УДК 517.55+514.17

Т. М. Осіпчук, М. В. Ткачук (Ін-т математики НАН України, Київ)

АНАЛІТИЧНИЙ КРИТЕРІЙ ЛІНІЙНОЇ ОПУКЛОСТІ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ ГАРТОГСА З ГЛАДКОЮ МЕЖЕЮ В $\mathbb{H}^2$

We establish a criterion of the local linear convexity of sets in the two-dimensional quaternion space $\mathbb{H}^2$, that are similar to the bounded Hartogs domains with smooth boundaries in the two-dimensional complex space $\mathbb{C}^2$.

Установлен критерий локальной линейной выпуклости множеств в двумерном кватернионном пространстве $\mathbb{H}^2$, являющихся аналогами ограниченных областей Гартогса с гладкой границей в двумерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^2$.

Одним із ключових понять багатовимірного комплексного аналізу є поняття лінійної опуклості. Область $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, називається *локально лінійно опуклою*, якщо для кожної точки z^0 її межі ∂D існує комплексна гіперплощина $\Pi^{\mathbb{C}}_{n-1}$, яка проходить через точку z^0 і не перетинає область D в деякому околі цієї точки; якщо при цьому $\Pi^{\mathbb{C}}_{n-1} \cap D = \varnothing$, то область D називається (*глобально*) *лінійно опуклою*.

Поняття локальної та глобальної лінійної опуклості з'явились в роботі Бенке і Пешля [1], котрі досліджували області $D = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \colon \varphi(z) < 0\}$, визначені за допомогою функції $\varphi \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$ із класу C^2, градієнт якої $\operatorname{grad}\varphi$ не дорівнює нулю скрізь на межі ∂D області D. Використавши позначення

$$\mathfrak{L}_\varphi := -\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z_2} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial \bar{z}_1} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z_1\partial \bar{z}_1} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z_2\partial \bar{z}_1} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial \bar{z}_2} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z_1\partial \bar{z}_2} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z_2\partial \bar{z}_2} \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{H}_\varphi := -\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z_2} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z_1} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z_1\partial z_1} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z_2\partial z_1} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z_2} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z_1\partial z_2} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z_2\partial z_2} \end{vmatrix},$$

вони встановили, що для локальної лінійної опуклості області D необхідно, щоб скрізь на її межі виконувалась умова $\mathfrak{L}_\varphi \geq |\mathfrak{H}_\varphi|$, і достатньо, щоб скрізь на ∂D виконувалась умова $\mathfrak{L}_\varphi > |\mathfrak{H}_\varphi|$. Б. С. Зінов'єв [2] отримав наступне узагальнення даних результатів на випадок довільної розмірності $n \geq 2$.

Нехай область

$$D = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \colon \varphi(z) < 0\}$$

задано за допомогою функції $\varphi \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ із класу C^2, градієнт якої відмінний від нуля скрізь на ∂D. Позначивши $z_{n+j} = \bar{z}_j$, $j = 1, \ldots, n$, визначимо в точці $z^0 \in \mathbb{C}^n$ квадратичну форму

$$\omega_\varphi(z^0, w) := \sum_{j,k=1}^{2n} \frac{\partial^2\varphi(z^0)}{\partial z_j \partial z_k} w_j w_k.$$

Якщо $z^0 \in \partial D$, то через $T_{\mathbb{C}}(z^0)$ позначаємо множину всіх векторів $w = (w_1, w_2, \ldots$ $\ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ таких, що $\sum_{j=1}^n \dfrac{\partial\varphi(z^0)}{\partial z_j} w_j = 0$. Використовуючи введені позначення, згадані результати Б. С. Зінов'єва [2] можна сформулювати таким чином:

© Т. М. ОСІПЧУК, М. В. ТКАЧУК, 2011

якщо в кожній точці $z^0 \in \partial D$ квадратична форма $\omega_\varphi(z^0, w)$ додатна на векторах $w \in T_{\mathbb{C}}(z^0) \setminus \{0\}$, то область D є локально лінійно опуклою; навпаки, якщо область D локально лінійно опукла, то

$$\omega_\varphi(z^0, w) \geq 0 \qquad \forall\, z^0 \in \partial D \quad \forall\, w \in T_{\mathbb{C}}(z^0) \tag{1}$$

(еквівалентність цих результатів при $n = 2$ наведеним умовам локальної лінійної опуклості із роботи Бенке та Пешля [1] також показано в роботі [2]).

