - u + \frac{u^2}{2}\right) - \gamma u + \gamma u^2 =$$

$$= (-1 + \gamma + 1/\delta) + 2(1 - \gamma)u + \frac{3}{2}\gamma u^2,$$

$$|\overline{\mu}''(u)| = e^{-u} - 2\gamma e^{-u} + \gamma u e^{-u} + 1 \leq$$

$$\leq 1 - 2\gamma + 2\gamma u + \gamma u + 1 = (2 - 2\gamma) + 3\gamma u.$$

Звідси, внаслідок (18) і нерівності $-1 + \gamma + \dfrac{1}{\delta} < \dfrac{2}{3\delta^2}$, випливає, що

$$|\overline{\mu}(u)| < \frac{2}{3\delta^2} u + \frac{1}{\delta} u^2 + \frac{u^3}{2},$$

$$|\overline{\mu}'(u)| < \frac{2}{3\delta^2} + \frac{2}{\delta} u + \frac{3}{2} u^2, \tag{27}$$

$$|\overline{\mu}''(u)| < \frac{2}{\delta} + 3u.$$

Оскільки при $u \geq \dfrac{1}{\delta}$, згідно з (21) та (25), має місце співвідношення

$$|d\tau_1'(u)| \leq \left\{ |\overline{\mu}(u)| \, \frac{\delta^2 \psi''(\delta u)}{\psi(\delta)} + 2\, |\overline{\mu}'(u)| \, \frac{\delta |\psi'(\delta u)|}{\psi(\delta)} + |\overline{\mu}''(u)| \, \frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)} \right\} du, \qquad (28)$$

то з урахуванням (27) отримуємо

$$\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u|d\tau_1'(u)| \leq \frac{1}{\psi(\delta)} \int\limits_{1/\delta}^{1/2} \left(\frac{2}{3\delta^2} u^2 + \frac{1}{\delta} u^3 + \frac{1}{2} u^4 \right) \delta^2 \psi''(\delta u) du +$$

$$+ \frac{2}{\psi(\delta)} \int\limits_{1/\delta}^{1/2} \left(\frac{2}{3\delta^2} u + \frac{2}{\delta} u^2 + \frac{3}{2} u^3 \right) \delta \, |\psi'(\delta u)| \, du +$$

$$+ \frac{1}{\psi(\delta)} \int\limits_{1/\delta}^{1/2} \left(\frac{2}{\delta} u + 3u^2 \right) \psi(\delta u) du.$$

Зінтегруємо перший інтеграл правої частини останньої нерівності частинами:

$$\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u|d\tau_1'(u)| \leq \frac{1}{\psi(\delta)} \left(\frac{2}{3\delta^2} u^2 + \frac{1}{\delta} u^3 + \frac{1}{2} u^4 \right) \delta \psi'(\delta u) \Bigg|_{1/\delta}^{1/2} +$$

$$+ \frac{1}{\psi(\delta)} \int\limits_{1/\delta}^{1/2} \left(\frac{8}{3\delta^2} u + \frac{7}{\delta} u^2 + 5u^3 \right) \delta \, |\psi'(\delta u)| \, du +$$

$$+ \frac{1}{\psi(\delta)} \int\limits_{1/\delta}^{1/2} \left(\frac{2}{\delta} u + 3u^2 \right) \psi(\delta u) du. \qquad (29)$$

Далі скористаємося такими твердженнями.

Теорема 1′ [5, с. 161]. *Функція $\psi \in \mathfrak{M}$ належить множині $\mathfrak{M}_0$ тоді і лише тоді, коли величина*

$$\alpha(t) = \frac{\psi(t)}{t\,|\psi'(t)|}, \quad \psi'(t) = \psi'(t+0), \qquad (30)$$

задовольняє умову $\alpha(t) \geq K > 0 \; \forall t \geq 1$.

Теорема 2′ [5, с. 175]. *Для того щоб функція $\psi \in \mathfrak{M}$ належала множині $\mathfrak{M}_0$, необхідно і достатньо, щоб для довільного фіксованого числа $c > 1$ існувала стала K така, що при всіх $t \geq 1$ виконується нерівність*

$$\frac{\psi(t)}{\psi(ct)} \leq K.$$

Домовимося далі через K, K_i позначати сталі, взагалі кажучи, різні.

