УДК 517.957+512.816

С. С. Коваленко (Ін-т математики НАН України, Київ)

СИМЕТРІЙНИЙ АНАЛІЗ ТА ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОГО КЛАСУ $(1+3)$-ВИМІРНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТИПУ СТЕФАНА

We present the group classification of one class of $(1+3)$-dimensional nonlinear boundary-value problems of the Stefan type that model the processes of melting and evaporation of metals. The results obtained are used for the construction of the exact solution of one boundary-value problem from the class under study.

Проведена групповая классификация одного класса $(1+3)$-мерных нелинейных краевых задач типа Стефана, которые моделируют процессы плавления и испарения металлов. Полученные результаты применены для построения точного решения одной краевой задачи из исследуемого класса.

1. Вступ. Теоретико-групові методи є сучасним математичним апаратом, що широко застосовується при дослідженні математичних моделей на базі диференціальних рівнянь (як звичайних, так і з частинними похідними). На сьогоднішній день вивчено симетрійні властивості багатьох відомих рівнянь механіки, газової динаміки, електродинаміки, теплофізики, квантової фізики тощо (див. монографії [1 – 5] та бібліографію, наведну в них). Проте у більшості публікацій диференціальні рівняння досліджувалися без урахування будь-яких початкових та крайових умов. Це можна пояснити тим, що широко вживані крайові умови (наприклад, умови Діріхле,Ноймана тощо) рідко коли є інваріантними відносно перетворень з групи симетрії базових диференціальних рівнянь. Це, у свою чергу, призводить до малої ефективності застосувань групових методів для пошуку, наприклад, точних розв'язків крайових задач.

Одним із можливих напрямків подолання цієї проблеми є застосування теоретико-групових методів до крайових задач з рухомими границями (вільними поверхнями). Незважаючи на те, що такі задачі є набагато складнішим об'єктом для аналізу, ніж традиційні крайові задачі з фіксованими межами, застосування, наприклад, класичного методу Лі до задач такого типу може виявитися набагато ефективнішим саме через те, що структура невідомих (вільних) границь може залежати від інваріантних змінних, і це дає можливість звести досліджувану крайову задачу до іншої задачі меншої розмірності [6]. Відомі публікації, в яких автори застосовують теоретико-групові методи до крайових задач з рухомими границями у випадку двох незалежних змінних (див. [7] та наведену в ній бібліографію). Однак на сьогоднішній день є лише кілька робіт, присвячених вивченню застосування групових методів до складних багатовимірних задач з рухомими границями [8 – 10], хоча отримані в них результати свідчать про ефективність такого підходу.

У цій роботі ми розглядаємо широкий клас $(1+3)$-вимірних крайових задач типу Стефана, що моделюють процеси плавлення та випаровування металів під дією потужних потоків випромінювання. У другому пункті сформульовано теорему, що дає вичерпний опис симетрій Лі крайових задач з досліджуваного класу. У третьому пункті результати проведеної групової класифікації застосовано для редукції та побудови точного розв'язку однієї крайової задачі з розглядуваного класу.

2. Інваріантність одного класу $(1+3)$-вимірних крайових задач, що моделюють процеси плавлення та випаровування металів. Сформулюємо математичну модель процесів плавлення та випаровування металів під дією потужних потоків випромінювання. Нехай $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)\colon x_3 > 0\}$ — півпростір тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$, який початково займає тверда фаза металу. В момент часу $t = 0$ на поверхню $x = 0$ починає падати потужний потік випромінювання $\mathbf{Q}(t) = (0, 0, Q(t))$. Тут і далі ми нехтуємо початковою короткочасною нерівноважною стадією процесу та вивчаємо процеси плавлення та випаровування на стадії, коли три фази (газоподібна, рідка та тверда) мають місце, і вважаємо, що ця ситуація виникає у деякий момент часу $t \in \mathfrak{T} = (t_*, +\infty)$, де t_* — деяке додатне дійсне число. Таким чином, область $\Omega(t) = \Omega \times \mathfrak{T}$ складається з трьох областей, зайнятих газоподібною, рідкою та твердою фазами, які будемо позначати відповідно через $\Omega_0(t)$, $\Omega_1(t)$ та $\Omega_2(t)$, та двох гладких поверхонь $S_1(t, \mathbf{x}) = 0$ та $S_2(t, \mathbf{x}) = 0$, що розділяють ці фази. Іншими словами, область $\Omega(t)$ можна записати у вигляді

$$\Omega(t) = \Omega_0(t) \cup \Gamma_1(t) \cup \Omega_1(t) \cup \Gamma_2(t) \cup \Omega_2(t),$$

