УДК 517.5

Е. А. Севостьянов (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ОБ ОТКРЫТОСТИ И ДИСКРЕТНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ КВАЗИКОНФОРМНОСТИ

The paper is devoted to the investigation of the topological properties of space mappings. It is shown that sense-preserving mappings $f\colon D\rightarrow \overline{{\mathbb R}^n}$ in a domain $D\subset {\mathbb R}^n,$ $n\ge 2,$ which are more general than mappings with bounded distortion, are open and discrete if a function Q corresponding to the control of the distortion of families of curves under these mappings has slow growth in the domain $f(D),$ e.g., if Q has finite mean oscillation at an arbitrary point $y_0\in f(D)$.

Статтю присвячено вивченню топологічних властивостей просторових відображень. Показано, що відображення $f\colon D\rightarrow \overline{{\mathbb R}^n}$, які зберігають орієнтацію в області $D\subset {\mathbb R}^n,$ $n\ge 2,$ і є більш загальними, ніж відображення з обмеженим спотворенням, відкриті та дискретні за умови, що функція Q, яка відповідає за контроль спотворення сімей кривих при таких відображеннях, має слабке зростання в області $f(D)$. Наприклад, твердження набуває чинності, якщо функція Q має скінченне середнє коливання в довільній точці $y_0\in f(D)$.

1. Введение. Основные определения и обозначения, встречающиеся в настоящей статье, могут быть найдены, например, в работе [1]. Всюду далее

$$A(r_1,r_2,x_0)=\{x\,\in\,{\mathbb R}^n\colon r_1<|x-x_0|<r_2\}\,. \tag{1}$$

Будем говорить, что отображение $f\colon D\,\rightarrow\,{\mathbb R}^n$ *сохраняет ориентацию,* если топологический индекс $\mu\,(y,f,G)$ удовлетворяет условию $\mu\,(y,f,G)>0$ для произвольной области $G\subset D$ такой, что $\overline{G}\subset D,$ и произвольного $y\in f(G)\setminus f\,(\partial G)\,.$ Множество $H\,\subset\,\overline{{\mathbb R}^n}$ будем называть *всюду разрывным*, если любая его компонента связности вырождается в точку; в этом случае пишем $\dim H=0,$ где $\dim$ обозначает *топологическую размерность* множества H (см. [2]). Отображение $f\colon D\rightarrow \overline{{\mathbb R}^n}$ называется *нульмерным*, если $\dim\{f^{\,-1}(y)\}=0$ для каждого $y\in\overline{{\mathbb R}^n}$. Напомним, что отображение $f\colon D\rightarrow {\mathbb R}^n$ называется *отображением с ограниченным искажением*, если выполнены следующие условия:

1) $f\in W_{\rm loc}^{1,n}$,

2) якобиан $J(x,f)$ отображения f в точке $x\in D$ сохраняет знак почти всюду в D,

3) при почти всех $x\in D$ и некоторой постоянной $K<\infty$ имеет место соотношение

$$\|f^{\,\prime}(x)\|^n\le K|J(x,f)|, \tag{2}$$

где, как обычно, $\|f^{\,\prime}(x)\|:=\sup_{h\in{\mathbb R}^n\colon |h|=1}|f^{\,\prime}(x)h|$ (см., например, $\S\,3$ гл. I в [3] либо определение 2.1 разд. 2 гл. I в [4]). Начало интенсивных исследований пространственных отображений с ограниченным искажением положено Ю. Г. Решетняком. В его работах, в частности, доказаны открытость и дискретность отображений f с ограниченным искажением (см. теоремы 6.3 и 6.4, $\S\,6$ гл. II в [3]). Наименьшую из постоянных K, для которых соотношение (2) остается справедливым, обозначим через $K_O(f)$. Для отображения $f\colon D\rightarrow {\mathbb R}^n$, множества $E\subset D$ и $y\in{\mathbb R}^n$ определим *функцию кратности* $N(y,f,E)$ как число прообразов точки y во множестве E, т. е. $N(y,f,E)={\rm card}\,\{x\in E\colon f(x)=y\}\,,$ $N(f,E)\,=\,\sup_{y\in{\mathbb R}^n}\,N(y,f,E)$.

