УДК 514

В. А. Горькавый, Е. Н. Невмержицкая

(Физ.-техн. ин-т низких температур НАН Украины, Харьков)

О ДВУМЕРНЫХ ПСЕВДОСФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ С ВЫРОЖДЕННЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ БИАНКИ

We classify two-dimensional pseudospherical surfaces with degenerate Bianchi transformation in a multidimensional Euclidean space.

Класифіковано двовимірні псевдосферичні поверхні з виродженим перетворенням Біанкі в багатовимірному евклідовому просторі.

1. Введение. Работа посвящена описанию двумерных псевдосферических поверхностей с вырожденным преобразованием Бианки в многомерном евклидовом пространстве.

Напомним классическое определение преобразования Бианки (см. [1, 2]). Пусть F^2 — псевдосферическая поверхность в E^3, т. е. поверхность с постоянной отрицательной гауссовой кривизной $K \equiv -1$. Зададим F^2 радиусом-вектором $r = r(u,v)$ в орициклических координатах (u,v), когда метрика поверхности имеет вид

$$ds^2 = du^2 + e^{-2v} dv^2. \tag{1}$$

По определению преобразование Бианки переводит поверхность F^2 в новую поверхность $\widetilde{F}^2 \subset E^3$ с радиусом-вектором

$$\tilde{r}(u,v) = r + \partial_u r. \tag{2}$$

Данное преобразование имеет ряд интересных свойств, основным среди которых является следующее (ср. с [1, 2]).

Теорема 1. *Преобразованная поверхность $\widetilde{F}^2 \subset E^3$ является псевдосферической и имеет ту же гауссову кривизну, что и F^2, т. е. $\tilde{K} \equiv K \equiv -1$.*

Таким образом, преобразование Бианки позволяет по заданной псевдосферической поверхности строить новые псевдосферические поверхности. Основная трудность построения состоит в задании орициклической системы координат на псевдосферической поверхности F^2.

Преобразование Бианки было обобщено Ю. А. Аминовым на случай F^n в E^{2n-1}, $n \geqslant 3$ (см. [1], гл. 10:24, [3]). Псевдосферическое подмногообразие F^n задавалось радиусом-вектором $r = r(u, v_1, \ldots, v_{n-1})$ в орисферических координатах $(u, v_1, \ldots, v_{n-1})$, метрика записывалась в стандартном виде $ds^2 = du^2 + e^{-2u}\left(\sum_{i=1}^{n-1} dv_i^2\right)$. Преобразование Бианки строилось по формуле (2), при этом оказалось, что имеет место аналог теоремы 1: *преобразование Бианки переводит псевдосферическое подмногообразие $F^n \subset E^{2n-1}$ в псевдосферическое подмногообразие $\tilde{F}^n \subset E^{2n-1}$ той же постоянной отрицательной секционной кривизны.*

Актуальным является вопрос о построении теории преобразования Бианки и более общего преобразования Беклунда для псевдосферических подмногообразий в евклидовых пространствах *произвольной размерности*. Ю. А. Аминов и А. Сым [4] решали эту задачу для двумерных псевдосферических поверхностей в четырехмерном евклидовом пространстве E^4. На поверхности с кривизной $K \equiv -1$ выби-

© В. А. ГОРЬКАВЫЙ, Е. Н. НЕВМЕРЖИЦКАЯ, 2011

рались орициклические координаты, и преобразование Бианки строилось по стандартной формуле (2). Оказалось, что преобразованная поверхность, вообще говоря, уже не будет псевдосферической, т. е. теорема 1 для псевдосферических поверхностей в E^4 не верна. С другой стороны, было показано, что при некоторых дополнительных требованиях преобразование Бианки все же переводит псевдосферическую поверхность в псевдосферическую. Иначе говоря, был выделен *класс специальных псевдосферических поверхностей* в E^4, для которых теорема 1 верна [4]. Подробное описание этих поверхностей в терминах фундаментальных форм представлено в [5].

В общем случае преобразование Бианки является регулярным. Но, вообще говоря, на преобразованной поверхности $\widetilde{F}$ могут возникать особенности (в теореме 1, как и в ее многомерном аналоге, речь идет о регулярной части поверхности $\widetilde{F}$). Более того, иногда преобразованная поверхность $\widetilde{F}$ может вырождаться в кривую — в этом случае преобразование Бианки называется *вырожденным*.