Застосувавши теорему $1'$, для функції $\psi \in \mathfrak{M}_0$ знайдемо

$$\frac{1}{\psi(\delta)} \int\limits_{1/\delta}^{1/2} \left(\frac{8}{3\delta^2} u + \frac{7}{\delta} u^2 + 5u^3 \right) \delta \left| \psi'(\delta u) \right| du \leq$$

$$\leq \frac{K}{\psi(\delta)} \int\limits_{1/\delta}^{1/2} \left(\frac{8}{3\delta^2} + \frac{7}{\delta} u + 5u^2 \right) \psi(\delta u) du.$$

Із (29), врахувавши останню оцінку та використавши теорему $1'$, одержимо

$$\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u |d\tau_1'(u)| \leq K_1 + \frac{K_2}{\delta^3 \psi(\delta)} + \frac{K_3}{\delta^2 \psi(\delta)} \int\limits_{1/\delta}^{1/2} \psi(\delta u) du +$$

$$+ \frac{K_4}{\delta \psi(\delta)} \int\limits_{1/\delta}^{1/2} u \psi(\delta u) du + \frac{K_5}{\psi(\delta)} \int\limits_{1/\delta}^{1/2} u^2 \psi(\delta u) du. \tag{31}$$

Розглянемо інтеграл

$$\frac{1}{\psi(\delta)} \int\limits_{1/\delta}^{1/2} u^2 \psi(\delta u) du = \frac{1}{\psi(\delta)} \left(\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} + \int\limits_{b/\delta}^{1/2} \right) u^2 \psi(\delta u) du, \quad \delta > 2b.$$

Оскільки функція $g(u) = u^2 \psi(u)$ є обмеженою на $[1, b]$, а при $u \geq b \geq 1$ — опуклою, то

$$\frac{1}{\psi(\delta)} \int\limits_{1/\delta}^{1/2} u^2 \psi(\delta u) du = \frac{1}{\delta^3 \psi(\delta)} \int\limits_{1}^{\delta/2} u^2 \psi(u) du =$$

$$= \frac{1}{\delta^3 \psi(\delta)} \left(\int\limits_{1}^{b} + \int\limits_{b}^{\delta/2} \right) u^2 \psi(u) du \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta^3 \psi(\delta)} \left(\int\limits_{1}^{b} + \int\limits_{b}^{\delta} \right) u^2 \psi(u) du = O\left(1 + \frac{1}{\delta^2 \psi(\delta)} \right). \tag{32}$$

Тоді, беручи до уваги нерівність

$$\frac{1}{\delta^2} \int\limits_{1/\delta}^{1/2} \psi(\delta u) du \leq \frac{1}{\delta} \int\limits_{1/\delta}^{1/2} u \psi(\delta u) du \leq \int\limits_{1/\delta}^{1/2} u^2 \psi(\delta u) du,$$

а також співвідношення (31) та (32), отримуємо

$$\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u|d\tau_1'(u)| = O\left(1+\frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\right). \tag{33}$$

З (22) при $u \geq 1/\delta$ маємо

$$\psi(\delta)d\tau_2'(u) = u\delta\psi''(\delta u) + 2\psi'(\delta u) \tag{34}$$

і тоді

$$\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u|d\tau_2'(u)| \leq \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u^2\delta\psi''(\delta u)du + \frac{2}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u\,|\psi'(\delta u)|\,du.$$

Інтегруючи перший інтеграл останньої нерівності частинами та враховуючи теореми $1'$, $2'$, отримуємо

$$\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u|d\tau_2'(u)| \leq \frac{1}{\psi(\delta)}\; u^2\psi'(\delta u)\Big|_{1/\delta}^{1/2} + \frac{4}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u\,|\psi'(\delta u)|\,du \leq$$

$$\leq K_1 + \frac{K_2}{\delta^2\psi(\delta)} + \frac{K_3}{\delta\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1/2}\psi(\delta u)du = O\left(1+\frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta}\psi(u)du\right). \tag{35}$$

Знайдемо оцінку третього доданка з правої частини нерівності (24) на кожному з проміжків $\left[\frac{1}{\delta},\frac{b}{\delta}\right]$ та $\left[\frac{b}{\delta},\frac{1}{2}\right]$, $\delta > 2b$. Із (23) знайдемо $\dfrac{d\tau_3'(u)}{du}$ та, врахувавши спадання і опуклість донизу функції $\psi(\delta u)$ на проміжку $\left[\frac{1}{\delta},\frac{b}{\delta}\right]$, отримаємо таку нерівність:

$$\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} u|d\tau_3'(u)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\psi(\delta)}\left(\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} u\psi(\delta u)du + 2\delta\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} u^2|\psi'(\delta u)|du + \delta^2\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} u^3\psi''(\delta u)du\right). \tag{36}$$

Оскільки $\psi(\delta u) \leq \psi(1)$ при $u \in \left[\frac{1}{\delta},\frac{b}{\delta}\right]$, то

$$\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} u\psi(\delta u)du \leq \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} udu = \frac{K}{\delta^2\psi(\delta)}. \tag{37}$$

Враховуючи теорему $1'$, а потім (37), знаходимо

$$\frac{\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta}u^2|\psi'(\delta u)|du\le\frac{K_1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta}u\psi(\delta u)du\le\frac{K_2}{\delta^2\psi(\delta)}. \tag{38}$$