Із порівняння між собою згаданих вище результатів природно виникає наступне питання, сформульоване в якості однієї із найскладніших нерозв'язаних задач теорії лінійно опуклих областей в огляді С. В. Знаменського [3] (задача 1): чи буде умова (1) достатньою для локальної лінійної опуклості області D? В [3] зазначено, що спроби розв'язати цю задачу при $n = 2$ розпочато в шістдесятих роках минулого століття. Але в 1997 р. К. О. Кісельману [4] вдалося це зробити, використовуючи області Гартогса, побудовані спеціальним чином (див. також роботу Ю. Б. Зелінського [5]).

Нас цікавить питання перенесення поняття (локально) лінійно опуклих множин з простору $\mathbb{C}^n$ на багатовимірний кватерніонний простір $\mathbb{H}^n$ та розгляд властивостей таких об'єктів. Принципова відмінність цих понять обумовлена антикомутативністю алгебри кватерніонів. Ось чому відразу ж виникає потреба вводити (локальну) лінійну опуклість зліва та справа.

Кватерніонний аналог результату Б. С. Зінов'єва для довільних областей $\mathbb{H}^n$ з гладкою межею було доведено Т. М. Осіпчук [6] (тут наведено як теорему 1). А в даній роботі ми розглядаємо множини в $\mathbb{H}^n$, аналогічні обмеженим областям Гартогса в $\mathbb{C}^n$, і для них встановлюємо критерій лінійної опуклості у випадку $n = 2$ (теорема 2).

Нехай $\mathbb{H}$ — алгебра кватерніонів $h = h_0 + e_1 h_1 + e_2 h_2 + e_3 h_3$, де h_0, h_1, h_2, $h_3 \in \mathbb{R}$, а уявні одиниці e_i, $i = 1, 2, 3$, задовольняють умови

$$e_i e_i = -1, \quad e_i e_j = -e_j e_i, \quad i \neq j,$$

$$e_1 e_2 = e_3, \quad e_2 e_3 = e_1, \quad e_3 e_1 = e_2.$$

Позначимо $\mathbb{H}^n := \underbrace{\mathbb{H} \times \mathbb{H} \times \ldots \times \mathbb{H}}_{n}$, $z := (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{H}^n$, де

$$z_j := x_0^j + e_1 x_1^j + e_2 x_2^j + e_3 x_3^j \in \mathbb{H}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Тоді кожну точку $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{4n}$, де $x_k = \{x_k^j\}_{j=1}^n$, $k = \overline{0, 3}$, ми ототожнюємо з точкою $z \in \mathbb{H}^n$. Нехай $\|z\| = \|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^3 \left(x_k^j\right)^2}$, тоді окіл $U(w) = \{z \colon \|z - w\| < \varepsilon\}$ є відкритою кулею $B(w, \varepsilon)$ із центром у точці $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \mathbb{H}^n$ і радіусом ε.

Означення [5]. *Область $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ називається локально лінійно опуклою зліва* (*справа*), *якщо в кожній точці $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ межі $\partial\Omega$ області Ω існує кватерніонна гіперплощина $\sum_{j=1}^n c_j\,(z_j - w_j) = 0$ $\left(\sum_{j=1}^n (z_j - w_j)\, c_j = 0\right)$, $c_j \in \mathbb{H}$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{H}^n$, яка проходить через точку $w \in \partial\Omega$ і не перетинає Ω в деякому околі цієї точки*; *якщо при цьому кватерніонна гіперплощина не перетинає область Ω, то така область називається лінійно опуклою зліва* (*справа*).

Введемо „спряжені” кватерніони z_j^1, z_j^2, z_j^3 до z_j при $j = \overline{1,n}$:

$$z_j^1 := x_0^j + e_1 x_1^j - e_2 x_2^j - e_3 x_3^j,$$

$$z_j^2 := x_0^j - e_1 x_1^j + e_2 x_2^j - e_3 x_3^j,$$

$$z_j^3 := x_0^j - e_1 x_1^j - e_2 x_2^j + e_3 x_3^j.$$

Нехай $\Omega = \{z\colon \rho(z) < 0\}$ — область в $\mathbb{H}^n$ з межею $\partial\Omega = \{z\colon \rho(z) = 0\}$, де $\rho(z) = \rho(z, z^1, z^2, z^3)\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ — двічі неперервно диференційовна функція в околі $U(\partial\Omega)$ $(\rho \in C^2)$, $z^k = (z_1^k, z_2^k, \ldots, z_n^k) \in \mathbb{H}^n$, $k = 1, 2, 3$, і $\operatorname{grad} \rho \neq 0$ скрізь на $\partial\Omega$. Будемо говорити, що функція ρ *визначає* область Ω.

