УДК 517.5

Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов

(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

АНАЛОГИ ЛЕММЫ ИКОМА – ШВАРЦА И ТЕОРЕМЫ ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

In the present paper, we obtain results on the local behavior of open discrete mappings $f\colon D\to\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, that satisfy certain conditions related to the distortion of capacities of condensers. It is shown that, in an infinitesimal neighborhood of zero, the indicated mapping cannot grow faster than an integral of a special type that corresponds to the distortion of the capacity under this mapping, which is an analog of the well-known growth estimate of Ikoma proved for quasiconformal mappings of the unit ball into itself and of the classical Schwartz lemma for analytic functions. For mappings of the indicated type, we also obtain an analogue of the well-known Liouville theorem for analytic functions.

Отримано результати про локальну поведінку відкритих дискретних відображень $f\colon D\to\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, що задовольняють певні умови, пов'язані зі спотворенням ємностей конденсаторів. Показано, що у як завгодно малому околі нуля таке відображення зростає не швидше за інтеграл спеціального типу, який відповідає за спотворення ємності за відображенням, що є аналогом відомої оцінки зростання К. Ікома щодо квазіконформних відображень одиничної кулі у себе, а також класичної леми К. Шварца для аналітичних функцій. Крім того, для відображень вказаного вище типу отримано аналог відомої теореми Ліувілля для аналітичних функцій.

1. Введение. Пространственные отображения, аналогичные рассматриваемым в настоящей работе, и известные, как отображения, квазиконформные в среднем, по-видимому, впервые изучались в 1986 г. в одной из работ В. И. Кругликова (см. [1]). Основная цель настоящей статьи заключается в установлении одного неравенства для открытых дискретных отображений с произвольной характеристикой квазиконформности, определенных в единичном шаре $\mathbb{B}^n$ пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$. Одним из следствий, полученных в ходе проведенных рассуждений, является аналог теоремы Лиувилля для аналитических функций. Определения и обозначения, используемые в настоящей статье, могут быть найдены, например, в работах [2, 3].

В 1965 г. К. Икома получил следующий аналог леммы Шварца для аналитических функций, доказанный им для квазиконформных отображений трехмерного пространства (см., например, теорему 2 в [4]).

Утверждение 1. *Предположим, что* $f\colon\mathbb{B}^3\to\mathbb{B}^3$ — *квазиконформное отображение, удовлетворяющее условию* $f(0)=0$, *преобразующее каждый радиус единичного шара в кривую, ортогональную к образу сферы* $|x|=r$ *при всех* $r>0$, $r<1$. *Тогда*

$$\liminf_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^{\left(\frac{1}{K}\right)^{1/2}}}\leq 1, \tag{1}$$

где K — *постоянная квазиконформности, определяемая из неравенства*

$$(1/K)\,M(\Gamma)\leq M(f(\Gamma))\leq K\,M(\Gamma). \tag{2}$$

Пусть $Q\colon D\to[0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция. В дальнейшем символ $q_{x_0}(r)$ обозначает среднее интегральное значение функции $Q(x)$ над сферой $|x-x_0|=r$,

$$q_{x_0}(r):=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{|x-x_0|=r}Q(x)\,dS, \tag{3}$$

где dS — элемент площади поверхности S, а ω_{n-1} обозначает площадь единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1} := S(0,1)$ в $\mathbb{R}^n$.

Одним из основных результатов настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $n \geq 2$, $p \in (1,n]$, — *открытое дискретное кольцевое* (p,Q)*-отображение в точке* $x_0 = 0$, *удовлетворяющее условию* $f(0) = 0$. *Тогда при любом* $p \in (1,n)$ *имеет место оценка*

$$\liminf_{x\to 0}\ |f(x)| \left(1 + \frac{n-p}{p-1}\int\limits_{|x|}^{1} \frac{dt}{t^{(n-1)/(p-1)}\, q_0^{1/(p-1)}(t)}\right)^{(p-1)/(n-p)} \leq 1, \qquad (4)$$

а при $p = n$ — *оценка*

$$\liminf_{x\to 0}\ |f(x)| \exp\left\{\int\limits_{|x|}^{1} \frac{dt}{t q_0^{1/(n-1)}(t)}\right\} \leq 1. \qquad (5)$$

***Замечание* 1.** Заметим, что соотношение (5) влечет неравенство вида (1) при $n = 3$ и $\alpha = K^{1/2}$, как только $Q \equiv K = \mathrm{const}$ в (5). Из изложенного выше следует, что утверждение 1 вытекает из теоремы 1 как ее частный случай при $p = n = 3$.

Другим, не менее важным результатом настоящей статьи является аналог теоремы Лиувилля для аналитических функций, заключающийся в следующем.