Здесь и далее *кривой* γ мы называем непрерывное отображение отрезка $[a,b]$ (либо открытого интервала (a,b)) в $\mathbb{R}^n$, $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{R}^n$. Под семейством кривых Γ подразумевается некоторый фиксированный набор кривых γ, а $f(\Gamma) = \{f\circ\gamma|\gamma\in\Gamma\}$. Следующие определения могут быть найдены, например, в разд. 1–6 гл. I в [5]. Борелева функция $\rho\colon\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_\gamma \rho(x)ds$ удовлетворяет условию $\int\limits_\gamma \rho(x)ds \geq 1$ для всех кривых $\gamma\in\Gamma$. В этом случае пишем $\rho\in\operatorname{adm}\Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma)=\inf_{\rho\in\operatorname{adm}\Gamma}\int\limits_D \rho^n(x)dm(x)\,.$$

Свойства модуля в некоторой мере аналогичны свойствам меры Лебега m в $\mathbb{R}^n$ (см., например, теорему 6.2 в [5]). В частности, для произвольных семейств Γ_i кривых γ в $\mathbb{R}^n$ имеет место свойство полуаддитивности модуля (см. там же)

$$M\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\Gamma_i\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}M(\Gamma_i). \tag{3}$$

Известно, что для произвольного отображения $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ с ограниченным искажением имеет место неравенство

$$M(\Gamma)\leq N(f,A)K_O(f)M(f(\Gamma)) \tag{4}$$

для любого борелевского множества A в области D такого, что $N(f,A)<\infty$, и произвольного семейства Γ кривых γ в A (см. теорему 3.2 в [6] либо теорему 6.7 гл. II в [4]). В настоящей работе будем рассматривать отображения, удовлетворяющие при заданной измеримой по Лебегу функции $Q(x)$, $Q\colon\widetilde{D}\to[1,\infty]$ более общим, чем (4), оценкам вида

$$M(\Gamma)\leq\int\limits_{\widetilde{D}} Q(y)\rho_*^n(y)dm(y), \tag{5}$$

для произвольной функции ρ_* такой, что произвольная кривая $\gamma_*\in f(\Gamma)$ имеет длину не меньше единицы в метрике ρ_*, т. е.

$$\int\limits_{\gamma_*}\rho_*(y)ds\geq 1\quad\forall\,\gamma_*\in f(\Gamma),$$

где область $\widetilde{D}\subset f(D)$. В (5) заданная функция $Q(y)$, вообще говоря, неограничена (см., например, неравенство (8.5) гл. VIII в [7]). Соотношения вида (5) установлены для многих классов отображений, например для так называемых отображений с конечным искажением длины при вполне конкретных значениях $Q(y)$ (см., например, теорему 8.5 в [7], а также работу [8]). Заметим, что если $Q(y)\leq K$ почти всюду, неравенство (5) при дополнительном условии гомеоморфности отображения f определяет *квазиконформные* отображения, и только их (см. определение 13.1 и теорему 34.3 в [5]). Отметим также, что даже в случае ограниченной функции

$Q(y)$ в соотношении (5) соответствующее отображение f, не являющееся a priori сохраняющим ориентацию, не должно быть ни открытым, ни дискретным, тем более гомеоморфным (см., например, разд. 8.10 в [7]).

Ясно, что если в (4) функция кратности $N(f, A)$ конечна, то сохраняющее ориентацию отображение f, по определению, дискретно, а следовательно, в силу следствия из [9, с. 333], и открыто. Поставим теперь обратную задачу: пусть мы имеем неравенство вида (5), тогда что можно сказать об отображении f в плане его дискретности и открытости?