Відомо [6], що повний диференціал функції ρ в точці w обчислюється за формулами (тут і скрізь далі $z_j^0 := z_j$):

$$d\rho(w) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=0}^{3} \frac{\partial \rho(w)}{\partial x_l^j}\, dx_l^j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=0}^{3} \frac{\partial \rho(w)}{\partial z_j^l}\, dz_j^l = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=0}^{3} dz_j^l\, \frac{\partial \rho(w)}{\partial z_j^l},$$

де формальні похідні $\dfrac{\partial \rho(w)}{\partial z_j^l}$ мають вигляд

$$\frac{\partial \rho(w)}{\partial z_j} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \rho(w)}{\partial x_0^j} - e_1 \frac{\partial \rho(w)}{\partial x_1^j} - e_2 \frac{\partial \rho(w)}{\partial x_2^j} - e_3 \frac{\partial \rho(w)}{\partial x_3^j}\right),$$

$$\frac{\partial \rho(w)}{\partial z_j^1} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \rho(w)}{\partial x_0^j} - e_1 \frac{\partial \rho(w)}{\partial x_1^j} + e_2 \frac{\partial \rho(w)}{\partial x_2^j} + e_3 \frac{\partial \rho(w)}{\partial x_3^j}\right),$$

$$\frac{\partial \rho(w)}{\partial z_j^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \rho(w)}{\partial x_0^j} + e_1 \frac{\partial \rho(w)}{\partial x_1^j} - e_2 \frac{\partial \rho(w)}{\partial x_2^j} + e_3 \frac{\partial \rho(w)}{\partial x_3^j}\right),$$

$$\frac{\partial \rho(w)}{\partial z_j^3} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \rho(w)}{\partial x_0^j} + e_1 \frac{\partial \rho(w)}{\partial x_1^j} + e_2 \frac{\partial \rho(w)}{\partial x_2^j} - e_3 \frac{\partial \rho(w)}{\partial x_3^j}\right).$$

Будемо говорити, що вектор $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{H}^n$ належить кватерніонному дотичному простору $T_{\mathbb{H}}^L(w)$ $\big($чи $T_{\mathbb{H}}^R(w)\big)$ до області Ω в точці $w \in \partial\Omega$, якщо

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \rho(w)}{\partial z_i}\, s_i = 0 \quad \left(\text{чи, відповідно, } \sum_{i=1}^{n} s_i \frac{\partial \rho(w)}{\partial z_i} = 0\right).$$

Як звичайно, множина векторів $z^0 + T_{\mathbb{H}}^L(w)$ $\big($чи $z^0 + T_{\mathbb{H}}^R(w)\big)$ називається кватерніонною дотичною гіперплощиною з рівнянням

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \rho(w)}{\partial z_i}\,(z_i - w_i) = 0 \quad \left(\text{чи, відповідно, } \sum_{i=1}^{n} (z_i - w_i) \frac{\partial \rho(w)}{\partial z_i} = 0\right).$$

Запишемо вираз для формальних похідних $\dfrac{\partial \rho(w)}{\partial z_j}$ у вигляді

$$\frac{\partial \rho(w)}{\partial z_j} = \sum_{l=0}^{3} \gamma_l e_l \frac{\partial \rho(w)}{\partial x_l^j},$$

де γ_l — відповідні коефіцієнти при виразах $e_k \dfrac{\partial\rho(w)}{\partial x_l^j}$ з урахуванням знаку. Нехай

$$\frac{\partial^2\rho(w)}{\partial z_i^k \partial z_j^l} := \frac{\partial}{\partial z_i^k}\left(\frac{\partial\rho(w)}{\partial z_j^l}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{3}\gamma_k e_k \frac{\partial}{\partial x_k^i}\left(\sum_{l=0}^{3}\gamma_l e_l \frac{\partial\rho(w)}{\partial x_l^j}\right) = \sum_{k,l=0}^{3}\gamma_k\gamma_l e_k e_l \frac{\partial^2\rho(w)}{\partial x_k^i \partial x_l^j}.$$

Тоді

$$\omega_\rho^1(w,s) := \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k,l=0}^{3}\frac{\partial^2\rho(w)}{\partial z_i^k \partial z_j^l} s_j^l s_i^k,$$

$$\omega_\rho^2(w,s) := \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k,l=0}^{3} s_i^k \frac{\partial^2\rho(w)}{\partial z_i^k \partial z_j^l} s_j^l,$$

$$\omega_\rho^3(w,s) := \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k,l=0}^{3} s_j^l s_i^k \frac{\partial^2\rho(w)}{\partial z_i^k \partial z_j^l}.$$

Зважаючи на те, що $\omega_\rho^1(w,s) = \omega_\rho^2(w,s) = \omega_\rho^3(w,s)$ [6], далі під позначенням $\omega_\rho(w,s)$ будемо розуміти один із виразів $\omega_\rho^m(w,s)$, $m = 1,2,3$.