Теорема 2. *Предположим, что* $Q(x)$, $Q\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$, — *заданная измеримая по Лебегу функция,* x_0 — *произвольная фиксированная точка в* $\mathbb{R}^n$, $r_0 > 0$ — *произвольное фиксированное вещественное число и* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — *открытое дискретное кольцевое* (n,Q)*-отображение в точке* x_0. *Тогда*

$$\limsup_{x\to\infty}\ |f(x)| \exp\left\{-\int\limits_{r_0}^{|x-x_0|} \frac{dt}{t q_{x_0}^{1/(n-1)}(t)}\right\} = M > 0. \qquad (6)$$

В частности, f *не может быть ограничено в* $\mathbb{R}^n$ *при условии, что расходится интеграл от* r_0 *до* ∞ *вида*

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{t q_{x_0}^{1/(n-1)}(t)} = \infty. \qquad (7)$$

***Замечание* 2.** Если $Q(x) \leq K = \mathrm{const}$, то из (6) при $r_0 := 1$ и $x_0 := 0$ получаем известный результат О. Мартио, С. Рикмана, Ю. Вяйсяля для отображений с ограниченным искажением (см. теорему 3.7 в [5]):

$$\limsup_{x\to\infty} |f(x)||x|^{\left(-\frac{1}{K^{1/(n-1)}}\right)} > 0. \qquad (8)$$

Пусть $x_0 \in D$, $r_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, $Q\colon D \to [0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция,

$$A = A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon r_1 < |x - x_0| < r_2\}, \qquad (9)$$

$$S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x - x_0| = r_i\}.$$

Полагаем $l\left(f'(x)\right) := \inf_{h\in\mathbb{R}^n:|h|=1}|f'(x)h|$,

$$K_I(x,f)=\begin{cases}\dfrac{|J(x,f)|}{l\left(f'(x)\right)^n}, & \text{если } J(x,f)\neq 0,\\ 1, & \text{если } f'(x)=0,\end{cases}$$

и $K_I(x,f)=\infty$ в остальных точках. Учитывая, что любое отображение f с ограниченным искажением при $Q(x)=K_I(x,f)$ и $p=n$ удовлетворяет соотношениям вида

$$M_p\left(f\left(\Gamma\left(S_1,\,S_2,\,A\right)\right)\right)\leq\int\limits_A Q(x)\eta^p(|x-x_0|)\,dm(x) \tag{10}$$

для любой неотрицательной измеримой функции $\eta\colon(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr\geq 1 \tag{11}$$

(см., например, теоремы 8.2 и 8.6 гл. VIII в [6]), можно показать, что в выражении (8) в качестве K можно взять $K=K_I(f)=\text{ess sup}\,K_I(x,f)$. В силу результатов той же работы [5], для отображений f с ограниченным искажением показатель степени при $|x|$ в левой части неравенства (8) является точным. Определение и примеры этих отображений могут быть найдены, например, в монографиях [7, 8].

По поводу использования оценок вида (10) см., например, теорему 3 разд. D, гл. I в [9], неравенство (6.6) разд. 6.3, гл. V в [10], а также [11, 12] и гл. VII в [6]. Отдельного внимания заслуживает работа Ф. Геринга [13].

2. Об интегральной характеристике кольцевых (p,Q)-отображений. Следующая лемма позволяет установить для отображения f выполнение свойств (10), (11) в точке x_0 без проверки бесконечного числа неравенств в (11). Ниже мы придерживаемся следующих стандартных соглашений: $a/\infty=0$ для $a\neq\infty$, $a/0=\infty$ для $a>0$ и $0\cdot\infty=0$.

Лемма 1. *Пусть $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое (p,Q)-отображение в точке $x_0\in D$, $p\in(1,n]$, и E — конденсатор вида $E=\Big(B(x_0,r_2),$ $\overline{B(x_0,r_1)}\Big)$, $0<r_1<r_2<\text{dist}\,(x_0,\partial D)$. Полагаем*

$$I=I(x_0,r_1,r_2)=\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^{(n-1)/(p-1)}q_{x_0}^{1/(p-1)}(r)}. \tag{12}$$

Тогда для конденсатора $f(E)=\Big(f\left(B(x_0,r_2)\right),f\left(\overline{B(x_0,r_1)}\right)\Big)$ выполнено соотношение

$$\text{cap}_p\,f(E)\;\leq\;\frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}. \tag{13}$$

Доказательство. Заметим, что пара $f(E)=\Big(f\left(B(x_0,r_2)\right),f\left(\overline{B(x_0,r_1)}\right)\Big)$, действительно, является конденсатором, ибо f открыто и непрерывно в D, следовательно, $f\left(\overline{B(x_0,r_1)}\right)$ является компактным подмножеством $f\left(B(x_0,r_2)\right)$. Не ограничивая общности рассуждений, можно полагать, что $I\neq 0$, так как в противном случае соотношение (13), очевидно, выполнено. Можно также считать, что $I \neq \infty$, так как в противном случае в соотношении (13) можно рассмотреть $Q(x) + \delta$ (со сколь угодно малым δ) вместо $Q(x)$, а затем перейти к пределу при $\delta \to 0$. Пусть $I \neq \infty$. Тогда $q_{x_0}(r) \neq 0$ почти всюду на (r_1, r_2). Полагаем

$$\psi(t) = \begin{cases} 1/[t^{(n-1)/(p-1)} q_{x_0}^{1/(p-1)}(t)], & t \in (r_1, r_2), \\ 0, & t \notin (r_1, r_2). \end{cases}$$