Введем еще несколько определений и обозначений. Пусть $Q\colon D \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция, тогда $q_{x_0}(r)$ означает среднее интегральное значение $Q(x)$ над сферой $S(x_0, r)$,

$$q_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{|x-x_0|=r} Q(x)\, dS\,, \tag{6}$$

где dS — элемент площади поверхности S. Будем говорить, что функция $\varphi\colon D \to \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$ (пишем $\varphi \in FMO(x_0)$), если

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}}\ \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int\limits_{B(x_0,\, \varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon|\ dm(x)\ <\ \infty,$$

где $\overline{\varphi}_\varepsilon = \dfrac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \displaystyle\int_{B(x_0,\, \varepsilon)} \varphi(x)\ dm(x)$ (см., например, разд. 6.1 гл. VI в [7]).

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема. *Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ — сохраняющее ориентацию отображение. Предположим, что для каждой области $D' \subset f(D)$, $\overline{D'} \subset f(D)$, существует функция $Q\colon D' \to [1, \infty]$ такая, что для произвольного семейства Γ кривых γ в D и произвольной функции $\rho_*(y) \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$ выполнено соотношение вида* (5). *Пусть функция $Q(y)$ удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий*:

1) *Q принадлежит $FMO(y_0)$ в произвольной точке $y_0 \in D'$,*

2) *$q_{y_0}(r) = O\left(\left[\log \dfrac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ при $r \to 0$ и при всех $y_0 \in D'$, где функция $q_{y_0}(r)$ определена равенством* (6),

3) *для каждого $y_0 \in D'$ найдется некоторое число $\delta(y_0) > 0$, $\delta(y_0) < < \operatorname{dist}\,(y_0, \partial D')$, такое, что*

$$\int\limits_0^{\delta(y_0)} \frac{dt}{t q_{y_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} = \infty\,. \tag{7}$$

Тогда отображение f открыто и дискретно.

***Замечание* 1.** Строго говоря, функция Q в формулировке теоремы, вообще говоря, зависит от области D', и должна обозначаться как $Q_{D'}$. Мы не используем подобную запись, чтобы в дальнейшем не усложнять обозначения.

Заметим, что если $Q(x) \equiv K = \text{const}$, то теорема устанавливает открытость и дискретность для отображений, удовлетворяющих условию вида $M(\Gamma) \le \le K M(f(\Gamma))$, где постоянная $K = K_{D'}$, вообще говоря, зависит от области D'.

Неравенствам такого вида удовлетворяют, в частности, все отображения с ограниченным искажением, когда $Q(x) = N(f, D')\,K_O(f)$ (см. соотношение (4)).

Теорема остается справедливой также для отображений вида $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ при условии, что требования 1–3 в этой теореме будут переформулированы в точке $y_0 = 0$ для отображения $\widetilde{f} = f \circ \varphi$, где $\varphi(x) = \dfrac{x}{|x|^2}$, $\varphi\colon \infty \mapsto 0$.

2. Формулировка и доказательство основной леммы. Связный компакт $C \subset \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ будем называть *континуумом*. Пусть $E,\ F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ — произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E, F, D)$ семейство всех кривых $\gamma\colon [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, т. е. $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$. Говорят, что семейство кривых Γ_1 *минорируется* семейством Γ_2 (пишем $\Gamma_1 > \Gamma_2$), если для каждой кривой $\gamma \in \Gamma_1$ существует подкривая, которая принадлежит семейству Γ_2. В этом случае $M(\Gamma_1) \le M(\Gamma_2)$ (см., например, теорему 6.4 в [5]). Следующая лемма включает в себя основной результат настоящей работы в наиболее общей ситуации.

Лемма. *Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ — сохраняющее ориентацию отображение. Предположим, что для каждой области $G \subset f(D)$ такой, что $\overline{G} \subset f(D)$, существует измеримая по Лебегу функция $Q\colon G \to [1, \infty]$ такая, что*

$$M(\Gamma) \le \int\limits_{f(D)} Q(y)\rho_*^n(y)\ \ dm(y) \tag{8}$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в G и произвольной функции $\rho_*(y) \in \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$. Далее, предположим, что для каждого $y_0 \in G$ найдется $\varepsilon(y_0) > 0$, для которого выполнено соотношение

$$\int\limits_{A(\varepsilon,\varepsilon(y_0),y_0)} Q(y)\psi^n(|y - y_0|)\ dm(y) \ = \ o\left(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)\right) \tag{9}$$