де

$$\Gamma_k(t) = (t, \mathbf{x})\colon S_k(t, \mathbf{x}) = 0, \quad t \in \mathfrak{T}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad k = 1, 2,$$

$$\Omega_0(t) = (t, \mathbf{x})\colon S_1(t, \mathbf{x}) < 0, \quad S_2(t, \mathbf{x}) < 0, \quad t \in \mathfrak{T}, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\Omega_1(t) = (t, \mathbf{x})\colon S_1(t, \mathbf{x}) > 0, \quad S_2(t, \mathbf{x}) < 0, \quad t \in \mathfrak{T}, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\Omega_2(t) = (t, \mathbf{x})\colon S_1(t, \mathbf{x}) > 0, \quad S_2(t, \mathbf{x}) > 0, \quad t \in \mathfrak{T}, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Тоді відповідний клас $(1+3)$-вимірних нелінійних крайових задач типу Стефана, що моделюють процеси плавлення та випаровування металів під дією потужних потоків випромінювання, можна подати у вигляді [11, 12]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla\left(d_1(u)\nabla u\right), \quad (t, \mathbf{x}) \in \Omega_1(t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nabla\left(d_2(v)\nabla v\right), \quad (t, \mathbf{x}) \in \Omega_2(t), \tag{2}$$

$$S_1(t, \mathbf{x}) = 0: \ d_{1v}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_1} = H_v \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{n}_1 - \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{n}_1, \quad u = u_v, \tag{3}$$

$$S_2(t, \mathbf{x}) = 0\colon d_{2m}\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}_2} = d_{1m}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_2} + H_m \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{n}_2, \quad u = u_m, \quad v = v_m, \tag{4}$$

$$|\mathbf{x}| = +\infty\colon \ v = v_\infty, \quad t \in \mathfrak{T}, \tag{5}$$

де u, v — шукані температурні поля; $d_1(u)$, $d_2(v)$ — коефіцієнти температуропровідності; $d_{1v} = d_1(u_v)$, $d_{1m} = d_1(u_m)$, $d_{2m} = d_2(v_m)$; H_v, H_m, u_v, u_m, v_m, v_∞ — деякі відомі сталі; $\mathbf{Q}(t) = (0, 0, Q(t))$ — тепловий потік; $S_k(t, \mathbf{x}) = 0$, $k = 1, 2$, — шукані поверхні поділу фаз; $\mathbf{V}_k(t, \mathbf{x})$, $k = 1, 2$, — швидкості руху міжфазових меж; $\mathbf{n}_k$, $k = 1, 2$, — одиничні зовнішні нормалі до поверхонь $S_k(t, \mathbf{x}) = 0$, $k = 1, 2$, відповідно; $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_3}\right)$; індекси $k = 1$ та $k = 2$ відповідають рідкій та твердій фазам металу.

З математичної та фізичної точок зору ми повинні накласти деякі додаткові умови на функції та сталі, що з'являються у досліджуваному класі крайових задач. А саме, ми припускаємо, що всі функції у задачі (1) – (5) є достатньо гладкими; вільні поверхні $S_k(t, \mathbf{x}) = 0$ задовольняють наступні умови: $\dfrac{\partial S_k}{\partial t} \neq 0$ та $|\nabla S_k| \neq 0$, $k = 1, 2$; тепловий потік не є нульовим, тобто $Q(t) \neq 0$ та $\mathbf{V}_k \cdot \mathbf{n}_k \neq 0$, $k = 1, 2$. Зрештою сталі u_v, u_m, v_m, та v_∞ повинні задовольняти природні нерівності $u_v \neq \neq u_m$, $v_m \neq v_\infty$.