Теорема 1 [6]. *Для того щоб область Ω була локально лінійно опуклою зліва (справа), необхідно, щоб для кожної точки $w \in \partial\Omega$ виконувалась нерівність*

$$\omega_\rho(w,s) \geq 0, \tag{2}$$

для усіх векторів $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{H}^n$, $\|s\| = 1$, $s \in T_{\mathbb{H}}^L(w)\setminus\{0\}$ $\big($відповідно, $s \in T_{\mathbb{H}}^R(w)\setminus\{0\}\big)$, і достатньо, щоб для кожної точки $w \in \partial\Omega$ виконувалась нерівність

$$\omega_\rho(w,s) > 0 \tag{3}$$

для тих самих векторів s.

Узагальнимо відомі поняття множини Гартогса та повної множини Гартогса з $\mathbb{C}^n$ на випадок $\mathbb{H}^n$.

Означення. *Множиною Гартогса в $\mathbb{H}^n$ називається така множина, яка разом із кожною своєю точкою $(z,t) \in \mathbb{H}^{n-1}\times\mathbb{H}$ також містить кожну точку $(z,t') \in \mathbb{H}^{n-1}\times\mathbb{H}$, де $|t'| = |t|$. Якщо ж множина в $\mathbb{H}^n$ разом із кожною своєю точкою (z,t) також містить усі точки (z,t'), де $|t'| \leq |t|$, то така множина називається повною множиною Гартогса в $\mathbb{H}^n$.*

Довільну повну область Гартогса в $\mathbb{H}^n$ (далі область Гартогса) можна подати у вигляді

$$\Omega = \{(z,t) \in \mathbb{H}^{n-1}\times\mathbb{H}\colon |t| < R(z)\},$$

де $R\colon \mathbb{H} \to \mathbb{R}^+$.

Далі будемо розглядати простір $\mathbb{H}^2$. Для зручності частинні похідні $\dfrac{\partial h}{\partial z^k}, \dfrac{\partial^2 h}{\partial z^k \partial z^l}$, $k,l = \overline{0,3}$, $z^0 := z$, будемо позначати через h_{z^k}, $h_{z^k z^l}$ відповідно. Нехай D ($D \subset \mathbb{H}$)

— відкрита обмежена множина і $h\colon \mathbb{H} \to \mathbb{R}$, $h(z) > 0$, де $z \in D$, $h(z) \in C^2$. Будемо розглядати обмежені області Гартогса, визначені таким чином:

$$\Omega := \{(z,t) \in D \times \mathbb{H}\colon |t|^2 < h(z)\}, \tag{4}$$

$$h_z(z) \neq 0 \quad \text{в точках, де } h(z) = 0.$$

Нехай $\rho(z,t) := |t|^2 - h(z)$. Тоді

$$d\rho = \bar{t}dt - h_z dz \neq 0 \tag{5}$$

(також $dt \cdot \bar{t} - dz \cdot h_z \neq 0$) в точках, де $\rho = 0$, тобто в точках $(z,t)\colon |t|^2 = h(z)$. Дійсно, $\bar{t}dt \neq 0$ в усіх точках $(z,t) \in \partial\Omega$, крім тих, що належать гіперплощині $t = 0$, але за умовою при $h(z) = |t|^2 = 0$ $h_z \neq 0$. Тобто умова (5) рівносильна умові $h_z \neq 0$, коли $h(z) = 0$ (іншими словами, якщо функція h визначає множину D, то функція $|t|^2 - h(z)$ визначає множину Ω, і навпаки). Отже, область Ω можна подати у вигляді

$$\Omega := \{(z,t) \in D \times \mathbb{H}\colon \rho(z,t) < 0\}. \tag{6}$$

Основним результатом статті є наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай Ω — обмежена повна область Гартогса в $\mathbb{H}^2$, визначена в* (4). *Для того щоб область Ω була лінійно опуклою зліва* (*чи справа*), *необхідно і достатньо, щоб виконувалась диференціальна умова* (2) *в кожній точці межі $w \in \partial\Omega$ і для кожного ненульового вектора, що належить дотичній гіперплощині $T^L_{\mathbb{H}}(w)$ $\big($чи, відповідно, $T^R_{\mathbb{H}}(w)\big)$.*

Для її доведення потрібно кілька лем.