Зінтегруємо частинами третій інтеграл із правої частини співвідношення (36), взявши до уваги (37), (38). Отримаємо

$$\frac{\delta^2}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta}u^3\psi''(\delta u)du\le\frac{K_2}{\delta^2\psi(\delta)}. \tag{39}$$

Поєднавши співвідношення (36) – (39), будемо мати таку оцінку:

$$\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta}u|d\tau_3'(u)|=O\left(\frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\right). \tag{40}$$

Далі, з (23) і опуклості функції $g(u)$ при $u\ge b$, $b\ge 1$, випливає, що

$$\int\limits_{b/\delta}^{1/2}u|d\tau_3'(u)|=\left|\int\limits_{b/\delta}^{1/2}ud\tau_3'(u)\right|=\left|\left(u\tau_3'(u)-\tau_3(u)\right)\Big|_{b/\delta}^{1/2}\right|=O\left(1+\frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\right). \tag{41}$$

Отже, згідно зі співвідношеннями (20), (24), (33), (35) та (40), (41) при достатньо великих δ, має місце рівність (14).

Оцінимо другий інтеграл з (12). Оскільки, згідно з (3), при $u\in[1/\delta;\infty)$

$$\psi(\delta)d\tau'(u)=\Big\{\left(1-[1+\gamma u]\,e^{-u}\right)\delta^2\psi''(\delta u)+$$

$$+2\delta\left(e^{-u}-\gamma e^{-u}+\gamma ue^{-u}\right)\psi'(\delta u)+$$

$$+\left(-e^{-u}+2\gamma e^{-u}-\gamma ue^{-u}\right)\psi(\delta u)\Big\}du, \tag{42}$$

то

$$\int\limits_{1/2}^{\infty}|u-1||d\tau'(u)|\le\int\limits_{1/2}^{\infty}u|d\tau'(u)|\le$$

$$\le\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/2}^{\infty}u\left(1-[1+\gamma u]\,e^{-u}\right)\delta^2\psi''(\delta u)du+$$

$$+\frac{2\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/2}^{\infty}ue^{-u}(1-\gamma+\gamma u)\left|\psi'(\delta u)\right|du+$$

$$+\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/2}^{\infty}ue^{-u}\left|-1+2\gamma-\gamma u\right|\psi(\delta u)du.$$

Далі, враховуючи, що при $u \geq 0$

$$1-[1+\gamma u]\,e^{-u} \leq 1, \qquad ue^{-u}\,(1-\gamma+\gamma u) \leq K$$

і при $u \in \left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ $\psi(\delta u) \leq \psi\left(\dfrac{\delta}{2}\right)$, можна переконатися, що при $\delta \to \infty$ виконується співвідношення (15).

Знайдемо оцінку першого інтеграла з (13) на проміжках $\left[0;\dfrac{1}{\delta}\right]$, $\left[\dfrac{1}{\delta};1\right]$ та $[1,\infty)$. Внаслідок (3) та (19) маємо

$$\int\limits_0^{1/\delta}\frac{\tau(u)}{u}du \leq \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}\int\limits_0^{1/\delta}\left(\frac{u}{\delta}+u^2\right)\frac{du}{u} \leq \frac{K}{\delta^2\psi(\delta)}. \tag{43}$$

Із співвідношень (3), (25) і (27) отримуємо

$$\left|\int\limits_{1/\delta}^{1}\frac{\tau(u)}{u}du-\frac{1}{2\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1}u\psi(\delta u)du-\frac{1}{\delta\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1}\psi(\delta u)du\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1}\frac{|\overline{\mu}(u)|}{u}\psi(\delta u)du \leq K_1+\frac{K_2}{\delta^2\psi(\delta)}.$$

Звідси

$$\int\limits_{1/\delta}^{1}\frac{\tau(u)}{u}du = \frac{1}{2\delta^2\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta}u\psi(u)du + O\left(1+\frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta}\psi(u)du\right). \tag{44}$$

Ще раз використавши рівність (3) та врахувавши, що $\psi(\delta u) \leq \psi(\delta)$ при $u \geq 1$, знаходимо

$$\left|\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\tau(u)}{u}du-\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\psi(u)}{u}du\right| \leq \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\psi(\delta u)}{u}\left(e^{-u}+\gamma ue^{-u}\right)du \leq K. \tag{45}$$

Поєднання співвідношень (43) – (45) дозволяє записати (16).