Базуючись на означенні інваріантності у сенсі Лі крайової задачі з вільними поверхнями, яке було запропоноване нами у роботі [7], та застосувавши класичні методи групової класифікації класів диференціальних рівнянь [1, 4, 5], ми дослідили симетрійні властивості класу крайових задач (1) – (5). Наведені нижче лема 1 та теорема 1 дають вичерпний опис симетрій Лі крайових задач з цього класу.

Лема 1. *Клас крайових задач* (1) – (5) *допускає групу перетворень еквівалентності* $\widetilde{E}^{\mathrm{BVP}}_{\mathrm{eq}}$:

$$\tilde{x}_1 = \beta\,(x_1 \cos\beta_1 + x_2 \sin\beta_1) + \gamma_1,$$

$$\tilde{x}_2 = \beta\,(-x_1 \sin\beta_1 + x_2 \cos\beta_1) + \gamma_2,$$

$$\tilde{x}_3 = \beta x_3 + \gamma_3,$$

$$\tilde{t} = \alpha t + \gamma_0, \quad \tilde{u} = \delta_1 u + \gamma_4, \quad \tilde{v} = \delta_2 v + \gamma_5, \quad \widetilde{S}_1 = S_1, \quad \widetilde{S}_2 = S_2,$$

$$\tilde{d}_1 = \frac{\beta^2}{\alpha}\, d_1, \quad \tilde{d}_2 = \frac{\beta^2}{\alpha}\, d_2,$$

$$\tilde{d}_{1v} = \frac{\beta^2}{\delta_1}\, d_{1v}, \quad \tilde{d}_{1m} = \frac{\beta^2}{\delta_1}\, d_{1m}, \quad \tilde{d}_{2m} = \frac{\beta^2}{\delta_2}\, d_{2m}, \quad \widetilde{H}_v = \alpha H_v, \quad \widetilde{H}_m = \alpha H_m,$$

$$\tilde{u}_v = \delta_1 u_v + \gamma_4, \quad \tilde{u}_m = \delta_1 u_m + \gamma_4, \quad \tilde{v}_m = \delta_2 v + \gamma_5, \quad \widetilde{Q} = \beta Q$$

з довільними дійсними коефіцієнтами $\alpha, \beta, \beta_1, \gamma_0, \ldots, \gamma_5, \delta_1, \delta_2$, *що задовольняють умову*

$$\alpha\beta\delta_1\delta_2 \neq 0.$$

Теорема 1. *Крайова задача* (1) – (5) *з довільними заданими додатними функціями* $d_1(u)$, $d_2(v)$ *та* $Q(t)$ *є інваріантною у сенсі Лі відносно* 4*-параметричної групи Лі, породженої такими інфінітезимальними операторами*:

$$P_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad P_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad P_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}, \qquad J_{12} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Максимальна група інваріантності задачі (1) – (5) *не залежить від форми функцій* $d_1(u)$, $d_2(v)$, *а залежить від функції* $Q(t)$. *Існують лише дві крайові задачі з класу* (1) – (5) (*з точністю до перетворень еквівалентності з групи* $\widetilde{E}^{\mathrm{BVP}}_{\mathrm{eq}}$) *з коректно вибраною функцією* $Q(t)$, *які допускають* 5*-параметричну групу інваріантності, породжену операторами* P_1, P_2, P_3, J_{12} *та операторами*

1) $D = 2t\dfrac{\partial}{\partial t} + x_1\dfrac{\partial}{\partial x_1} + x_2\dfrac{\partial}{\partial x_2} + x_3\dfrac{\partial}{\partial x_3}$ *при* $Q(t) = \dfrac{q}{\sqrt{t}}$,

2) $P_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$ *при* $Q(t) = q$, *відповідно,*

де q *— деяка довільна додатна стала.*

***Зауваження* 1.** У теоремі 1 довільну сталу q, з точністю до перетворень еквівалентності з групи $\widetilde{E}^{\mathrm{BVP}}_{\mathrm{eq}}$, можна покласти рівною 1 (нагадаємо, що $Q(t)$ — додатна функція).