Лема 1. *Нехай функція $h \in C^k$, $k \geq 2$, визначає відкриту множину $D \subset \mathbb{H}$. Тоді*:

1) *повна область Гартогса Ω має межу класу C^k, $\rho \in C^k$, $k \geq 2$;*

2) *функція ρ, що визначає область Ω, задовольняє диференціальну умову* (2) *в кожній точці межі $\partial\Omega$ тоді і тільки тоді, коли функція h задовольняє умову*

$$\frac{|h_z|^2}{h} \geq \frac{1}{2}\sum_{k,l=0}^{3} h_{z^k z^l} p^l p^k, \quad \textit{коли} \quad h > 0 \quad \textit{і} \quad p^l \in \mathbb{H}. \tag{7}$$

Більш того, функція ρ задовольняє строгу диференціальну умову (3) *в кожній точці межі $\partial\Omega$ тоді і тільки тоді, коли функція h задовольняє умову* (7) *зі знаком строгої нерівності.*

Доведення. Перше твердження леми випливає з попередніх викладок. Доведемо друге твердження.

Запишемо диференціальну форму $\omega_\rho(w,s)$ для функції $\rho(z,t) = |t|^2 - h(z)$ у точці $w = (z_0, t_0) \in \partial\Omega$ ($\rho(z_0,t_0) = |t_0|^2 - h(z_0) = 0$). Зауважимо, що для $a \in \mathbb{H}$

$$|a|^2 = a \cdot \bar{a} = a \cdot \frac{-a + a^1 + a^2 + a^3}{2} = \frac{-a + a^1 + a^2 + a^3}{2} \cdot a.$$

Тоді

$$\rho(z,t) = \frac{1}{2}(-t^2 + tt^1 + tt^2 + tt^3) - h(z),$$

$$\omega_\rho(w,s) = -s_2 s_2 + \frac{1}{2}(s_2 s_2^1 + s_2 s_2^2 + s_2 s_2^3) + \frac{1}{2}(s_2^1 s_2 + s_2^2 s_2 + s_2^3 s_2) - \omega_h(z_0, s_1) =$$

$$= 2|s_2|^2 - \sum_{k,l=0}^{3} h_{z^k z^l} s_1^l s_1^k.$$

Диференціальна умова (2) має вигляд

$$2|s_2|^2 - \sum_{k,l=0}^{3} h_{z^k z^l} s_1^l s_1^k \geq 0 \tag{8}$$

для всіх векторів $s = (s_1, s_2)$, що належать дотичному простору $T_{\mathbb{H}}^L(w)$ в точці w $\big($чи $s \in T_{\mathbb{H}}^R(w)\big)$, який у даному випадку має вигляд

$$-h_z(z_0)s_1 + \bar{t}_0 s_2 = 0 \quad \Big(\text{чи, відповідно, } -s_1 h_z(z_0) + s_2 \bar{t}_0 = 0\Big). \tag{9}$$

Звідси

$$s_2 = \frac{1}{\bar{t}_0}\, h_z(z_0) s_1 \quad \left(\text{відповідно, } s_2 = s_1 h_z(z_0)\, \frac{1}{\bar{t}_0}\right)$$

при $t_0 \neq 0$. Тоді, підставивши вираз для s_2 в формулу (8), отримаємо

$$2\frac{|h_z(z_0)|^2 |s_1|^2}{|\bar{t}_0|^2} \geq \sum_{k,l=0}^{3} h_{z^k z^l} s_1^l s_1^k.$$

Тепер з того, що $|\bar{t_0}|^2 = |t_0|^2 = h(z_0)$, випливає умова (7).

При $t_0 = 0$ з формули (9) виражаємо s_1 і, враховуючи те, що для $a, b \in \mathbb{H}$ $(a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k$, $(a+b)^k = a^k + b^k$, $k = 1, 2, 3$, одержуємо

$$2|s_2|^2 - \sum_{k,l=0}^{3} h_{z^k z^l} \frac{1}{h_z^l}\, \bar{t_0}^l s_2^l \frac{1}{h_z^k}\, \bar{t_0}^k s_2^k \quad \left(2|s_2|^2 - \sum_{k,l=0}^{3} h_{z^k z^l} s_2^l \bar{t_0}^l\, \frac{1}{h_z^l} s_2^k \bar{t_0}^k\, \frac{1}{h_z^k}\right).$$

Звідси видно, що при $t_0 = 0$ умова (8) задовольняється навіть строго.

Замінивши знак $\geq$ на знак $>$, можна провести аналогічні міркування і для другої частини твердження 2.