Тогда

$$\int\limits_A Q(x)\psi^p(|x - x_0|)\, dm(x) = \omega_{n-1} I, \tag{14}$$

где $A = A(r_1, r_2, x_0)$ задано соотношением (9). Заметим, что функция $\eta_1(t) = \psi(t)/I,\ t \in (r_1, r_2)$, удовлетворяет соотношению вида (11), так как $\int_{r_1}^{r_2} \eta_1(t)dt = 1$. Поэтому согласно равенству (14) и определению кольцевого (p, Q)-отображения (см. (10)),

$$M_p\left(f\left(\Gamma\left(S_1,\, S_2,\, A\right)\right)\right) \le \int\limits_A Q(x){\eta_1}^p(|x - x_0|)\, dm(x) = \frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}, \tag{15}$$

где $S_i = S(x_0, r_i)$. Пусть Γ_E и $\Gamma_{f(E)}$ — семейства кривых в смысле обозначений леммы 1 в [3] (см. также предложение 10.2 гл. II в [8]). Согласно этому предложению (либо из леммы 1 в [3])

$$\operatorname{cap}_p f(E) = \operatorname{cap}_p \Big(f\left(B\left(x_0, r_2\right)\right),\ f\Big(\overline{B(x_0, r_1)}\Big)\Big) = M_p\left(\Gamma_{f(E)}\right). \tag{16}$$

Пусть Γ^* — семейство максимальных поднятий $\Gamma_{f(E)}$ с началом в $\overline{B\left(x_0, r_1\right)}$. Тогда $\Gamma^* \subset \Gamma_E$ (см., например, доказательство леммы 1 в [14]). Заметим, что $\Gamma_{f(E)} > f(\Gamma^*)$ и для достаточно малых $\delta > 0$ $\Gamma_E > \Gamma\big(S(x_0, r_2 - \delta), S(x_0, r_1), D\big)$. Следовательно, в силу соотношения (15) и свойства минорирования

$$\Gamma_1 > \Gamma_2 \quad \Rightarrow \quad M_p(\Gamma_1) \le M_p(\Gamma_2)$$

(см. теорему 6.4 разд. 6, гл. I в [2]), получаем

$$M_p\left(\Gamma_{f(E)}\right) \le M_p\left(f(\Gamma^*)\right) \le M_p\left(f(\Gamma_E)\right) \le$$

$$\le M_p\left(f\left(\Gamma\left(S(x_0, r_1), S(x_0, r_2 - \delta), A(r_1, r_2 - \delta, x_0)\right)\right)\right) \le$$

$$\le \frac{\omega_{n-1}}{\left(\displaystyle\int_{r_1}^{r_2 - \delta} \frac{dt}{t^{(n-1)/(p-1)} q_{x_0}^{1/(p-1)}(t)}\right)^{p-1}}. \tag{17}$$

Заметим, что функция $\widetilde{\psi(t)} := \psi|_{(r_1, r_2)} = \dfrac{1}{t^{(n-1)/(p-1)} q_{x_0}^{1/(p-1)}(t)}$ суммируема на (r_1, r_2), так как по предположению $I \neq \infty$. Отсюда следствие абсолютной непрерывности интеграла имеем, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2 - \delta} \frac{dt}{t^{(n-1)/(p-1)} q_{x_0}^{1/(p-1)}(t)} \to \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{(n-1)/(p-1)} q_{x_0}^{1/(p-1)}(t)} \tag{18}$$

при $\delta \to 0$. Из (17) и (18) следует, что

$$M_p(\Gamma_{f(E)}) \leq \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{(n-1)/(p-1)} q_{x_0}^{1/(p-1)}(t)}\right)^{p-1}}. \qquad (19)$$

Объединяя (16) и (19), получаем соотношение (13).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < r_1 < r_2 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. *Полагаем*

$$\eta_0(r) = \frac{1}{I r^{(n-1)/(p-1)} q_{x_0}^{1/(p-1)}(r)}, \qquad (20)$$

где I — *величина, определенная в* (12)*. Тогда*

$$\frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}} = \int\limits_A Q(x) \eta_0^p(|x - x_0|)\, dm(x) \leq \int\limits_A Q(x) \eta^p(|x - x_0|)\, dm(x) \qquad (21)$$

для фиксированной измеримой функции $Q\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ *и любой функции* $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ *такой, что*

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr = 1. \qquad (22)$$

В частности, из (21) *следует, что для кольцевых* (p, Q)*-отображений в точке* x_0 *неравенство* (13)*, вообще говоря, не может быть улучшено.*

Доказательство. Если в левой части (21) имеет место условие $I = \infty$, доказывать нечего. Если $I = 0$, то $q_{x_0}(r) = \infty$ для почти всех $r \in (r_1, r_2)$, и обе части неравенства в (21) равны бесконечности. Предположим, что $0 < I < \infty$. Тогда из (12) и (22), в частности, следует, что $q_{x_0}(r) \neq 0$ и $\eta(r) \neq \infty$ при почти всех $r \in (r_1, r_2)$. Полагаем $\alpha(r) = r^{(n-1)/(p-1)} q_{x_0}^{1/(p-1)}(r) \eta(r)$, $w(r) = 1/r^{(n-1)/(p-1)} q_{x_0}^{1/(p-1)}(r)$. При почти всех $r \in (r_1, r_2)$ будем иметь $\eta(r) = \alpha(r) w(r)$ и

$$C := \int\limits_A Q(x) \eta^p(|x - x_0|) dm(x) = \omega_{n-1} \int\limits_{r_1}^{r_2} \alpha^p(r) w(r) dr. \qquad (23)$$