***Зауваження* 2.** При доведенні теореми випадок $d_1(u) = d_2(v) = \mathrm{const}$ не досліджувався, оскільки він фізично не обґрунтований.

***Зауваження* 3.** У випадку однієї просторової змінної x_3 задача (1) – (5) суттєво спрощується і пошуку її точних розв'язків та симетрій Лі присвячено низку робіт, зокрема [6, 7, 13, 14].

3. Симетрійна редукція та приклад побудови точного розв'язку однієї крайової задачі з досліджуваного класу. У цьому пункті ми продемонструємо, як можна застосувати результати, отримані у п. 2, до побудови точних розв'язків крайових задач з досліджуваного класу. Зосередимося на розгляді крайової задачі (1) – (5) з тепловим потоком $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{q} \equiv (0, 0, q)$, $q = \mathrm{const}$. Згідно з теоремою 1, така задача допускає 5-вимірну алгебру інваріантності A_5 з такими базисними операторами:

$$P_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad P_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad P_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad J_{12} = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Тепер застосуємо ці оператори для редукції досліджуваної крайової задачі до крайових задач меншої розмірності. Для реалізації цієї мети ми використаємо оптимальну систему s-вимірних підалгебр ($s \leq 5$) алгебри A_5. Оскільки алгебра A_5 може бути подана у вигляді $A_5 = \langle P_1, P_2, J_{12}\rangle \oplus \langle P_3\rangle \oplus \langle P_t\rangle$, то, застосувавши відомий алгоритм Лі – Гурса класифікації підалгебр алгебр Лі, що розкладаються у пряму суму [15], та результати класифікації підалгебр низькорозмірних дійсних алгебр Лі [16], вдалося отримати повний список шуканих підалгебр, які наведено нижче.

Підалгебри розмірності 1:

$$\langle P_3\cos\phi + P_t\sin\phi\rangle, \qquad \langle P_1 + \alpha\left(P_3\cos\phi + P_t\sin\phi\right)\rangle,$$

$$\langle J_{12} + \beta\left(P_3\cos\phi + P_t\sin\phi\right)\rangle;$$

підалгебри розмірності 2:

$$\langle P_3, P_t\rangle, \qquad \langle P_1 + \alpha\left(P_3\cos\phi + P_t\sin\phi\right), P_2\rangle,$$

$$\langle P_1 + \alpha\left(P_3\cos\phi + P_t\sin\phi\right), P_3\sin\phi - P_t\cos\phi\rangle,$$

$$\langle J_{12} + \beta\left(P_3\cos\phi + P_t\sin\phi\right), P_3\sin\phi - P_t\cos\phi\rangle;$$

підалгебри розмірності 3:

$$\langle P_1, P_3, P_t\rangle, \qquad \langle J_{12}, P_3, P_t\rangle,$$

$$\langle P_1 + \alpha\left(P_3\cos\phi + P_t\sin\phi\right), P_2, P_3\sin\phi - P_t\cos\phi\rangle,$$

$$\langle J_{12} + \beta\,(P_3 \cos\phi + P_t \sin\phi)\,, P_1, P_2\rangle\,;$$

підалгебри розмірності 4:

$$\langle P_1, P_2, P_3, P_t\rangle\,, \qquad \langle J_{12} + \beta\,(P_3 \cos\phi + P_t \sin\phi)\,, P_1, P_2, P_3 \sin\phi - P_t \cos\phi\rangle\,;$$

підалгебри розмірності 5:

$$\langle J_{12}, P_1, P_2, P_3, P_t\rangle\,.$$

де $\alpha \geq 0$ та β — довільні дійсні сталі, $0 \leq \phi < \pi$.