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай*

$$\Omega = \{(z,t) \in \mathbb{H}^2 \colon |t|^2 < h(z)\}$$

— обмежена повна область Гартогса з межею класу C^2. *Припустимо, що* Ω *задовольняє диференціальну умову* (2) *в усіх точках* $(z_0, t_0) \in \partial\Omega$. *Тоді область* Ω *можна апроксимувати зсередини областями Гартогса*

$$\Omega_\varepsilon = \{(z,t) \in \mathbb{H}^2 \colon |t|^2 < h_\varepsilon(z)\},$$

які задовольняють строгу диференціальну умову (3) *в усіх точках* $(z_0, t_0) \in \partial\Omega_\varepsilon$, *крім, можливо, тих, де* $h_z(z_0) = 0$, *до того ж* $h_\varepsilon = h - \varepsilon$, *де* ε *є достатньо малим.*

Доведення. Використаємо диференціальну умову (7), врахувавши те, що функція h_ε має ті ж самі похідні, що і функція h. Отримаємо

$$\frac{|h_z|^2}{h-\varepsilon} > \frac{|h_z|^2}{h} \geq \frac{1}{2}\sum_{k,l=0}^{3} h_{z^k z^l} p^l p^k$$

для всіх точок z таких, що $h_\varepsilon(z) > 0$ $\Big($для таких точок тим більше буде виконуватись нерівність $\dfrac{|h_z|^2}{h} \geq \dfrac{1}{2}\sum_{k,l=0}^{3} h_{z^k z^l} p^l p^k\Big)$, але крім тих, де $h_z = 0$.

Взагалі, це твердження справедливе для всіх додатних ε. Але, щоб застосувати лему 1 до функції h_ε, потрібно підібрати ε таке, щоб градієнт h_ε не дорівнював нулю, коли $h_\varepsilon = 0$. Але $\operatorname{grad} h_\varepsilon = \operatorname{grad} h \neq 0$ в тих точках, де $h = 0$, отже, за неперервністю, і в тих точках, де $h - \varepsilon = 0$, при досить малих ε. Таким чином, $\operatorname{grad} h_\varepsilon \neq 0$, якщо $h_\varepsilon = 0$, і за лемою 2 межа області Ω_ε задовольняє строгу диференціальну умову (3) скрізь, крім тих точок, де $h_z = 0$.

Лема 3. *Нехай*

$$\Omega = \{w \in \mathbb{H}^2 \colon \rho(w) < 0\},$$

$\operatorname{grad}\rho \neq 0$ *скрізь на межі* $\partial\Omega$ *області* Ω, $\rho \in C^1$. *Нехай* $w_0 \in \partial\Omega$ *і* L — *довільна площина, що проходить через точку* w_0 *і не є дотичною до області* Ω. *Тоді існує окіл* $U(w_0) \subset L$ *точки* w_0 *такий, що* $U \setminus \partial\Omega = V_1 \cup V_2$, *де* $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, $V_1 \subset \Omega$, $V_2 \subset \mathbb{H}^2 \setminus \overline{\Omega}$, $\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 = \partial\Omega \cap U$.

Доведення. Лема безпосередньо випливає з теореми про неявну функцію [7, c. 454].

Тепер покажемо, що області Ω_ε, побудовані в лемі 2, є лінійно опуклими.

Кожну гіперплощину, рівняння якої має вигляд $z = \mathrm{const}$, назвемо *вертикальною*, а гіперплощину з рівнянням вигляду $t = \mathrm{const}$ — *горизонтальною*.

Лема 4. *Нехай*

$$\Omega = \{(z,t) \in \mathbb{H}^2 \colon |t|^2 < h(z)\}$$

— *обмежена повна область Гартогса в* $\mathbb{H}^2$ *з межею класу* C^2. *Припустимо, що* Ω *задовольняє диференціальну умову* (2) *в усіх точках* $(z_0, t_0) \in \partial\Omega$, *крім тих, де* $h_z(z_0) = 0$. *Тоді область* Ω *є лінійно опуклою.*

Доведення. Доведемо, що: 1) перетин $\Omega \bigcap L$ зв'язний, де L — не горизонтальна пряма; 2) якщо L дотична до Ω, то $\Omega \bigcap L = \varnothing$.

Скористаємось методами з робіт [8, 9]. Оскільки ми розглядаємо двовимірний кватерніонний простір, далі для зручності одновимірні лінійні многовиди над тілом $\mathbb{H}$ (дійсної розмірності 4) будемо називати іноді прямими, а іноді площинами, в залежності від контексту. Внаслідок некомутативності кватерніонів вважаємо, що множення на скаляри відбувається зліва. Для випадку множення на скаляри справа міркування аналогічні.