Применяя неравенство Иенсена с весом к выпуклой функции $\varphi(t) = t^p$, заданной в интервале $\Omega = (r_1, r_2)$, по отношению к вероятностной мере $\nu(E) = \dfrac{1}{I} \displaystyle\int_E w(r) dr$ (см. теорему 2.6.2 в [15]) и учитывая, что $\eta(r) = \alpha(r) \omega(r)$ удовлетворяет соотношению (22), получаем

$$\left(\frac{1}{I} \int\limits_{r_1}^{r_2} \alpha^p(r) w(r)\, dr\right)^{1/p} \geq \frac{1}{I} \int\limits_{r_1}^{r_2} \alpha(r) w(r) dr = \frac{1}{I}. \qquad (24)$$

Из (23) и (24) следует, что $C \geq \dfrac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}$, однако, это и доказывает (21).

Лемма 2 доказана.

Из лемм 1 и 2 получаем следующий критерий выполнения оценок вида (10).

Теорема 3. *Открытое дискретное отображение $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является кольцевым (p, Q)-отображением в точке $x_0 \in D$, $p \in (1, n]$, тогда и только тогда, когда для произвольных $0 < r_1 < r_2 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ и произвольного конденсатора вида $E = \left(B(x_0, r_2), \overline{B(x_0, r_1)}\right)$ емкость конденсатора $f(E) = \Big(f\left(B(x_0, r_2)\right),$ $f\Big(\overline{B(x_0, r_1)}\Big)\Big)$ порядка p, $p \in (1, n]$, удовлетворяет условию*

$$\operatorname{cap}_p f(E) \leq \frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}, \tag{25}$$

где $I = I(x_0, r_1, r_2)$ задается соотношением (12).

***Замечание* 3.** Для случая гомеоморфизмов и $p = n$ леммы 1 и 2, а также теорема 3 доказаны в [6] (см. леммы 7.3 и 7.4, а также теорему 7.2 там же). Более того, для произвольных открытых дискретных отображений при $p = n$ лемма 1 и теорема 3 доказаны одним из авторов (см. лемму 1 и теорему 1 в [14]). Таким образом, приведенные выше заключения являются принципиально содержательными при $p \neq n$.

3. Лемма об искажении меры при отображении. Здесь и далее Ω_n обозначает объем единичного шара $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$, а $q_0(r)$ определяется из соотношения (3) при $x_0 := 0$.

Лемма 3. *Пусть $x_0 \in D$, $n \geq 2$, $p \in (1, n]$, $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное кольцевое (p, Q)-отображение в точке x_0 и $R \leq \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Тогда при $1 < p < n$ и любом $r \in (0, R)$ имеет место оценка*

$$m\left(f(B(x_0, r))\right) \leq$$

$$\leq \Bigg(m\left(f(B(x_0, R))\right)^{(p-n)/(n(p-1))} +$$

$$+\Omega_n^{(p-n)/(n(p-1))} \frac{n-p}{p-1} \int\limits_r^R \frac{ds}{s^{(n-1)/(p-1)}\, q_{x_0}^{1/(p-1)}(s)}\Bigg)^{n(p-1)/(p-n)}, \tag{26}$$

а при $p = n$ — оценка

$$m\left(f\left(B(x_0, r)\right)\right) \leq m\left(f\left(B(x_0, R)\right)\right) \exp\left\{-n \int\limits_r^R \frac{ds}{s q_{x_0}^{1/(n-1)}(s)}\right\}. \tag{27}$$

Доказательство. При фиксированных значениях $t \in (0, R)$ и $\Delta t > 0$ рассмотрим сферическое кольцо $R_{t+\Delta t} := \{x \in D\colon t < |x - x_0| < t + \Delta t\}$ и два концентрических шара $A_{t+\Delta t} := B(x_0, t + \Delta t)$ и $C_t := \overline{B(x_0, t)}$. Пусть E — конденсатор вида $E := (A_{t+\Delta t}, C_t)$. Поскольку отображение f, по условию, открыто, пара $f(E) = (f(A_{t+\Delta t}), f(C_t))$ также является конденсатором в $\mathbb{R}^n$.