Розглянемо, для прикладу, алгебру $\langle J_{12}, P_3 \sin\phi - P_t \cos\phi\rangle$. Розв'язавши відповідну систему рівнянь Лагранжа, легко отримати анзац, що відповідає цій алгебрі:

$$u = u(r, z), \qquad v = v(r, z), \qquad S_k = S_k(r, z), \quad k = 1, 2, \tag{6}$$

де $z = x_3 - \mu t$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ — нові незалежні змінні (інваріантні змінні). Зауважимо, що ці змінні допускають чіткий фізичний зміст: перша з них здійснює перехід до рухомої системи координат (у напрямку змінної x_3) з початком координат на поверхні $S_1 = 0$, друга вказує на радіальну симетрію процесу відносно змінних x_1 та x_2.

Підставимо анзац (6) у крайову задачу (1)–(5) з $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{q}$. Після відповідних обчислень отримуємо таку крайову задачу для двовимірної системи рівнянь еліптичного типу:

$$\frac{1}{r}\,(r d_1(u) u_r)_r + (d_1(u) u_z)_z + \mu u_z = 0, \tag{7}$$

$$\frac{1}{r}\,(r d_2(v) v_r)_r + (d_2(v) v_z)_z + \mu v_z = 0, \tag{8}$$

$$S_1(r, z) = 0\colon d_{1v} \nabla' u \cdot \nabla' S_1 = (\mu H_v - q)\,\frac{\partial S_1}{\partial z}, \quad u = u_v, \tag{9}$$

$$\begin{gathered} S_2(r, z) = 0\colon d_{2m} \nabla' v \cdot \nabla' S_2 = d_{1m} \nabla' u \cdot \nabla' S_2 + \mu H_m \frac{\partial S_2}{\partial z}, \\ u = u_m, \quad v = v_m, \end{gathered} \tag{10}$$

$$r^2 + z^2 = +\infty\colon v = v_\infty, \tag{11}$$

де $\nabla' = \left(\dfrac{\partial}{\partial r}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$, μ — деякий невідомий параметр, індекси r та z позначають диференціювання за цими змінними.

Незважаючи на те, що отримана крайова задача є набагато простішим об'єктом, ніж початкова задача (1)–(5), вона все ще залишається нелінійною задачею з базовими двовимірними рівняннями з частинними похідними. Наша головна мета полягає у тому, щоб звести задачу (7)–(11) до крайової задачі з базовими звичайними диференціальними рівняннями. Звичайно, що для виконання такої редукції можна застосувати різні підходи, проте ми зупинимося тут лише на одному цікавому прикладі. Розглянемо анзац [17]

$$u = u(\omega), \qquad v = v(\omega), \qquad S_k = S_k(\omega), \qquad \omega = z + \sqrt{z^2 + r^2}, \quad k = 1, 2. \tag{12}$$

Зауважимо, що цей анзац є неліївським, оскільки максимальна алгебра інваріантності системи (7), (8) з довільними функціями $d_1(u)$ та $d_2(v)$ є тривіальною і генерується оператором зсуву $\dfrac{\partial}{\partial z}$.

Підставивши анзац (12) у крайову задачу (7) – (11) та провівши відповідні обчислення, отримаємо крайову задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d}{d\omega}\left(\omega d_1(u)\frac{du}{d\omega}\right) + \mu\frac{\omega}{2}\frac{du}{d\omega} = 0, \quad 0 < \omega_1 < \omega < \omega_2, \tag{13}$$

$$\frac{d}{d\omega}\left(\omega d_2(v)\frac{dv}{d\omega}\right) + \mu\frac{\omega}{2}\frac{dv}{dz} = 0, \quad \omega > \omega_2, \tag{14}$$

$$\omega = \omega_1 \colon 2d_{1v}\frac{du}{d\omega} = \mu H_v - q, \quad u = u_v, \tag{15}$$

$$\omega = \omega_2 \colon 2d_{2m}\frac{dv}{d\omega} = 2d_{1m}\frac{du}{d\omega} + \mu H_m, \quad u = u_m, \quad v = v_m, \tag{16}$$

$$\omega = +\infty \colon \ v = v_\infty, \tag{17}$$

де ω_k, $k = 1, 2$, та μ — невідомі параметри, які потрібно знайти при розв'язанні задачі.