1. Нехай L не є горизонтальною прямою і (z_0, t_0), (z_1, t_1) — дві точки перетину $L \bigcap \Omega$. Доведемо, що вони лежать в одній компоненті $\Omega \bigcap L$. Оскільки Ω є зв'язною, то існує крива $\gamma\colon [0,1] \to \Omega, \gamma(0) = (z_0, t_0)$, $\gamma(1) = (z_1, t_1)$. Виберемо γ таким чином, щоб жодна з прямих $L_s = \{w \colon w = p(s)q, q \in \mathbb{H},\ p(s) = \gamma(s)/\|\gamma(s)\|\}$, $0 < s \leq 1$, $L_0 = L$, не була горизонтальною. Якщо t_0 і t_1 відмінні від нуля, то

спочатку рухаємось від точки (z_0, t_0) до $(z_0, 0)$ у площині $z = z_0$, потім у площині $t = 0$ від $(z_0, 0)$ до $(z_1, 0)$ і нарешті від $(z_1, 0)$ до (z_1, t_1) у площині $z = z_1$, оминаючи (z_1, t_0).

Розглянемо такі множини:

$$\Sigma_1 := \{s\colon \text{точки } \gamma(0), \gamma(s) \text{ лежать в одній компоненті перетину } L_s \cap \Omega\},$$

$$\Sigma_2 := \{s\colon \text{точки } \gamma(0), \gamma(s) \text{ лежать в різних компонентах перетину } L_s \cap \overline{\Omega}\},$$

$$\Sigma_3 := \{s\colon \text{точки } \gamma(0), \gamma(s) \text{ лежать в одній компоненті перетину } L_s \cap \overline{\Omega}$$
$$\text{і в різних компонентах перетину } L_s \cap \Omega\}.$$

Легко бачити, що $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 = [0, 1]$ і $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \Sigma_1 \cap \Sigma_3 = \Sigma_2 \cap \Sigma_3 = \varnothing$.

$1'$. Спочатку покажемо, що множина $\Sigma_3 = \varnothing$.

Припустимо, що існує точка $x_1 \in L_s \cap \overline{\Omega}$, $s \in \Sigma_3$, $x_1 \notin \overline{L_s \cap \Omega}$. Тоді за лемою 3 L_s дотична до Ω в точці x_1. Розглянемо множину $C = \{x \in L_s \cap \overline{\Omega}\}$, де L_s — дотична площина до Ω в точці x. Оскільки ρ належить C^2, множина C замкнена, за припущенням, непорожня і $C \cup \overline{L_s \cap \Omega} = L_s \cap \overline{\Omega}$. Позаяк $L_s \cap \overline{\Omega}$ є зв'язною, $C \cap \overline{L_s \cap \Omega} \neq \varnothing$, отже, існує точка $x_2 \in \overline{L_s \cap \Omega}$, в якій площина L_s дотична до Ω, і в довільному околі точки x_2 існують точки Ω, що суперечить умові (3). Таким чином, припущення є хибним, і точки x_1 з вказаними властивостями не існує. Але тоді внаслідок зв'язності $L_s \cap \overline{\Omega}$ існує точка x_3, що є спільною точкою межі для двох різних компонент $L_s \cap \Omega$. Отже, за лемою 3 L_s дотична до Ω в точці x_3, що суперечить умові (3). Таким чином, множина $\Sigma_3 = \varnothing$.

$2'$. Покажемо, що множина Σ_2 є відкритою.

Перетин $L_s \cap \Omega$ ізометричний відкритій множині $\Omega_s = \{q\colon f(q, s) = \rho(p(s)q)\} < 0 \subset \mathbb{H}$, оскільки $w = p(s)q$ гомеоморфно відображає $\mathbb{H}$ на $L_s \subset \mathbb{H}^2$ і $\|p(s)q - p(s)q'\| = \|p(s)\|\|q - q'\| = \|q - q'\|$. Точкам $\gamma(s), \gamma(0) \in L_s \cap \Omega$ відповідають точки $q(s) = \|\gamma(s)\|, 0 \in \Omega_s$. Виберемо довільне $s_0 \in [0, 1]$ так, що перетин $L_{s_0} \cap \Omega$ є незв'язним. Область Ω обмежена, тому знайдеться куля V_r така, що $\Omega_s \subset V_r$ для $0 < \tau \leq 1$. Розглянемо компоненти D_0 і $D_1 = L_{s_0} \cap \Omega \setminus D_0$ цього перетину і відповідно $D'_0, D'_1 \subset \Omega_{s_0}$. Тоді в $\mathbb{H}$ існують відкриті множини V і U такі, що $\overline{D}'_0 \subset V$, $\overline{D}'_1 \subset U$, $V \cap U = \varnothing$, $U \cup V \subset V_r$. Маємо $f(q, s_0) > 0$ на компакті $\overline{V}_r \setminus (U \cup V)$, оскільки $\Omega_{s_0} = \{q\colon f(q, s_0) \leq 0\} \subset U \cup V$. Функція $f(q, s) = \rho(p(s)q)$ неперервна при $q \in \mathbb{H}$, $0 < s \leq 1$. Тому знайдеться таке $\delta > 0$, що при всіх s таких, що $|s - s_0| < \delta$ і $q \in \overline{V}_r \setminus (U \cup V)$, буде $F(q, s) > 0$, тобто $\Omega_s \subset U \cup V$. При цьому $0 \in D'_0 \subset V$, а при досить малих δ $q(s) \in D'_1 \subset U$. Таким чином, для $s_0 - \delta < s \leq s_0$ $\gamma(0)$ і $\gamma(s)$ належать різним компонентам ω_s.