Пусть

$$\psi(s) = \begin{cases} 1/[s^{(n-1)/(p-1)} q_{x_0}^{1/(p-1)}(s)], & s \in [t, t + \Delta t], \\ 0, & s \notin [t, t + \Delta t], \end{cases}$$

и $I = \int_t^{t+\Delta} \psi(r)dr$. Заметим, что условие вида $\mathrm{cap}_p\, C = 0$ влечет, что хаусдорфова размерность множества C удовлетворяет неравенству $\dim_{\mathcal{H}} C \leq n - p$ (см., например, следствие 1.16 гл. VII в [8]). В частности, отсюда следует, что произвольные открытые отображения переводят открытые множества во множества положительной p-емкости. Тогда, в силу теоремы 3, $I \neq \infty$ и

$$\mathrm{cap}_p\, f(E) \leq \frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}. \tag{28}$$

С другой стороны, применяя предложение 5 из работы [1], получаем

$$\mathrm{cap}_p\,(f(E)) \geq \frac{(\inf m_{n-1}\, S)^p}{m\,(f\,(A_{t+\Delta t}) \setminus f\,(C_t))^{p-1}}, \tag{29}$$

где $m_{n-1}\, S$ означает $(n-1)$-мерную меру Лебега C^{∞}-многообразия S, которое является границей $S = \partial U$ ограниченного открытого множества U, содержащего $f\,(A_{t+\Delta t})$ и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в $f\,(C_t)$, а точная нижняя грань в (29) берется по всем таким S. Из соотношений (28) и (29) находим

$$\frac{(\inf m_{n-1}\, S)^p}{m\,(f\,(A_{t+\Delta t}) \setminus f\,(C_t))^{p-1}} \leq \frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}, \tag{30}$$

где значение величины S указано выше. По изопериметрическому неравенству

$$\inf m_{n-1}\, S \geq n\Omega_n^{1/n}\,(m(f\,(C_t)))^{(n-1)/n},$$

поэтому из (30) следует, что

$$n\Omega_n^{1/n}\,(m\,(f\,(C_t)))^{(n-1)/n} \leq \omega_{n-1}^{1/p}\frac{[m\,(f\,(A_{t+\Delta t}) \setminus f\,(C_t))]^{(p-1)/p}}{I^{(p-1)/p}}. \tag{31}$$

Определим функцию $\Phi(t)$ соотношением $\Phi(t) := m\,(f\,(B(0,t)))$. Тогда из неравенства (31) следует, что

$$n\Omega_n^{1/n}\Phi^{(n-1)/n}(t) \leq$$

$$\leq \omega_{n-1}^{1/p}\left(\frac{\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)}{\Delta t}\right)^{(p-1)/p}\left(\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\psi(s)\,ds\right)^{(1-p)/p}. \tag{32}$$

Далее, устремляя в неравенстве (32) Δt к нулю и учитывая суммируемость функции $\psi(s)$ на интервале $s \in [t, t+\Delta t]$ (см. теорему 3), монотонное неубывание функции Φ по $t \in (0,1)$, а также, что $\omega_{n-1} = n\Omega_n$, для почти всех t имеем

$$n\Omega_n^{(p-n)/(n(p-1))}\psi(t) \leq \frac{\Phi'(t)}{\Phi^{p(n-1)/(n(p-1))}(t)}. \tag{33}$$

Рассмотрим неравенство (33) при $1 < p < n$. Интегрируя обе части этого неравенства по $t \in [r, R]$ и учитывая, что

$$\int\limits_r^R \frac{\Phi'(t)}{\Phi^{(p(n-1))/(n(p-1))}(t)}\,dt \leq \frac{n(p-1)}{p-n}\left(\Phi^{(p-n)/(n(p-1))}(R) - \Phi^{(p-n)/(n(p-1))}(r)\right)$$

(см., например, теорему 7.4. гл. IV в [16]), получаем

$$\int\limits_r^R \frac{dt}{t^{(n-1)/(p-1)}\, q_{x_0}^{1/(p-1)}(t)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\Omega_n^{(p-n)/(n(p-1))}} \frac{p-1}{p-n} \Big(\Phi^{(p-n)/(n(p-1))}(R) - \Phi^{(p-n)/(n(p-1))}(r)\Big). \tag{34}$$

Из неравенства (34) следует, что

$$\Phi(r) \leq \left(\Phi^{(p-n)/(n(p-1))}(R) + \right.$$

$$\left. + \Omega_n^{(p-n)/(n(p-1))} \frac{n-p}{p-1} \int\limits_r^R \frac{dt}{t^{(n-1)/(p-1)}\, q_{x_0}^{1/(p-1)}(t)} \right)^{n(p-1)/(p-n)},$$

откуда, учитывая обозначения, непосредственно получаем оценку

$$m\left(f\left(B(x_0, r)\right)\right) \leq \left(\left(m\left(f\left(B(x_0, R)\right)\right)\right)^{(p-n)/(n(p-1))} + \right.$$

$$\left. + \Omega_n^{(p-n)/(n(p-1))} \frac{n-p}{p-1} \int\limits_r^R \frac{dt}{t^{(n-1)/(p-1)}\, q_{x_0}^{1/(p-1)}(t)} \right)^{n(p-1)/(p-n)}.$$

Таким образом, соотношение (26) доказано.