для некоторой борелевской функции $\psi(t)\colon (0, \infty) \to [0, \infty]$ такой, что

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon(y_0)) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon(y_0)} \psi(t)dt < \infty \tag{10}$$

при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon(y_0))$, где $A(\varepsilon, \varepsilon(y_0), y_0)$ определено в (1) *при $r_1 = \varepsilon,\ r_2 = \varepsilon(y_0)$, $x_0 = y_0$. Тогда отображение f открыто и дискретно.*

Замечание 2. В условиях леммы можно считать, что для произвольного фиксированного A такого, что $0 < A < \varepsilon(y_0)$, и всех $\varepsilon \in (0, A)$ выполняется условие вида $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{A} \psi(t)dt > 0$. Действительно, из (9) и (10) следует, что $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{A} \psi(t)dt \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, поскольку $Q \ge 1$, и величина интеграла слева в (9) увеличивается при уменьшении ε.

Доказательство леммы. Поскольку произвольное сохраняющее ориентацию нульмерное отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ является открытым и дискретным в области D (см., например, следствие из [9, с. 333]), для справедливости леммы достаточно показать, что f — нульмерное отображение. Предположим противное. Тогда найдется $y_0 \in \mathbb{R}^n$ такое, что множество $\{f^{-1}(y_0)\}$ не является всюду разрывным. Следовательно, по определению, существует континуум $C \subset \{f^{-1}(y_0)\}$. Заметим, что, поскольку отображение f сохраняет ориентацию, $f \not\equiv y_0$. Отсюда по теореме о сохранении знака найдутся $x_0 \in D$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что $\overline{B(x_0, \varepsilon_0)} \subset D$ и

$$f(x) \neq y_0 \qquad \forall\, x \in \overline{B(x_0, \varepsilon_0)}\,. \tag{11}$$

Выберем произвольным образом область $G_1 \subset D$ такую, что $\overline{G_1} \subset D$, и так, чтобы $C \cup \overline{B(x_0, \varepsilon_0)} \subset G_1$. Тогда, в силу леммы 1.15 в [10],

$$M\left(\Gamma\left(C, \overline{B(x_0, \varepsilon_0)}, G_1\right)\right) > 0\,. \tag{12}$$

Заметим, что в силу неравенства (11) и соотношения $f(C) = \{y_0\}$ ни одна из кривых семейства $\Delta = f\left(\Gamma\left(C, \overline{B(x_0, \varepsilon_0)}, G_1\right)\right)$ не вырождается в точку. В то же время все кривые указанного выше семейства Δ имеют одним из своих концов точку y_0. Пусть Γ_i — семейство кривых $\alpha_i(t)\colon (0,1) \to \mathbb{R}^n$ таких, что $\alpha_i(1) \in S(y_0, r_i)$, $r_i < \varepsilon(y_0)$, r_i — некоторая строго положительная вещественная последовательность такая, что $r_i \to 0$ при $i \to \infty$ и $\alpha_i(t) \to y_0$ при $t \to 0$. Тогда

$$\Gamma\left(C, \overline{B(x_0, \varepsilon_0)}, G_1\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i^*\,, \tag{13}$$

где Γ_i^* — подсемейство всех кривых γ из $\Gamma\left(C, \overline{B(x_0, \varepsilon_0)}, G_1\right)$ таких, что $f(\gamma)$ имеет подкривую в Γ_i. Зафиксируем $i \in \mathbb{N}$ и при каждом $\varepsilon \in (0, r_i)$ рассмотрим семейство всех кривых $\Gamma_{i,\varepsilon}$, соединяющих сферы $S(y_0, r_i)$ и $S(y_0, \varepsilon)$ в $f(G_1)$. Заметим, что для произвольного $\varepsilon \in (0, r_i)$

$$\Gamma_i > \Gamma_{i,\varepsilon}\,. \tag{14}$$

Рассмотрим функцию

$$\rho_{i,\varepsilon}(y) = \begin{cases} \psi\left(|y - y_0|\right)/I(\varepsilon, r_i), & y \in A(\varepsilon, r_i, y_0), \\ \\ 0, & y \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus A(\varepsilon, r_i, y_0)\,, \end{cases}$$