Оцінимо другий інтеграл із (13). Покладемо

$$\lambda_\delta(u) = [1+u\gamma(\delta)]\,e^{-u} = \left[1+\frac{\delta u}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\right]e^{-u}, \tag{46}$$

тоді функція $\tau(\cdot)$, що визначається формулою (3), набере вигляду

$$\tau(u) = \begin{cases} (1-\lambda_\delta(u))\,\dfrac{\psi(1)}{\psi(\delta)}, & 0 \leq u \leq \dfrac{1}{\delta}, \\ (1-\lambda_\delta(u))\,\dfrac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, & u \geq \dfrac{1}{\delta}. \end{cases} \tag{47}$$

Із співвідношення (47) знайдемо

$$\tau(1-u)=\begin{cases}(1-\lambda_\delta(1-u))\,\dfrac{\psi(1)}{\psi(\delta)}, & 1-\dfrac{1}{\delta}\le u\le 1,\\[2ex] (1-\lambda_\delta(1-u))\,\dfrac{\psi(\delta(1-u))}{\psi(\delta)}, & u\le 1-\dfrac{1}{\delta},\end{cases} \tag{48}$$

$$\tau(1+u)=\begin{cases}(1-\lambda_\delta(1+u))\,\dfrac{\psi(1)}{\psi(\delta)}, & -1\le u\le \dfrac{1}{\delta}-1,\\[2ex] (1-\lambda_\delta(1+u))\,\dfrac{\psi(\delta(1+u))}{\psi(\delta)}, & u\ge \dfrac{1}{\delta}-1.\end{cases} \tag{49}$$

Подамо другий інтеграл із (13) у вигляді суми двох інтегралів:

$$\int\limits_0^1 \frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u}du=$$

$$=\int\limits_0^{1-1/\delta}\frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u}du+\int\limits_{1-1/\delta}^{1}\frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u}du. \tag{50}$$

Додавши та віднявши в першому доданку з правої частини (50) під знаком модуля в підінтегральній функції величину $\lambda_\delta(1-u)-\lambda_\delta(1+u)$, будемо мати

$$\int\limits_0^{1-1/\delta}\frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u}du\le\int\limits_0^{1-1/\delta}\frac{|\lambda_\delta(1-u)-\lambda_\delta(1+u)|}{u}du+$$

$$+\int\limits_0^{1-1/\delta}\frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)+\lambda_\delta(1-u)-\lambda_\delta(1+u)|}{u}du. \tag{51}$$

Для першого інтеграла з правої частини нерівності (51) (де $\lambda_\delta(u)$ — функція вигляду (46)), як неважко переконатися, є справедливою оцінка

$$\int\limits_0^{1-1/\delta}\left|(1+\gamma(1-u))\,e^{-1+u}-(1+\gamma(1+u))\,e^{-1-u}\right|\frac{du}{u}=O(1). \tag{52}$$

Далі, оскільки мають місце співвідношення (48) і (49), то при $u\in\left[0,1-\dfrac{1}{\delta}\right]$

$$\lambda_\delta(1-u)=1-\frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1-u))}\tau(1-u),$$

$$\lambda_\delta(1+u)=1-\frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1+u))}\tau(1+u).$$

Тоді

$$\int\limits_0^{1-1/\delta} |\tau(1-u)-\tau(1+u)+(\lambda_\delta(1-u)-\lambda_\delta(1+u))|\,\frac{du}{u}\le$$

$$\le \int\limits_0^{1-1/\delta} |\tau(1-u)|\left|1-\frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1-u))}\right|\frac{du}{u}+$$

$$+\int\limits_0^{1-1/\delta} |\tau(1+u)|\left|1-\frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1+u))}\right|\frac{du}{u}. \tag{53}$$

Для оцінки інтегралів із правої частини нерівності (53) скористаємося твердженнями з роботи Л. І. Баусова [16].

Означення 1′ [16]. *Нехай функція $\tau(u)$ задана на $[0,\infty)$, абсолютно неперервна і $\tau(\infty)=0$. Кажуть, що функція $\tau(u)$ належить множині $\mathcal{E}_1$, якщо похідну $\tau'(u)$ в тих точках, де вона не існує, можна доозначити так, щоб існували інтеграли $\int_0^{1/2} u|d\tau'(u)|$, $\int_{1/2}^{\infty}|u-1||d\tau'(u)|$.*

Нехай

$$H(\tau)=|\tau(0)|+|\tau(1)|+\int\limits_0^{1/2} u\,|d\tau'(u)|+\int\limits_{1/2}^{\infty}|u-1|\,|d\tau'(u)|\,. \tag{54}$$

Лема 1′ [16]. *Якщо $\tau(u)$ належить множині $\mathcal{E}_1$, то $|\tau(u)|\le H(\tau)$.*

Оскільки функція $\tau(\cdot)$, яка задана співвідношенням (3), належить множині $\mathcal{E}_1$, то має місце лема $1'$, згідно з якою будемо мати

$$\int\limits_0^{1-1/\delta} |\tau(1-u)|\left|1-\frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1-u))}\right|\frac{du}{u}+\int\limits_0^{1-1/\delta} |\tau(1+u)|\left|1-\frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1+u))}\right|\frac{du}{u}=$$

$$=H(\tau)O\left(\int\limits_0^{1-1/\delta}\frac{|\psi(\delta(1-u))-\psi(\delta)|}{u\psi(\delta(1-u))}du+\int\limits_0^{1-1/\delta}\frac{|\psi(\delta(1+u))-\psi(\delta)|}{u\psi(\delta(1+u))}du\right). \tag{55}$$