В качестве примера рассмотрим поверхность Бельтрами (псевдосферу) в E^3. Эта поверхность получена вращением трактрисы, ее радиус-вектор можно представить в виде

$$r = \big(\Phi(u), e^{-u}\cos v, e^{-u}\sin v\big), \tag{3}$$

где функция $\Phi(u)$ определяется из соотношения $|\Phi'| = \sqrt{1-e^{-2u}}$. Легко проверить, что координаты (u, v) на поверхности Бельтрами являются орициклическими, а ее гауссова кривизна $K \equiv -1$. Применив к поверхности Бельтрами преобразование Бианки по формуле (2), получим вектор-функцию $\tilde{r} = (\Phi + \Phi', 0, 0)$ которая описывает прямую — ось вращения поверхности Бельтрами. Этот пример является исключительным, других псевдосферических поверхностей с вырожденным преобразованием Бианки в E^3 нет.

Основной целью работы является *описание псевдосферических поверхностей с вырожденным преобразованием Бианки в многомерном евклидовом пространстве E^N при произвольном $N \geqslant 3$.* Ранее эта задача при $N = 4$ решалась нами в [6]: было указано, какой вид должны иметь фундаментальные формы псевдосферической поверхности F^2 в E^4, чтобы ее преобразование Бианки было вырожденным.

В настоящей работе дается полное решение проблемы при произвольном $N \geq 3$. А именно, как основной результат, установлено, какой вид должен иметь радиус-вектор псевдосферической поверхности F^2 в E^N, чтобы ее преобразование Бианки было вырожденным.

На первом этапе доказательства вводится специальный класс кривых в E^N, которые названы *обобщенными трактрисами.* Затем с помощью применения к обобщенным трактрисам специальных движений в E^N строится специальный класс псевдосферических поверхностей в E^N, которые названы обобщенными поверхностями Бельтрами. Доказывается, что каждая обобщенная поверхность Бельтрами допускает преобразование Бианки, являющееся вырожденным. В завершающей части показано, что если преобразование Бианки псевдосферической поверхности в E^N является вырожденным, то такая поверхность должна быть обобщенной поверхностью Бельтрами.

Кроме того, в дополнение к основной части представлены конструктивные методы построения обобщенных трактрис и обобщенных поверхностей Бельтрами в E^N. Как применение изложенной методики, доказано, что любая кривая в E^n, $n \leqslant N-2$, локально может быть получена вырожденным преобразованием некоторой обобщенной поверхности Бельтрами в E^N.

2. Обобщенные трактрисы. Пусть γ — регулярная ориентированная кривая в E^{n+1}, не лежащая ни в каком подпространстве из E^{n+1}. От каждой точки кривой γ отложим отрезок единичной длины вдоль касательной прямой соответственно выбранной ориентации. Концы отрезков опишут новую кривую Γ.

Определение 1. *Кривую $\gamma \in E^{n+1}$ назовем обобщенной трактрисой, если Γ лежит в некотором подпространстве $E^n \subset E^{n+1}$. Кривую Γ назовем следом обобщенной трактрисы γ.*

Дадим аналитическое описание обобщенной трактрисы γ. Представим пространство E^{n+1} в виде прямой суммы $E^{n+1} = E^n \oplus E^1$ и зададим декартовы координаты $x^1, \ldots, x^{n+1}$ в E^{n+1} так, чтобы содержащее кривую Γ подпространство E^n задавалось уравнением $x^{n+1} = 0$. Через $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_{n+1}$ обозначим соответствующий ортонормированный базис в E^{n+1}.

Пусть $f(u) = (f_1(u), \ldots, f_n(u), f_{n+1}(u))$ — радиус-вектор кривой γ. Не уменьшая общности, будем предполагать, что u — натуральный параметр на γ, выбранный в соответствии с ориентацией, т. е. $|f'| \equiv 1$.