где $I(\varepsilon, r_i) = \displaystyle\int_{\varepsilon}^{r_i} \psi(t)dt$. Заметим, что $\rho_{i,\varepsilon}(y) \in \operatorname{adm}\Gamma_{i,\varepsilon}$. Действительно, согласно теореме 5.7 в [5], интеграл от произвольной радиальной функции $\Psi(|y - y_0|)$ по кривой, соединяющей сферы $S(y_0, r_i)$ и $S(y_0, \varepsilon)$, не меньше, чем соответствующий интеграл по отрезку (ε, r_i) от функции $\Psi(t)$, а именно, $\displaystyle\int_{\gamma} \rho_{i,\varepsilon}(y)ds \geq \geq \frac{1}{I(\varepsilon, r_i)} \int_{\varepsilon}^{r_i} \psi(t)dt = 1$ для произвольной кривой $\gamma \in \Gamma_{i,\varepsilon}$. Следовательно, согласно (14), также $\rho_{i,\varepsilon}(y) \in \operatorname{adm}\Gamma_i$ и в силу соотношения (8)

$$M(\Gamma_i^*) \leq \int\limits_{f(D)} Q(y)\rho_{i,\varepsilon}^n(y)dm(y) = \int\limits_{A(\varepsilon, \varepsilon(y_0), y_0)} Q(y)\rho_{i,\varepsilon}^n(y)\, dm(y) \leq \mathfrak{F}_i(\varepsilon), \tag{15}$$

где $\mathfrak{F}_i(\varepsilon) = \dfrac{1}{I(\varepsilon, r_i)^n} \displaystyle\int_{A(\varepsilon, \varepsilon(y_0), y_0)} Q(y)\, \psi^n(|y - y_0|)\, dm(y)$ и $I(\varepsilon, r_i) = \displaystyle\int_{\varepsilon}^{r_i} \psi(t)dt$. Учитывая (9), имеем следующее соотношение:

$$\int\limits_{A(\varepsilon,\varepsilon(y_0),y_0)} Q(y)\,\psi^n(|y-y_0|)\,dm(y) \,=\, G(\varepsilon)\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon(y_0)}\psi(t)dt\right)^n,$$

где $G(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ по условию леммы. Заметим, что $\mathfrak{F}_i(\varepsilon) = = G(\varepsilon)\left(1+\dfrac{\int_{r_i}^{\varepsilon(y_0)}\psi(t)dt}{\int_{\varepsilon}^{r_i}\psi(t)dt}\right)^n$, где $\int_{r_i}^{\varepsilon(y_0)}\psi(t)dt<\infty$ — фиксированное число, а $\int_{\varepsilon}^{r_i}\psi(t)dt\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$, так как величина интеграла слева в (9) увеличивается при уменьшении ε. Таким образом, $\mathfrak{F}_i(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Переходя к пределу в неравенстве (15) при $\varepsilon\to 0$, левая часть которого не зависит от ε, получаем $M(\Gamma_i^*)=0$ при любом натуральном i. Однако тогда $M\left(\Gamma\left(C,\overline{B(x_0,\varepsilon_0)},G_1\right)\right)=0$ в силу соотношений (13) и (3), что противоречит неравенству (12). Полученное противоречие доказывает, что отображение f является нульмерным, а значит, согласно следствию работы [9, с. 333], отображение f открыто и дискретно, что и требовалось доказать.

Лемма доказана.

3. О доказательстве основного результата. Доказательство теоремы непосредственно следует из леммы настоящей работы, а также леммы 8 в [1].

***Замечание* 3.** Условие $Q(x)\geq 1$ обеспечивает, что $q_{x_0}(r)\geq 1$ при почти всех значениях r. Поэтому $\displaystyle\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\frac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}\leq\log\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}<\infty$ при всех $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2>0$, в связи с чем см. также лемму 8 в [1].