Рассмотрим случай $p = n$. Из соотношения (33) имеем

$$\frac{n}{t q_{x_0}^{1/(n-1)}(t)} \leq \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}. \tag{35}$$

Интегрируя обе части (35) по $t \in [r, R]$ и учитывая, что

$$\int\limits_r^R \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}\, dt \leq \log \frac{\Phi(R)}{\Phi(r)}$$

(см., например, теорему 7.4. гл. IV в [16]), получаем

$$n \int\limits_r^R \frac{dt}{t q_{x_0}^{1/(n-1)}(t)} \leq \log \frac{\Phi(R)}{\Phi(r)},$$

откуда

$$\exp\left\{ n \int\limits_r^R \frac{dt}{t q_{x_0}^{1/(n-1)}(t)} \right\} \leq \frac{\Phi(R)}{\Phi(r)}$$

и

$$\Phi(r) \leq \Phi(R) \exp\left\{-n \int\limits_r^R \frac{dt}{tq_{x_0}^{1/(n-1)}(t)}\right\},$$

что и доказывает справедливость соотношения (27).

Лемма 3 доказана.

Выбирая в лемме 3 $D := \mathbb{B}^n$ и $x_0 = 0$, получаем следующее утверждение для отображений $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$.

Лемма 4. *Пусть* $n \geq 2$, $p \in (1, n]$, $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ *— открытое дискретное кольцевое* (p, Q)*-отображение в точке* $x_0 = 0$. *Тогда при* $1 < p < n$ *и* $r \in (0, 1)$ *имеет место оценка*

$$m\left(f(B(0,r))\right) \leq \Omega_n \left(1 + \frac{n-p}{p-1} \int\limits_r^1 \frac{ds}{s^{(n-1)/(p-1)}\, q_0^{1/(p-1)}(s)}\right)^{n(p-1)/(p-n)}, \tag{36}$$

а при $p = n$ *— оценка*

$$m\left(f\left(B(0,r)\right)\right) \leq \Omega_n \exp\left\{-n \int\limits_r^1 \frac{ds}{sq_0^{1/(n-1)}(s)}\right\}. \tag{37}$$

4. Аналог леммы К. Икома – К. Шварца.

Лемма 5. *Пусть* $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $n \geq 2$, *— открытое отображение, удовлетворяющее условию* $f(0) = 0$. *Предположим, что существует функция* $R\colon [0,1] \to \to [0, \infty)$ *такая, что*

$$m\left(f(B(0,r))\right) \leq \Omega_n\, R^n(r). \tag{38}$$

Тогда

$$\liminf_{x \to 0} \frac{|f(x)|}{R(|x|)} \leq 1. \tag{39}$$

Доказательство. Полагаем $\min_{|x|=r} |f(x)| = l_f(r)$. Покажем, что

$$B\left(0, l_f(r)\right) \subset f\left(B(0,r)\right) \tag{40}$$

при каждом $r \in (0,1)$. Предположим противное. Заметим, что $B\left(0, l_f(r_0)\right) \cap \cap f\left(B(0,r_0)\right) \neq \varnothing$, так как соотношение $B\left(0, l_f(r_0)\right) \not\subset f\left(B(0,r_0)\right)$, в частности, влечет, что $l_f(r_0) > 0$ и, кроме того, условие $f(0) = 0$ влечет, что $0 \in B\left(0, l_f(r_0)\right) \cap \cap f\left(B(0,r_0)\right)$. Тогда найдутся $r_0 \in (0,1)$ и $y_0 \in \mathbb{R}^n$ такие, что $y_0 \in B\left(0, l_f(r_0)\right)$ и $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus f\left(B\left(0,r_0\right)\right)$, т. е. $y_0 \in B\left(0, l_f(r_0)\right) \setminus f\left(B\left(0,r_0\right)\right)$. Заметим также, что шар $B\left(0, l_f(r_0)\right)$ является связным множеством, при этом, согласно изложенному выше, а также сделанному предположению, $B\left(0, l_f(r_0)\right) \cap f\left(B(0,r_0)\right) \neq \neq \varnothing \neq B\left(0, l_f(r_0)\right) \setminus f\left(B(0,r_0)\right)$. По теореме 1 § 46, гл. V в [17] существует элемент $z_0 \in B\left(0, l_f(r_0)\right) \cap \partial f\left(B(0,r_0)\right)$. С другой стороны, согласно свойству открытых отображений $\partial f\left(B(0,r_0)\right) \subset f\left(\partial\left(B(0,r_0)\right)\right)$. Поэтому найдется элемент $x_0 \in S(0,r_0)$ такой, что $f(x_0) = z_0$. Однако, последнее невозможно, так как в этом случае $f(x_0) = z_0 \in B\left(0, l_f(r_0)\right)$ и, значит, $|f(x_0)| < \min_{|x|=r_0} |f(x)|$ при $x_0 \in S(0,r_0)$. Полученное противоречие указывает на то, что предположение о выполнении соотношения $B\left(0, l_f(r_0)\right) \not\subset f\left(B(0,r_0)\right)$ было неверным, и, значит, при всех $r \in (0,1)$ справедливо включение (40).

Из соотношения (40) имеем

$$\Omega_n\, l_f^n(r) \leq m(f(B(0,r)))$$

и, следовательно,

$$l_f(r) \leq \left(\frac{m(f(B(0,r)))}{\Omega_n}\right)^{1/n}. \tag{41}$$

Таким образом, учитывая неравенства (38) и (41), получаем

$$\liminf_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{R(|x|)} = \liminf_{r\to 0}\frac{l_f(r)}{R(r)} \leq \liminf_{r\to 0}\left(\frac{m\left(f\left(B(0,r)\right)\right)}{\Omega_n}\right)^{1/n}\frac{1}{R(r)} \leq 1.$$

Лемма 5 доказана.