Кривая Γ задается радиусом-вектором $\xi = f + f' = (f_1 + {f_1}', \ldots, f_{n+1} + {f_{n+1}}')$. Следовательно, Γ лежит в гиперплоскости E^n тогда и только тогда, когда $f_{n+1} + {f_{n+1}}' = 0$. Решая это уравнение, получаем $f_{n+1} = Be^{-u}$, где B — некоторая постоянная. Поскольку предполагается, что γ не лежит ни в каком подпространстве из E^{n+1}, константа B отлична от нуля. Применяя сдвиг $u \to u + u_0$, а если B отрицательно, то и симметрию относительно рассматриваемой гиперплоскости E^n в E^{n+1}, можно добиться того, что $B = 1$, т. е. $f_{n+1} = e^{-u}$.

Таким образом, при соответствующем выборе декартовых координат в пространстве E^{n+1} и натурального параметра на γ радиус-вектор обобщенной трактрисы γ записывается как

$$f(u) = \left(f_1(u), \ldots, f_n(u), e^{-u}\right), \tag{4}$$

при этом условие натуральности параметра u имеет вид

$$({f_1}')^2 + \ldots + ({f_n}')^2 = 1 - e^{-2u}. \tag{5}$$

Для удобства введем вектор-функцию $\phi(u) = (f_1(u), \ldots, f_n(u), 0)$. Тогда радиус-вектор (4) запишется в виде

$$f = \phi(u) + e^{-u}\mathrm{e}_{n+1}, \tag{6}$$

а условие (5) примет вид

$$|\phi'|^2 = 1 - e^{-2u}. \tag{7}$$

Как следствие, задание обобщенной трактрисы γ, параметризованной натуральным параметром, сводится к заданию вектор-функции $\phi(u)$, удовлетворяющей (7). Что касается кривой Γ, то ее радиус-вектор в терминах $\phi(u)$ записывается как $\xi = \phi + \phi'$.

Заметим, что если $n = 1$, то $\phi(u)$ представляет собой функцию, определяемую из (7) однозначно с точностью до слагаемого и знака, а радиус-вектор (4) задает в точности обычную трактрису в E^2. Если же $n \geqslant 2$, то вектор-функция $\phi(u)$ определяется из (7) неоднозначно, что порождает большое разнообразие различных обобщенных трактрис в E^{n+1}.

Обратим внимание, что любая обобщенная трактриса γ не является полной в том смысле, что выбранный на γ натуральный параметр u должен удовлетворять ограничению $u \geqslant 0$ в (7). Дальнейшее обсуждение свойств обобщенных трактрис и методов их построения будет приведено в завершающей части статьи.

3. Обобщенные поверхности Бельтрами. Теперь рассмотрим пространство $E^{n+1} = E^n \oplus E^1$ как подпространство в $E^{n+m} = E^n \oplus E^m$, $m \geqslant 2$, естественным образом дополнив выбранные выше декартовы координаты $x^1, \ldots, x^{n+1}$ и ортонормированный базис $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_{n+1}$ в E^{n+1} до декартовых координат $x^1, \ldots, x^{n+m}$ и ортонормированного базиса $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_{n+m}$ в E^{n+m}.

В пространстве E^{n+m} рассмотрим поверхность F^2 с радиусом-вектором

$$r(u,v) = \phi(u) + e^{-u}\rho(v), \tag{8}$$

где вектор-функция $\phi(u) = (f_1(u), \ldots, f_n(u); 0, \ldots, 0)$ удовлетворяет (7) и порождает обобщенную трактрису γ с радиусом-вектором (4), а вектор-функция $\rho(v) = (0, \ldots, 0; \rho_1(v), \ldots, \rho_m(v))$ удовлетворяет условиям

$$|\rho| \equiv 1, \tag{9}$$

$$|\rho'| \equiv 1 \tag{10}$$

и задает некоторую кривую γ^*, параметризованную натуральным параметром, на единичной сфере $S^{m-1} \subset E^m$. С геометрической точки зрения, поверхность F^2 получена „вращением” обобщенной трактрисы γ вдоль сферической кривой γ^*.

Легко видеть, что при $n = 1$, $m = 2$ радиус-вектор (8), удовлетворяющий указанным свойствам, описывает классическую поверхность Бельтрами (3). Если же $n \geq 2$ или $m \geqslant 3$, то предложенная конструкция позволяет строить и другие поверхности, отличные от поверхности Бельтрами; будем называть их *обобщенными поверхностями Бельтрами*. Естественность такого обобщения подтверждает следующее утверждение.