Повторюючи міркування, наведені у роботі [17], можна показати, що для функцій $\psi\in\mathfrak{M}_0$ обидва інтеграли з правої частини (55) при $\delta\to\infty$ мають порядок $O(1)$ — величини, рівномірно обмеженої по δ. Отже, з (53) та (55) отримуємо

$$\int\limits_0^{1-1/\delta} \left|\tau(1-u)-\tau(1+u)+(\lambda_\delta(1-u)-\lambda_\delta(1+u))\right|\frac{du}{u}=H(\tau)O(1). \tag{56}$$

Крім того, для величини $H(\tau)$ вигляду (54), згідно з (3), (14) та (15), справджується оцінка

$$H(\tau)=O\left(1+\frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta}\psi(u)du\right),\quad \delta\to\infty. \tag{57}$$

Співставляючи (51) із (52) та (56), (57), знаходимо

$$\int\limits_{0}^{1-1/\delta} \frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u}du = O\left(1+\frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta}\psi(u)du\right). \tag{58}$$

Оцінимо другий доданок із правої частини рівності (50). Маємо

$$\int\limits_{1-1/\delta}^{1} \frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u}du = \int\limits_{1-1/\delta}^{1} \frac{|\lambda_\delta(1-u)-\lambda_\delta(1+u)|}{u}du+$$

$$+O\left(\int\limits_{1-1/\delta}^{1} |\tau(1-u)-\tau(1+u)+\lambda_\delta(1-u)-\lambda_\delta(1+u)|\,\frac{du}{u}\right). \tag{59}$$

Із співвідношень (48) і (49) при $u\in\left[1-\dfrac{1}{\delta},1\right]$ випливають такі рівності:

$$\lambda_\delta(1-u)=1-\frac{\psi(\delta)}{\psi(1)}\tau(1-u), \qquad \lambda_\delta(1+u)=1-\frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1+u))}\tau(1+u).$$

Звідси, згідно з лемою $1'$, отримуємо

$$\int\limits_{1-1/\delta}^{1} |\tau(1-u)-\tau(1+u)+\lambda_\delta(1-u)-\lambda_\delta(1+u)|\,\frac{du}{u}=$$

$$=\int\limits_{1-1/\delta}^{1} \left|\tau(1-u)\left(1-\frac{\psi(\delta)}{\psi(1)}\right)-\tau(1+u)\left(1-\frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1+u))}\right)\right|\frac{du}{u}=$$

$$=H(\tau)O\left(\int\limits_{1-1/\delta}^{1}\frac{|\psi(1)-\psi(\delta)|}{u\psi(1)}du+\int\limits_{1-1/\delta}^{1}\frac{|\psi(\delta(1+u))-\psi(\delta)|}{u\psi(\delta(1+u))}du\right). \tag{60}$$

Оскільки при $\delta\to\infty$

$$\int\limits_{1-1/\delta}^{1}\frac{|\psi(1)-\psi(\delta)|}{u\psi(1)}du=O(1),$$

$$\int\limits_{1-1/\delta}^{1}\frac{|\psi(\delta(1+u))-\psi(\delta)|}{u\psi(\delta(1+u))}du=O(1),$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по δ, то, враховуючи, що

$$\int\limits_{1-1/\delta}^{1} \frac{|\lambda_\delta(1-u)-\lambda_\delta(1+u)|}{u}du=$$

$$= \int\limits_{1-1/\delta}^{1} \left|e^{-1+u} - e^{-1-u} + \gamma(1-u)e^{-1+u} - \gamma(1+u)e^{-1-u}\right| \frac{du}{u} = O(1),$$

а також співвідношення (57), (59), (60), знаходимо таку оцінку:

$$\int\limits_{1-1/\delta}^{1} \frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u} du = O\left(1 + \frac{1}{\delta^2\psi(\delta)} \int\limits_{1}^{\delta} \psi(u)du\right), \quad \delta \to \infty. \qquad (61)$$

Із рівності (50) на підставі оцінок (58) і (61) маємо (17).

Лему 2 доведено.

Таким чином, на підставі леми 2 та теореми 1 з роботи [16] приходимо до висновку, що інтеграл $A(\tau)$ вигляду (6) є збіжним.