***Доказательство теоремы* 1** непосредственно следует из лемм 4 и 5, в которых необходимо выбрать

$$R(r) = \left(1 + \frac{n-p}{p-1}\int\limits_r^1 \frac{dt}{t^{(n-1)/(p-1)}\, q_0^{1/(p-1)}(t)}\right)^{(p-1)/(p-n)} \qquad \text{при} \quad 1<p<n$$

и

$$R(r) = \exp\left\{-\int\limits_r^1 \frac{dt}{tq_0^{1/(n-1)}(t)}\right\} \quad \text{при} \quad p=n.$$

Следующая теорема показывает, что при некоторых дополнительных условиях на функцию Q оценки искажения, сформулированные в теореме 1, являются точными.

Теорема 4. *Предположим, что* $p \in (1,n]$, *а* $Q_p\colon \mathbb{B}^n \to [0,\infty)$ — *заданная измеримая по Лебегу функция такая, что*

$$I_p = \int\limits_0^1 \frac{dt}{t^{(n-1)/(p-1)}\, q_0^{1/(p-1)}(t)} = \infty$$

и

$$\int\limits_r^1 \frac{dt}{t^{(n-1)/(p-1)}\, q_0^{1/(p-1)}(t)} < \infty$$

для любого $r \in (0,1)$. *Тогда неравенства* (4) *и* (36) *превращаются в равенства при* $p \in (0,n)$ *для кольцевого* (p,Q_p)*-гомеоморфизма*

$$f_p(x) = \frac{x}{|x|}\left(1 + \frac{n-p}{p-1}\int\limits_{|x|}^1 \frac{dt}{t^{(n-1)/(p-1)}q_0^{1/(p-1)}(t)}\right)^{(p-1)/(p-n)} \tag{42}$$

в точке $x_0 = 0$, *кроме того, при* $p = n$ *аналогичные оценки* (5) *и* (37) *также превращаются в равенства для кольцевого* (n,Q_n)*-гомеоморфизма*

$$f_n(x) = \frac{x}{|x|}\exp\left\{-\int\limits_{|x|}^1 \frac{dt}{tq_0^{1/(n-1)}(t)}\right\} \tag{43}$$

в точке $x_0 = 0$.

Доказательство. Для удобства обозначим

$$\varphi_p(s)=\left(1+\frac{n-p}{p-1}\int\limits_s^1\frac{dt}{t^{(n-1)/(p-1)}q_0^{1/(p-1)}(t)}\right)^{(p-1)/(p-n)},\quad p\in(0,n),$$

и

$$\varphi_n(s)=\exp\left\{-\int\limits_s^1\frac{dt}{tq_0^{1/(n-1)}(t)}\right\},\quad t\in(0,1).$$

Заметим, что при каждом фиксированном значении p, $1<p\le n$, функции $\varphi_p(t)$ являются возрастающими по t. Заметим также, что отображения $f_p(x)$ являются гомеоморфизмами класса $C^1\left(\mathbb{B}^n\setminus\{0\}\right)$. Кроме того, в силу условия $I_p=\infty$ каждое $f_p(x)$ продолжается в точку $x_0=0$ по непрерывности, при этом $f_p(0)=0$, $p\in(1,n]$, $\varphi_p(0)=0$, $\varphi_p(1)=1$, обратное отображение $f_p^{-1}(y)$ определено при каждом $y\in\mathbb{B}^n$, $f_p^{-1}(y)=\dfrac{y}{|y|}\varphi_p^{-1}(|y|)$, $f_p(x)\in B\left(0,\varphi_p(R)\right)$ как только $x\in B(0,R)$ и $f_p^{-1}(y)\in\mathbb{B}^n$ также при всех $y\in B(0,\varphi_p(R))$. Из изложенного выше следует, что $f_p(\mathbb{B}^n)=\mathbb{B}^n$, $f_p\left(B(0,R)\right)=B\left(0,\varphi_p(R)\right)$ и, значит,

$$m\left(f_p\left(B(0,R)\right)\right)=\Omega_n\varphi_p^n(R),\quad p\in(1,n].\tag{44}$$

На основании (42)–(44) знак равенства в соответствующих неравенствах (4) и (36), а также в (5) и (37) следует непосредственно. Осталось показать, что определенные таким образом отображения f_p, действительно, являются кольцевыми (p,Q_p)-отображениями в точке $x_0=0$. Для этого при произвольных $r_1,r_2\in\mathbb{R}$, $0<r_1<r_2<1$, рассмотрим конденсатор вида $E=(B(0,r_2),B(0,r_1))$. Заметим, что в силу изложенного выше

$$f_p(E)=\left(B(0,\varphi_p(r_2))\,,\ B(0,\varphi_p(r_1))\right),$$

и p-емкость конденсатора $f_p(E)$ вычисляется в явном виде (см., например, соотношение (2) в [13, с. 177]), а именно,

$$\operatorname{cap}_p f_p(E)=\omega_{n-1}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{1/(p-1)}\times$$

$$\times\left(\varphi_p^{(p-n)/(p-1)}(r_1)-\varphi_p^{(p-n)/(p-1)}(r_2)\right)^{-(p-1)},\quad p\in(1,n),\tag{45}$$

$$\operatorname{cap}_n f_n(E)=\frac{\omega_{n-1}}{\left(\log\dfrac{\varphi_n(r_2)}{\varphi_n(r_1)}\right)^{n-1}}.\tag{46}$$