Утверждение 1. *Предположим, что поверхность F^2 в $E^{n+m} = E^n \oplus E^m$ задана радиусом-вектором* (8), *где $\phi(u) \in E^n$ и $\rho(v) \in E^m$ удовлетворяют условиям* (7), (9) *и* (10). *Тогда F^2 обладает следующими свойствами*:

1) *F^2 является псевдосферической, гауссова кривизна $K \equiv -1$*;

2) *координаты (u, v) являются орициклическими, т. е. $ds^2 = du^2 + e^{-2u}dv^2$, а F^2 не является полной и представляет собой изометрически погруженный в E^{n+m} орикруг плоскости Лобачевского*;

3) *преобразование Бианки* (2), *примененное к поверхности F^2, является вырожденным*.

Доказательство. Запишем касательные векторы поверхности F^2, дифференцируя радиус-вектор (8):

$$\partial_u r = ((f_1)', \ldots, (f_n)'; -e^{-u}\rho_1, \ldots, -e^{-u}\rho_m) = \phi' - e^{-u}\rho,$$

$$\partial_v r = (0, \ldots, 0; e^{-u}(\rho_1)', \ldots, e^{-u}(\rho_m)') = e^{-u}\rho'.$$

Учитывая, что $\phi(u)$ и $\rho(v)$ лежат в ортогональных подпространствах E^n и E^m соответственно, и принимая во внимание условия (7), (9) и (10), не составляет труда прямым вычислением скалярных произведений проверить, что первая фундаментальная форма поверхности будет иметь вид $ds^2 = du^2 + e^{-2u}dv^2$. Как следствие, гауссова кривизна $K \equiv -1$, поверхность F^2 является псевдосферической, а координаты u, v на ней являются орициклическими. Выполнение условия (7) накладывает ограничение $u \geqslant 0$, т. е. F^2 изометрична орикругу плоскости Лобачевского.

Применяя к поверхности F^2 преобразование Бианки по формуле (2), получаем

$$\tilde{r}(u, v) = r + \partial_u r = \phi + \phi'.$$

Радиус-вектор $\tilde{r}$ зависит только от u, а значит, преобразованная поверхность $\tilde{F}^2$ вырождается в кривую. Заметим, что вектор-функция $\phi + \phi'$ описывает в точности след Γ обобщенной трактрисы γ, вращением которой образована рассматриваемая обобщенная поверхность Бельтрами F^2.

Утверждение доказано.

Таким образом, обобщенные поверхности Бельтрами наследуют основные геометрические свойства классической поверхности Бельтрами.

4. Двумерные псевдосферические поверхности в E^N с вырожденным преобразованием Бианки. В предыдущем пункте мы показали, что преобразование Бианки двумерной обобщенной поверхности Бельтрами в E^N будет вырожденным. Оказывается, что только обобщенные поверхности Бельтрами обладают свойством вырожденности преобразования Бианки. А именно, имеет место следующая теорема.

Теорема. *Предположим, что преобразование Бианки двумерной псевдосферической поверхности F^2 в евклидовом пространстве E^N является вырожденным. Тогда F^2 представляет собой обобщенную поверхность Бельтрами.*

Доказательство. Пусть $F^2 \subset E^N$ — псевдосферическая поверхность с гауссовой кривизной $K \equiv -1$, заданная радиусом-вектором $r = r(u, v)$ в орициклической системе координат, когда $ds^2 = du^2 + e^{-2u}dv^2$. Запишем необходимые нам уравнения Вейнгартена:

$$\partial_{uu} r = L^{\sigma}_{11} n_{\sigma}, \tag{11}$$

$$\partial_{uv} r = -\partial_v r + L^{\sigma}_{12} n_{\sigma}, \tag{12}$$

где через n_σ и L^{σ}_{ij} обозначены ортонормированные нормали поверхности F^2 и коэффициенты соответствующих им вторых фундаментальных форм.