Тепер ми маємо змогу визначити форму вільних поверхонь $S_k(t, \mathbf{x}) = 0$, $k = 1, 2$, оскільки, у відповідності з анзацем (12),

$$S_k(\omega) \equiv z + \sqrt{z^2 + r^2} = \omega_k, \quad k = 1, 2.$$

Останнє рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{\omega_k^2} = 1 - \frac{2z}{\omega_k}, \quad k = 1, 2. \tag{18}$$

Таким чином, ми отримали рівняння параболоїдов обертання у просторі змінних x_1, x_2, z. З фізичної точки зору, невідомі параметри ω_1 та ω_2 повинні задовольняти нерівності $\omega_2 > \omega_1 > 0$. Більш того, параметр ω_1 може бути визначений з наступних міркувань. Якщо у рівнянні (18) покласти $z = 0$, то $\omega_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. З іншого боку, тільки та частина поверхні $S_1 = 0$, що обмежена колом радіуса R, отримує потік $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{q}$. Отже, не втрачаючи загальності міркувань, можемо покласти $\omega_1 = R$.

Перейдемо тепер до побудови точного розв'язку задачі (13) – (17). Тут головна проблема полягає у розв'язанні системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь (13), (14), оскільки її загальний розв'язок у загальному випадку є невідомим. Проте в деяких спеціальних випадках це вдається зробити. Зазначимо, що розв'язок задачі (13) – (17) у випадку лінійних базових рівнянь (тобто коли $d_1(u) = a_1$ та $d_2(v) = a_2$, де a_1, $a_2 \in \mathbb{R}^+$) отримано у роботі [12]. Ми зупинимося на одному конкретному випадку *нелінійної* системи рівнянь (13), (14), а саме, при

$d_1(u) = u^{-1}$ та $d_2(v) = 1$. В цьому випадку її точний розв'язок можна подати у неявному вигляді (див., наприклад, [18])

$$\int\limits_a^{\omega u} \frac{d\nu}{\nu\left(1+e^{-W(e^A)+A}\right)} = \ln\omega + C_2, \qquad v = C_3\Phi(\omega) + C_4, \tag{19}$$

де $\Phi(\omega) = \int_\omega^{+\infty} \omega^{-1}e^{-\mu\omega/2}d\omega$, $W(x)$ — функція Ламберта, $A = -\frac{\mu}{2}\nu + C_1$, a — деяка стала, $C_1, \ldots, C_4$ — довільні сталі інтегрування. Підставляючи розв'язок (19) у крайові умови (15) – (17) та беручи до уваги, що

$$\frac{d\Phi}{d\omega} = \omega^{-1}e^{-\mu\omega/2}, \qquad \ln\left(\frac{\omega}{u}\frac{du}{d\omega}\right) + \frac{\omega}{u}\frac{du}{d\omega} = A,$$

отримуємо шуканий точний розв'язок

$$\int\limits_{Ru_v}^{\omega u} \frac{d\nu}{\nu\left(1+e^{-W(e^{\mathcal{A}})+\mathcal{A}}\right)} = \ln\frac{\omega}{R}, \qquad v = \frac{v_m - v_\infty}{\Phi_2(\omega_2)}\Phi_2(\omega) + v_\infty, \tag{20}$$

де параметри ω_2 та μ повинні бути знайдені з системи трансцендентних рівнянь

$$\int\limits_{Ru_v}^{\omega_2 u_m} \frac{d\nu}{\nu\left(1+e^{-W(e^{\mathcal{A}})+\mathcal{A}}\right)} = \ln\frac{\omega_2}{R},$$

$$2\frac{v_m - v_\infty}{\Phi(\omega_2)}e^{-\mu\omega_2/2} = 2e^{-W(e^{\mathcal{A}(\omega_2)})+\mathcal{A}(\omega_2)} + \mu\omega_2 H_m.$$

Тут ми використали такі позначення:

$$\mathcal{A} = -\frac{\mu}{2}\nu + \ln\left((\mu H_v - q)\,\frac{R}{2}\right) + (\mu H_v - q)\,\frac{R}{2} + \frac{\mu}{2}Ru_v$$