3. Асимптотичні рівності для верхніх меж відхилень бігармонічних інтегралів Пуассона від функцій з класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$. Основним результатом роботи є наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}_0'$, функція $g(u) = u^2\psi(u)$ опукла догори або донизу на $[b,\infty)$, $b \geq 1$. Тоді при $\delta \to \infty$ має місце рівність*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; B_\delta\right)_C = \psi(\delta)A(\tau) + O\left(\frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\delta^3}\int\limits_{1}^{\delta} u\psi(u)du\right), \qquad (62)$$

де величина $A(\tau)$ означена за допомогою рівності (6) *і для неї справджується оцінка*

$$A(\tau) = \frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \left(\frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta} u\psi(u)du + \frac{2}{\psi(\delta)}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\psi(u)}{u}du\right) +$$

$$+ O\left(1 + \frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta}\psi(u)du\right). \qquad (63)$$

Доведення. Згідно з лемою 1 має місце рівність (5). Крім того, із нерівностей (2.14) і (2.15) роботи Л. І. Баусова [16, с. 25] з урахуванням формул (14)–(17) для величини $A(\tau)$ записуємо оцінку (63).

Оцінимо залишковий член із правої частини рівності (5), записавши перетворення $\hat{\tau}(t)$ у вигляді

$$\hat{\tau}(t) = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{0}^{1/\delta} + \int\limits_{1/\delta}^{\infty}\right)\tau(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du. \qquad (64)$$

Двічі інтегруючи частинами обидва інтеграли з (64) та беручи до уваги, що $\tau(0) = 0$ і $\lim_{u\to\infty}\tau(u) = \lim_{u\to\infty}\tau'(u) = 0$, одержуємо

$$\int\limits_{0}^{1/\delta}\tau(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du = \frac{1}{t}\tau\left(\frac{1}{\delta}\right)\sin\left(\frac{t}{\delta} + \frac{\beta\pi}{2}\right) + \frac{1}{t^2}\tau'\left(\frac{1}{\delta}\right)\cos\left(\frac{t}{\delta} + \frac{\beta\pi}{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{t^2}\tau'(0)\cos\frac{\beta\pi}{2}-\frac{1}{t^2}\int\limits_0^{1/\delta}\tau''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du, \tag{65}$$

$$\int\limits_{1/\delta}^{\infty}\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du=-\frac{1}{t}\tau\left(\frac{1}{\delta}\right)\sin\left(\frac{t}{\delta}+\frac{\beta\pi}{2}\right)-\frac{1}{t^2}\tau'\left(\frac{1}{\delta}\right)\cos\left(\frac{t}{\delta}+\frac{\beta\pi}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{t^2}\int\limits_{1/\delta}^{\infty}\tau''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du. \tag{66}$$

Поєднання формул (65) та (66) дозволяє записати

$$\int\limits_0^{\infty}\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du=-\frac{1}{t^2}\tau'(0)\cos\frac{\beta\pi}{2}-\frac{1}{t^2}\int\limits_0^{1/\delta}\tau''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du-$$

$$-\frac{1}{t^2}\int\limits_{1/\delta}^{\infty}\tau''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du.$$

Оскільки $\tau'(0)=(1-\gamma)\dfrac{\psi(1)}{\psi(\delta)}<\dfrac{\psi(1)}{\delta\psi(\delta)}$, то

$$\left|\int\limits_0^{\infty}\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|\le\frac{K}{t^2\delta\psi(\delta)}+\frac{1}{t^2}\left(\int\limits_0^{1/\delta}+\int\limits_{1/\delta}^{1}+\int\limits_1^{\infty}\right)|\tau''(u)|\,du. \tag{67}$$

Далі знайдемо оцінки інтегралів із правої частини нерівності (67). Врахувавши опуклість донизу при $u\in\left[0;\dfrac{1}{\delta}\right]$ функції $\tau(u)$ та нерівності (18), отримаємо

$$\int\limits_0^{1/\delta}|\tau''(u)|du=O\left(\frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right). \tag{68}$$

Використовуючи (3), (21) – (23), одержуємо

$$\int\limits_{1/\delta}^{1}|\tau''(u)|du\le\int\limits_{1/\delta}^{1}|\tau_1''(u)|du+\int\limits_{1/\delta}^{1}|\tau_2''(u)|du+\int\limits_{1/\delta}^{1}|\tau_3''(u)|du. \tag{69}$$

З нерівностей (28), (27) маємо

$$\int\limits_{1/\delta}^{1}|\tau_1''(u)|du\le\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1}\left(\frac{2}{3\delta^2}u+\frac{1}{\delta}u^2+\frac{1}{2}u^3\right)\delta^2\psi''(\delta u)du+$$

$$+\frac{2}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1}\left(\frac{2}{3\delta^2}+\frac{2}{\delta}u+\frac{3}{2}u^2\right)\delta\left|\psi'(\delta u)\right|du+$$

$$+\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1}\left(\frac{2}{\delta}+3u\right)\psi(\delta u)du.$$