Применим к поверхности F^2 преобразование Бианки по формуле (2) и запишем касательные векторы преобразованной поверхности $\tilde{F}^2$, продифференцировав (2) и применив (11), (12):

$$\begin{aligned} \partial_u \tilde{r} &= \partial_u r + \partial_{uu} r = \partial_u r + L^{\sigma}_{11} n_{\sigma}, \\ \partial_v \tilde{r} &= \partial_v r + \partial_{uv} r = L^{\sigma}_{12} n_{\sigma}. \end{aligned} \tag{13}$$

Преобразование Бианки вырождено тогда и только тогда, когда выполняется условие $[\partial_u \tilde{r}, \partial_v \tilde{r}] \equiv 0$. Подставляя (13), получаем условие $L^{\sigma}_{12}[n_\sigma, \partial_v r] + L^{\nu}_{11} L^{\sigma}_{12}[n_\nu, n_\sigma] \equiv 0$. Поскольку бивекторы $[n_\sigma, \partial_v r]$, $[n_\nu, n_\sigma]$ взаимно ортогональны, а значит и линейно независимы, последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда $L^{\sigma}_{12} \equiv 0$, $\sigma = \overline{1, N-2}$.

Таким образом, если преобразование Бианки вырожденное, то вторые фундаментальные формы поверхности $F^2 \subset E^N$ диагональны, а значит, координатные линии $u = \mathrm{const}$ и $v = \mathrm{const}$ орициклической системы координат являются еще и линиями кривизны.

Уравнение (12) в рассматриваемой ситуации упрощается:

$$\partial_{uv} r = -\partial_v r. \tag{14}$$

Его общее решение имеет вид

$$r(u,v) = \psi(v)e^{-u} + \beta(u), \tag{15}$$

где $\psi(v)$ и $\beta(u)$ — некоторые вектор-функции. Вследствие орицикличности координат (u,v) на $\psi(v)$ и $\beta(u)$ накладываются определенные ограничения. В частности, дифференцируя (15) и записывая условие $\langle \partial_u r, \partial_v r \rangle = 0$, соответствующее условию ортогональности орициклических координат, получаем соотношение

$$\langle -\psi e^{-u} + \beta', \psi' \rangle = 0. \tag{16}$$

Записав это равенство в виде $\langle e^u \beta', \psi' \rangle = \langle \psi, \psi' \rangle$ и продифференцировав по u, будем иметь

$$\langle (e^u \beta')', \psi' \rangle = 0. \tag{17}$$

Заметим, что в левой части (17) первый сомножитель зависит от u, а второй — от v. В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Лемма. *Пусть вектор-функции $\xi(u)$, $\eta(v) \in E^N$ таковы, что $\langle \xi, \eta \rangle \equiv 0$. Тогда существует разложение E^N в прямую сумму взаимно ортогональных подпространств E^n, E^m так, что $\xi(u) \in E^n$, $\eta(v) \in E^m$.*

Доказательство. Рассмотрим подпространство E^{n_1}, являющееся линейной оболочкой всех значений вектор-функции $\xi(u)$, и подпространство E^{m_1}, являющееся линейной оболочкой всех значений вектор-функции $\eta(v)$. Поскольку $\langle \xi(u), \eta(v) \rangle \equiv 0$, подпространства E^{n_1} и E^{m_1} взаимно ортогональны. Тогда пространство E^N можно представить в виде прямой суммы этих подпространств и, возможно, еще дополнительного третьего подпространства, ортогонального к первым двум: $E^N = E^{n_1} \oplus E^{m_1} \oplus E^{N-(n_1+m_2)}$. Относя третье слагаемое к первому или второму, и получаем требуемое разложение.

Применяя лемму к вектор-функциям $\xi = (e^u \beta')'$ и $\eta = \psi'$, взаимно ортогональным в силу (17), убеждаемся, что имеет место разложение $E^N = E^n \oplus E^m$ такое, что $(e^u \beta')' \in E^n$, а $\psi' \in E^m$.

Из того, что $\psi' \in E^m$, следует, что $\psi(v) = \psi_0 + \widehat{\psi}(v)$, где $\widehat{\psi}(v) \in E^m$ — некоторая вектор-функция, а $\psi_0 \in E^n$ — постоянный вектор.

В свою очередь, из $(e^u \beta')' \in E^n$ вытекает, что $\beta(u) = \hat{\beta}(u) + e^{-u}\beta_0 + \beta_1$, где $\hat{\beta}(u) \in E^n$ — некоторая вектор-функция, а β_0, $\beta_1 \in E^m$ — постоянные векторы.