та

$$\mathcal{A}(\omega_2) = \frac{\mu}{2}\left(Ru_v - \omega_2 u_m\right) + \ln\left((\mu H_v - q)\,\frac{R}{2}\right) + (\mu H_v - q)\,\frac{R}{2}.$$

Тепер, використовуючи формули (20), (6) та (12), отримуємо точний розв'язок у неявному вигляді початкової крайової задачі (1) – (5) при $d_1(u) = u^{-1}$, $d_2(v) = 1$ та $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{q}$:

$$\int\limits_{Ru_v}^{\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_3-\mu t)^2}+x_3-\mu t\right)u} \frac{d\nu}{\nu\left(1+e^{-W(e^{\mathcal{A}})+\mathcal{A}}\right)} =$$

$$= \ln\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_3-\mu t)^2}+x_3-\mu t}{R},$$

$$v = \frac{v_m - v_\infty}{\Phi(\omega_2)}\Phi\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_3-\mu t)^2}+x_3-\mu t\right) + v_\infty,$$

$$S_k \equiv \frac{x_1^2 + x_2^2}{\omega_k^2} + \frac{2(x_3 - \mu t)}{\omega_k} - 1 = 0, \quad k = 1, 2.$$

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
2. *Фущич В. И., Никитин А. Г.* Симметрия уравнений квантовой механики. – М.: Наука, 1990. – 400 с.
3. *Фущич В.И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 336 с.
4. *Лагно В. І., Спічак С. В., Стогній В. І.* Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **42**. – 360 с.
5. *Bluman G. W., Anco S. C.* Symmetry and integration methods for differential equations. – New York: Springer, 2002. – 420 p.
6. *Cherniha R., Kovalenko S.* Exact solutions of nonlinear boundary value problems of the Stefan type // J. Phys. A: Math. Theor. – 2009. – **42**. – 355202.
7. *Cherniha R., Kovalenko S.* Lie symmetries of nonlinear boundary value problems. – Kyiv, 2010. – 21 p. – (Preprint / arXiv:1012.5606).
8. *Черніга Р. М.* Нелінійні еволюційні рівняння: галілеївська інваріантність, точні розв'язки та їхнє застосування: Дис. . . . д-ра фіз.-мат. наук. – Київ, 2003. – 327 с.
9. *Пухначев В. В.* Инвариантные решения уравнений Навье – Стокса, описывающие движения со свободной границей // Докл. АН СССР. – 1972. – **202**, № 2. – С. 302 – 305.
10. *Benjamin T. B., Olver P. J.* Hamiltonian structure, symmetries and conservation laws for water waves // J. Fluid Mech. – 1982. – **125**. – P. 137 – 185.
11. *Анисимов С. И., Имас Я. А., Романов Г. С., Ходыко Ю. В.* Действие излучения большой мощности на металлы. – М.: Наука, 1970. – 272 с.
12. *Любов Б. Я., Соболь Э. Н.* Расчет кинетики плавления и испарения твердого тела под действием потока энергии // Физ.-хим. обработка материалов. – 1982. – № 1. – С. 13 – 18.
13. *Черніга Р. М., Однороженко І. Г.* Точні розв'язки нелінійної задачі плавлення та випаровування металу при дії потужного потоку енергії // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1990. – № 12. – С. 44 – 47.
14. *Cherniha R. M., Cherniha N. D.* Exact solutions of a class of nonlinear boundary value problems with moving boundaries // J. Phys. A: Math. and Gen. – 1993. – **26**. – P. L935 – L940.
15. *Pathera J., Winternitz P., Zassenhaus H.* Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincare group // J. Math. Phys. – 1975. – **16**, № 8. – P. 1597 – 1615.
16. *Pathera J., Winternitz P.* Subalgebras of real three- and four-diensional Lie algebras // J. Math. Phys. – 1977. – **18**, № 7. – P. 1449 – 1455.
17. *Иванцов Г. П.* Температурное поле вокруг шарообразного, цилиндрического и иглообразного кристалла, растущего в переохлажденном расплаве // Докл. АН СССР. – 1947. – **48**, № 4. – С. 567 – 569.
18. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

Одержано 24.06.11