Зінтегруємо перший інтеграл правої частини останньої нерівності частинами та застосуємо теорему $1'$. Тоді

$$\int\limits_{1/\delta}^{1}|\tau_1''(u)|du\leq\frac{1}{\psi(\delta)}\left(\frac{2}{3\delta^2}u+\frac{1}{\delta}u^2+\frac{1}{2}u^3\right)\delta\psi'(\delta u)\Big|_{1/\delta}^{1}+$$

$$+\frac{3}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1}\left(\frac{2}{3\delta^2}+\frac{2}{\delta}u+3u^2\right)\delta\left|\psi'(\delta u)\right|du+$$

$$+\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1}\left(\frac{2}{\delta}+3u\right)\psi(\delta u)du\leq K_1+\frac{K_2}{\delta^2\psi(\delta)}-$$

$$-\frac{K_3}{\delta\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1}\psi'(\delta u)du+\frac{K_4}{\delta\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1}\psi(\delta u)du+$$

$$+\frac{K_5}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1}u\psi(\delta u)du=O\left(\frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta}u\psi(u)du\right).\qquad(70)$$

Далі використаємо співвідношення (34) і знайдемо

$$\int\limits_{1/\delta}^{1}|\tau_2''(u)|du\leq\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1}u\delta\psi''(\delta u)du+\frac{2}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1}\left|\psi'(\delta u)\right|du=$$

$$=\frac{1}{\psi(\delta)}\,u\psi'(\delta u)|_{1/\delta}^{1}-\frac{3}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1}\psi'(\delta u)du=O\left(\frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right).\qquad(71)$$

Встановимо оцінку третього інтеграла з (69), подавши його так:

$$\int\limits_{1/\delta}^{1}|\tau_3''(u)|du=\left(\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta}+\int\limits_{b/\delta}^{1}\right)|\tau_3''(u)|du,\delta>b.$$

Тоді, провівши міркування, аналогічні крокам (36) – (40), неважко переконатися в справедливості такої рівності:

$$\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} |\tau_3''(u)|du = O\left(\frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right), \quad \delta \to \infty. \tag{72}$$

Враховуючи (23) і той факт, що функція $g(u)$ є опуклою на $[b, \infty)$, $b \geq 1$, отримуємо

$$\int\limits_{b/\delta}^{1} |\tau_3''(u)|du = \left|\int\limits_{b/\delta}^{1} \tau_3''(u)du\right| = O\left(1 + \frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right). \tag{73}$$

Із (69) – (73) випливає, що

$$\int\limits_{1/\delta}^{1} |\tau''(u)|du = O\left(\frac{1}{\delta\psi(\delta)} + \frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta} u\psi(u)du\right). \tag{74}$$

Використовуючи співвідношення (42), знайдемо оцінку третього інтеграла з правої частини нерівності (67). Отже,

$$\int\limits_{1}^{\infty} |\tau''(u)|du \leq \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\infty} \left(1 - [1+\gamma u]\, e^{-u}\right)\delta^2\psi''(\delta u)du +$$

$$+\frac{2\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\infty} e^{-u}\left(1-\gamma+\gamma u\right)\left|\psi'(\delta u)\right| du +$$

$$+\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\infty} e^{-u}\left|-1+2\gamma-\gamma u\right|\psi(\delta u)du.$$

Тоді, враховуючи, що при $u \geq 1$

$$1 - [1+\gamma u]\, e^{-u} \leq u, \; e^{-u}\left(1-\gamma+\gamma u\right) \leq K, \quad \psi(\delta u) \leq \psi(\delta),$$

неважко переконатися в тому, що при $\delta \to \infty$

$$\int\limits_{1}^{\infty} |\tau''(u)|du = O(1). \tag{75}$$

Об'єднуючи формули (67), (68), (74) та (75), отримуємо

$$\left|\int\limits_{0}^{\infty} \tau(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du\right| = O\left(\frac{1}{\delta\psi(\delta)} + \frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta} u\psi(u)du\right)\frac{1}{t^2}.$$

Звідси

$$\int\limits_{|t|\geq\delta\pi/2} |\hat{\tau}_\delta(t)|\, dt = O\left(\frac{1}{\delta^2\psi(\delta)} + \frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta} u\psi(u)du\right), \quad \delta \to \infty.$$

Із останнього співвідношення та (5) випливає рівність (62).

Теорему 1 доведено.

***Наслідок* 1.** *Нехай виконуються умови теореми* 1, $\sin\dfrac{\beta\pi}{2}\neq 0$ *і* $\lim_{t\to\infty}\alpha(t)=$ $=\infty$, *де величина* $\alpha(t)$ *означена рівністю* (30). *Тоді при* $\delta\to\infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty};B_\delta\right)_C=\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\psi(u)}{u}du+O\left(\psi(\delta)\right). \tag{76}$$

Прикладом функцій, які задовольняють умови наслідку 1, є, зокрема, функції вигляду $\psi(u)=\dfrac{1}{\ln^{\alpha}(u+K)}$, де $\alpha>1$, $K>0$.