Как следствие, радиус-вектор (15) рассматриваемой поверхности F^2 запишем в виде

$$r(u,v) = \psi_0 e^{-u} + \widehat{\psi}(v)e^{-u} + \hat{\beta}(u) + \beta_0 e^{-u} + \beta_1.$$

Полагая $\rho(v) = \hat{\psi}(v) + \beta_0$, $\phi(u) = \psi_0 e^{-u} + \hat{\beta}(u)$ и избавляясь от β_1 с помощью параллельного переноса, получаем

$$r(u,v) = \phi(u) + \rho(v)e^{-u}, \tag{18}$$

при этом $\phi(u) \in E^n$, $\rho(v) \in E^m$.

Вычисляя коэффициенты первой квадратичной формы поверхности F^2 с радиусом-вектором (18), записываем условия орицикличности координат (u,v):

$$\langle \phi', \phi' \rangle + e^{-2u} \langle \rho, \rho \rangle = 1, \tag{19}$$

$$\langle \rho, \rho' \rangle = 0, \tag{20}$$

$$e^{-2u} \langle \rho', \rho' \rangle = e^{-2u}. \tag{21}$$

Равенство (21) эквивалентно (10). Равенство (20) означает, что $|\rho| \equiv \mathrm{const}$; используя, при необходимости, сдвиг $u \to u + u_0$ в (18), получаем, что $|\rho| \equiv 1$, а значит, (20) эквивалентно (9). Наконец, поскольку $|\rho| \equiv 1$, (19) сводится к (7). Значит, рассматриваемая псевдосферическая поверхность F^2 является обобщенной поверхностью Бельтрами, что и требовалось доказать.

Таким образом, обобщенные поверхности Бельтрами в E^N характеризуются, в классе пседвосферических поверхностей, тем, что их преобразование Бианки является вырожденным.

5. Методы построения обобщенных трактрис в E^{n+1}. Опишем два подхода к построению обобщенных трактрис в многомерном евклидовом пространстве.

5.1. Метод А. Возьмем произвольную единичную вектор-функцию $a = (a_1(u), \ldots, a_n(u); 0)$ в E^{n+1} и построим по ней новую вектор-функцию

$$\phi = \int \sqrt{1 - e^{-2u}}\, a(u) du \tag{22}$$

с нулевой последней координатой. Легко видеть, что так заданная вектор-функция $\phi(u)$ удовлетворяет условию (7) и порождает обобщенную трактрису γ с радиусом-вектором (6).

В качестве примера покажем, как строится обобщенная трактриса в E^3, т. е. при $n = 2$. Рассмотрим единичную вектор-функцию $a(u) = (\cos\alpha(u),\ \sin\alpha(u); 0)$, определяемую произвольной гладкой функцией $\alpha(u)$. Тогда, следуя (22), получаем

$$\phi = \left(\int \sqrt{1 - e^{-2u}} \cos\alpha(u)\, du, \int \sqrt{1 - e^{-2u}} \sin\alpha(u)\, du; 0 \right).$$

Соответствующая обобщенная трактриса $\gamma \in E^3$ задается радиусом-вектором

$$f = \left(\int \sqrt{1 - e^{-2u}} \cos\alpha(u)\, du, \int \sqrt{1 - e^{-2u}} \sin\alpha(u)\, du; e^{-u} \right).$$

Отметим, что произвол в построении обобщенной трактрисы в E^3 определяется произволом в выборе функции $\alpha(u)$.

5.2. Метод Б. Рассмотрим более общую задачу, состоящую в том, как по заданной кривой $\Gamma \in E^{n+1}$ восстановить кривую $\gamma \in E^{n+1}$ так, чтобы концы единичных касательных векторов $\dot{\gamma}$, взятых в каждой точке γ, описывали исходную кривую Γ.

В частном случае, когда кривая Γ лежит в подпространстве $E^n \subset E^{n+1}$, речь идет о восстановлении обобщенной трактрисы γ по заданному следу $\Gamma \in E^{n+1}$.