4. Примеры. ***Пример* 1.** Наиболее важным примером отображений, для которых выполнены оценки вида (5), являются так называемые *отображения с конечным искажением длины* (см., например, гл. VIII [7]). Введение и изучение указанного выше класса обусловлено необходимостью описать „минимальные" требования, налагаемые на отображения, влекущие выполнение каких-либо оценок искажения модуля семейств кривых при них. Введем обозначения.

Внешняя дилатация отображения f в точке x определяется равенством $K_O(x,f)=\dfrac{\|f'(x)\|^n}{|J(x,f)|}$, если $J(x,f)\neq 0$, $K_O(x,f)=1$, если $f'(x)=0$, и $K_O(x,f)=\infty$ в остальных точках. Полагаем

$$K_I\left(y,f^{-1},E\right):=\sum\limits_{x\in E\cap f^{-1}(y)}K_O(x,f)\,.$$

Следствие. *Пусть $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ — сохраняющее ориентацию отображение с конечным искажением длины. Предположим, что для каждой области $G\subset D$, $\overline{G}\subset D$, функция $K_I\left(y,f^{-1},G\right)$ в произвольной точке $y_0\in f(G)$ удовлетворяет хотя бы одному из условий $1-3$ теоремы. Тогда отображение f открыто и дискретно.*

Доказательство. Заметим, что любое отображение $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ с конечным искажением длины удовлетворяет неравенству

$$M(\Gamma)\leq\int\limits_{f(E)}K_I\left(y,f^{-1},E\right)\rho_*^n(y)dm(y)$$

для любого измеримого множества $E \subset D$, произвольного семейства $\Gamma \subset E$ кривых γ в E и каждой функции $\rho_*(y) \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$ (см., например, теорему 8.5 гл. VIII [7]). Все остальное следует из теоремы.

Следствие доказано.

***Пример* 2.** Условие сохранения ориентации отображением f в формулировках всех приведенных выше результатов, вообще говоря, нельзя опустить. В разд. 8.10 гл. VIII [7] приведен пример отображения f с конечным искажением длины, не сохраняющего ориентацию, для которого $M(f(\Gamma)) = M(\Gamma)$, т. е. в неравенстве (5) функция $Q \equiv 1$, и которое не дискретно и не открыто.

Приведем другой пример. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Определим f в замкнутой области $\{x_n \geq 0\}$ как тождественное, а при $x_n < 0$ полагаем $f(x) = (x_1, \ldots, -x_n)$. Это отображение представляет собой отражение относительно гиперплоскости $x_n = 0$ при $x_n < 0$ (а при неотрицательных значениях x_n просто тождественное отображение). Заметим, что f является отображением с конечным искажением длины, более того, отображение f сохраняет длины кривых. Следовательно, f удовлетворяет неравенству (5) при $Q \equiv 1$. Это отображение является дискретным, но не является открытым: например, шар $\mathbb{B}^n$ при отображении f переходит в полушарие $\{y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \colon |y| < 1, y_n \geq 0\}$, которое не является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$.

1. *Севостьянов Е. А.* О точках ветвления отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Сиб. мат. журн. – 2010. – **51**, № 5. – С. 1129 – 1146.
2. *Hurewicz W., Wallman H.* Dimension theory. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1948. – 165 p.
3. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982. – 285 с.
4. *Rickman S.* Quasiregular mappings // Results in Math. and Relat. Areas (3), 26. – Berlin: Springer, 1993. – 213 p.
5. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – 1971. – **229**.
6. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. Math. – 1969. – **448**. – P. 1 – 40.
7. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009. – 367 p.
8. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397 – 1420.
9. *Titus C. J., Young G. S.* The extension of interiority with some applications // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**. – P. 329 – 340.
10. *Näkki R.* Boundary behavior pf quasiconformal mappings in n-space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1970. – **484**. – P. 1 – 50.

Получено 07.12.10,
после доработки — 17.03.11