***Наслідок* 2.** *Нехай* ψ *належить множині* $\mathfrak{M}_0$, $\sin\dfrac{\beta\pi}{2}\neq 0$, *існує* $\lim_{t\to\infty}\alpha(t)$, *функція* $u^2\psi(u)$ *опукла догори або донизу на* $[b,\infty)$, $b\geq 1$,

$$\lim_{u\to\infty}u^2\psi(u)=\infty,\qquad \lim_{\delta\to\infty}\frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta}u\psi(u)du=\infty.$$

Тоді при $\delta\to\infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty};B_\delta\right)_C=\frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{1}{\delta^2}\int\limits_{1}^{\delta}u\psi(u)du+O\left(\psi(\delta)\right). \tag{77}$$

Зазначимо, що функції, які мають, наприклад, вигляд $\psi(u)=\dfrac{1}{u^2}\ln^{\alpha}(u+K)$, $K>0$, $\alpha>0$, задовольняють умови наслідку 2.

***Наслідок* 3.** *Нехай* ψ *належить множині* $\mathfrak{M}_0$, $\sin\dfrac{\beta\pi}{2}\neq 0$, *функція* $u^2\psi(u)$ *опукла донизу на* $[b,\infty)$, $b\geq 1$,

$$\lim_{u\to\infty}u^2\psi(u)=K<\infty,\qquad \lim_{\delta\to\infty}\int\limits_{1}^{\delta}u\psi(u)du=\infty.$$

Тоді при $\delta\to\infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty};B_\delta\right)_C=\frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{1}{\delta^2}\int\limits_{1}^{\delta}u\psi(u)du+O\left(\frac{1}{\delta^2}\right). \tag{78}$$

Прикладом функцій, для яких має місце наслідок 3, є, зокрема, функції $\psi(u)=$ $=\dfrac{1}{u^2}\operatorname{arctg}u$, $\psi(u)=\dfrac{1}{u^2}(K+e^{-u})$, $\psi(u)=\dfrac{1}{u^2}\ln^{\alpha}(u+K)$, $K>0$, $-1\leq\alpha\leq 0$.

Зокрема, якщо $\psi(u)=\dfrac{1}{u^2}$, то з (78) отримуємо такий результат:

$$\mathcal{E}\left(W^2_{\beta,\infty};B_\delta\right)_C=\frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{\ln\delta}{\delta^2}+O\left(\frac{1}{\delta^2}\right),\quad \delta\to\infty.$$

Зауважимо, що при виконанні умов наслідків 1 – 3 рівності (76) – (78) дають розв'язок задачі Колмогорова – Нікольського для бігармонічних інтегралів Пуассона на класах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ у метриці простору C, коли функції $\psi(\cdot)$ мають незначну швидкість спадання до нуля.

1. *Тиман М. Ф.* Аппроксимация и свойства периодических функций. – Киев: Наук. думка, 2009. – 376 с.
2. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье. – Киев, 1983. – 57 с. – (Препринт /АН УССР. Ин-т математики; 83.10).
3. *Nagy B.* Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I // Ber. Acad. Wiss. – Leipzig, 1938. – **90**. – S. 103 – 134.
4. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
5. *Степанец А. И.* Методы теории приближения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427 с.
6. *Каниев С.* Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений // Докл. АН СССР. – 1963. – **153**, № 5. – С. 995 – 998.
7. *Pych P.* On a biharmonic function in unit disc // Ann. pol. math. – 1968. – **20**, № 3. – P. 203 – 213.
8. *Фалалеев Л. П.* Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $\mathrm{Lip}_1 1$ от одного сингулярного интеграла // Теоремы вложения и их приложения (Мат. Всесоюз. симп.). – Алма-Ата: Наука КазССР, 1976. – С. 163 – 167.
9. *Аманов Т. И, Фалалеев Л. П.* Приближение дифференцируемых функций операторами типа Абеля – Пуассона // 5-е сов.-чех. сов. по применению методов теории функций и функцион. анализа к задачам мат. физики (Алма-Ата: Тр. сов). – Новосибирск, 1979. – С. 13 – 16.
10. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Наближення диференційовних періодичних функцій їх бігармонійними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 9. – С. 1213 – 1219.
11. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Наближення спряжених диференційовних функцій бігармонічними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 3. – С. 333 – 345.
12. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Наближення функцій із класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ бігармонічними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 7. – С. 939 – 959.
13. *Заставный В. П.* Точная оценка приближения некоторых классов дифференцируемых функций сверточными операторами // Укр. мат. вісн. – 2010. – **7**, № 3. – С. 409 – 433.
14. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **62**. – С. 61 – 97.
15. *Рукасов В. И.* Приближение периодических функций линейными средними их рядов Фурье. – Киев, 1983. – 55 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.62).
16. *Баусов Л. И.* Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами. I // Изв. вузов. Математика. – 1965. – **46**, № 3. – С. 15 – 31.
17. *Жигалло Т. В., Харкевич Ю. І.* Наближення (ψ, β)-диференційовних функцій інтегралами Пуассона у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 11. – С. 1497 – 1515.

Одержано 05.09.11