С аналитической точки зрения, по заданной вектор-функции $w = w(\sigma)$, представляющей кривую Γ в произвольной параметризации σ, необходимо найти вектор-функцию $f = f(\sigma)$, представляющую кривую γ, исходя из связывающего их соотношения

$$f + f' \frac{1}{|f'|} = w, \tag{23}$$

которое принимает вид

$$f' = (w - f)\,|f'|\,. \tag{24}$$

Очевидно, что любое решение $f(\sigma)$ уравнения (24) удовлетворяет и соотношению

$$|w - f| \equiv 1. \tag{25}$$

При выполнении (25) уравнение (24) записывается в виде

$$f' = \langle w - f, f' \rangle\,(w - f)\,. \tag{26}$$

Дифференцируя (25), находим $\langle w - f, w' \rangle = \langle w - f, f' \rangle$. Как следствие, уравнение (26) принимает вид

$$f' = \langle w - f, w' \rangle\,(w - f)\,. \tag{27}$$

Таким образом, исходное уравнение (23) сводится к системе двух уравнений (27) и (25).

Задавая начальное значение $f(\sigma_0) = f_0$, находим решение $f(\sigma)$ уравнения (27). Чтобы это решение удовлетворяло и требованию (25), следует задавать начальное условие $f(\sigma_0)$ так, чтобы выполнялось естественное требование $|w(\sigma_0) - f_0| = 1$. Как результат, получим решение исходного уравнения (23), что и требовалось.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 2. *Для произвольно заданной кривой $\Gamma \in E^{n+1}$ локально существует кривая $\gamma \in E^{n+1}$ такая, что концы единичных касательных векторов $\dot{\gamma}$, взятых в каждой точке γ, описывают исходную кривую Γ.*

Отметим, что основная аналитическая сложность в рассмотренном подходе состоит в нахождении решения $f(\sigma)$ обыкновенного дифференциального уравнения (27).

В частном случае, когда Γ лежит в подпространстве $E^n \subset E^{n+1}$, из утверждения 2 получаем такое следствие.

***Следствие* 1.** *Для произвольной кривой $\Gamma \in E^n \subset E^{n+1}$ локально существует обобщенная трактриса $\gamma \in E^{n+1}$, след которой совпадает с заданной кривой Γ.*

Заметим только, что при восстановлении обобщенной трактрисы $\gamma \subset E^{n+1}$ по заданному следу $\Gamma \subset E^n$ необходимо проконтролировать, что восстанавливаемая кривая γ не лежит в E^n – это достигается выбором начального условия $f(\sigma_0)$ трансверсально к E^n.

Учитывая связь обобщенных трактрис и обобщенных поверхностей Бельтрами, получаем такое следствие.

***Следствие* 2.** *Для произвольной кривой* $\Gamma \in E^n \subset E^{n+m}$, $m \geq 2$, *локально существует обобщенная поверхность Бельтрами* F^2 *в* E^{n+m}, *вырожденное преобразование Бианки которой переводит* F^2 *в* Γ.

Вопрос об описании n-мерных псевдосферических подмногообразий в N-мерном евклидовом пространстве, у которых преобразование Бианки является вырожденным ранга k, при произвольных $n \geq 3$, $N \geq 2n-1$ и $1 \leq k \leq n-1$ является значительно более сложным и остается открытым.

1. *Аминов Ю. А.* Геометрия подмногообразий. – Киев: Наук. думка, 2002. – 434 с.
2. *Tenenblat K.* Transformations of manifolds and applications to differential equations // Pitman Monogr. and Surv. Pure and Appl. Math. – Harlow: Longman, 1998. – № 93. – 224 p.
3. *Масальцев Л. А.* Псевдосферическая конгруэнция Бианки в E^{2n-1} // Мат. физика, анализ, геометрия. – 1994. – **1**, № 3/4. – С. 505 – 512.
4. *Aminov Yu., Sym A.* On Bianchi and Backlund transformations of two-dimensional surfaces in E^4 // Math. Phys., Anal., Geom. – 2000. – **3**, № 1. – P. 505 – 512.
5. *Горькавый В. А.* Конгруэнции Бианки двумерных поверхностей в E^4 // Мат. сб. – 2005. – **196**, № 10. – С. 79 – 102.
6. *Горькавый В. А., Невмержицкая Е. Н.* О двумерных псевдосферических поверхностях в E^4 с вырожденным преобразованием Бианки // Доп. НАН України. – 2010. – № 6. – С. 13 – 18.

Получено 24.11.10