Подставляя в (45) и (46) значения φ_p, определенные выше, как при $p\in(1,n)$, так и при $p=n$, получаем

$$\operatorname{cap}_p f_p(E)=\omega_{n-1}/I^{p-1},$$

где I определено соотношением вида (12) при $x_0=0$. Следовательно, в силу теоремы 3 гомеоморфизмы f_p, определенные соотношениями (42) и (43), являются кольцевыми (p,Q_p)-отображениями в точке $x_0=0$, что и требовалось доказать.

5. Аналог теоремы Лиувилля. Всюду далее полагаем $p = n$. Обозначим

$$L(x_0, f, R) = \sup_{|x-x_0|\le R} |f(x) - f(x_0)|. \tag{47}$$

Теорема 5. *Предположим, что* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— открытое дискретное кольцевое* (n, Q)*-отображение в некоторой точке* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, r_0 *— произвольное фиксированное вещественное число. Тогда*

$$\liminf_{R\to\infty} L(x_0, f, R) \exp\left\{-\int\limits_{r_0}^{R} \frac{dt}{tq_{x_0}^{1/(n-1)}(t)}\right\} = M > 0, \tag{48}$$

где $L(x_0, f, R)$ *определено соотношением* (47).

Доказательство. Оценим сверху неравенство (27). Заметим, что $m\big(f(B(x_0, R))\big) \le \Omega_n L^n(x_0, f, R)$, поэтому из (27) получаем

$$m\left(f(B(x_0, r_0))\right) \le \Omega_n L^n(x_0, f, R) \exp\left\{-n\int\limits_{r_0}^{R} \frac{dt}{tq_{x_0}^{1/(n-1)}(t)}\right\}. \tag{49}$$

Очевидно, $m\left(f(B(x_0, r_0))\right) = M_1 > 0$ и от R не зависит. Переходя к нижнему пределу в (49) при $R \to \infty$ и обозначая $M := \left(\dfrac{M_1}{\Omega_n}\right)^{1/n}$, получаем (48).

Теорема 5 доказана.

***Доказательство теоремы* 2.** Поскольку $L(x_0, f, R) \le 2 \sup\limits_{|x-x_0|\le R} |f(x)|$, из (48) следует, что

$$N := \limsup_{R\to\infty} \sup_{|x-x_0|=R} |f(x)| \exp\left\{-\int\limits_{r_0}^{R} \frac{dt}{tq_{x_0}^{1/(n-1)}(t)}\right\} > 0. \tag{50}$$

Обозначим

$$g(x) := |f(x)| \exp\left\{-\int\limits_{r_0}^{|x-x_0|} \frac{dt}{tq_{x_0}^{1/(n-1)}(t)}\right\} > 0.$$

Заметим, что

$$\limsup_{x\to\infty} |g(x)| = \limsup_{R\to\infty} \sup_{|x-x_0|=R} |g(x)|. \tag{51}$$

Из соотношений (50) и (51) следует условие вида (6).

Теорема 2 доказана.

1. *Кругликов В. И.* Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Мат. сб. – 1986. – **130**, № 2. – С. 185 – 206.
2. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – 1971. – **229**.
3. *Salimov R. R., Sevost'yanov E. A.* ACL and differentiability of open discrete ring (p, Q)-mappings // Мат. студ. – 2010. – **35**, № 1. – С. 28 – 36.
4. *Ikoma K.* On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space // Nagoya Math. J. – 1965. – **25**. – P. 175 – 203.
5. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Distortion and singularities of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1970. – **465**. – P. 1 – 13.

6. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer Sci. + Business Media, LLC, 2009.
7. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982.
8. *Rickman S.* Quasiregular mappings // Results Math. and Relat. Areas. – 1993. – **26**, № 3.
9. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: Мир, 1969.
10. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal mappings in the plane. – New York etc.: Springer, 1973.
11. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397 – 1420.
12. *Golberg A.* Differential properties of (α, Q)-homeomorphisms // Further Progress in Analysis. – 2009. – P. 218 – 228.
13. *Gehring F.* Lipschitz mappings and p-capacity of rings in n-space // Ann. Math. Stud. – 1971. – **66**. – P. 175 – 193.
14. *Севостьянов Е. А.* Об интегральной характеризации некоторых обобщений квазирегулярных отображений и значении условия расходимости интеграла в геометрической теории функций // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 10. – С. 1367 – 1380.
15. *Ransford Th.* Potential theory in the complex plane. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
16. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
17. *Куратовский К.* Топология: В 2 т. – М.: Мир, 1969. – Т. 2. – 624 с.

Получено 08.05.11,
после доработки — 27.06.11