$3'$. Покажемо, що множина Σ_1 також є відкритою. Врахувавши, що $\Sigma_1 \neq \varnothing$, виберемо $s_0 \in [0, 1]$ так, що перетин $L_{s_0} \cap \Omega$ є зв'язним. Доведемо, що існує $\varepsilon > 0$ таке, що для довільного $s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$ перетин $L_s \cap \Omega$ теж є зв'язним.

Оскільки множина $L_{s_0} \cap \Omega$ зв'язна і відкрита в L_{s_0}, то існує крива $\tau(l) \subset L_{s_0} \cap \Omega$, $l \in [0,1]$, $\tau(0) = \gamma(0)$ і $\tau(1) = \gamma(s_0)$. Відстань r між компактами τ і $\partial\Omega$ є більшою за нуль. Розглянемо кулі $B(\tau(l), r)$ з центрами в точках $\tau(l)$ і радіусами r та їх об'єднання $B = \bigcup_{l \in [0,1]} B(\tau(l), r) \subset \Omega$. Виберемо $\varepsilon > 0$ так, щоб для довільного $s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$ відстань від τ до L_s була меншою за r. Тоді L_s перетинає кожну з куль $B(\tau(l), r)$. Побудуємо неперервну криву $\tau_s \subset L_s \cap \Omega$, що з'єднує точки $\tau_s(0) = \gamma(0)$ і $\tau_s(1) = \gamma(s)$, як множину центрів кругів $C(t) := := L_s \cap B(\tau(t), r)$ в об'єднанні з відрізком $[C(1), \gamma(s)]$, який лежить всередині кулі $L_s \cap B(\tau(1), r)$. Очевидно, що крива τ_s неперервна. Отже, точки $\gamma(0)$ і $\gamma(s)$ лежать в одній компоненті перетину $L_s \cap \Omega$.

Оскільки $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 = [0,1]$, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \Sigma_1 \cap \Sigma_3 = \Sigma_2 \cap \Sigma_3 = \varnothing$, $\Sigma_3 = \varnothing$, а обидві множини Σ_1, Σ_2 відкриті, то або $\Sigma_1 = \varnothing$, або $\Sigma_2 = \varnothing$. Позаяк область Ω зв'язна, множина Σ_1 не може бути порожньою. Отже, $\Sigma_2 = \varnothing$, що і потрібно було показати.

Нехай тепер $L = T^L_{\mathbb{H}}(a)$ — не горизонтальна дотична до $\partial\Omega$ в точці $a \in \partial\Omega$. Припустимо, що перетин $L \cap \Omega$ не є порожнім і $b \in L \cap \Omega$. Якщо точки a і b лежать в різних компонентах V_1, V_2 перетину $L \cap \overline{\Omega} = V_1 \cup V_2$, то існує точка $c \in \Omega$ в околі точки a така, що пряма $L_1 = c + T^L_{\mathbb{H}}(a)$ перетинає Ω щонайменше по двох компонентах, які лежать в $U_1 \cup U_2$, де U_1, U_2 — неперетинні околи множин V_1, V_2. Нехай тепер точки a і b лежать в одній зв'язній компоненті $V \subset L \cap \overline{\Omega}$. Тоді подальші міркування аналогічні викладеним у п. 1. Множина $S_1 \subset V$ точок, в яких L дотична до $\partial\Omega$, замкнена в V, так само як і множина $S_2 = \partial(V \cap \Omega)$. Оскільки $V = S_1 \cup S_2$ і V є зв'язною, то існує точка $s \in S_1 \cap S_2$, що суперечить локальній лінійній опуклості Ω в точці s.

2. Розглянемо точки $(z_0, t_0) \in \partial\Omega$, в яких дотична площина $T^L_{\mathbb{H}}(z_0, t_0)$ горизонтальна, тобто $h_z(z_0) = 0$. Припустимо, що дотична площина перетинає Ω в деякій точці (z_1, t_1). Тоді $t_1 = t_0$. Оскільки область Ω, а отже, і її база $D := \{(z, 0)\}$ зв'язні, можемо побудувати неперервну криву $\gamma \subset D$, що з'єднує точки z_0 і z_1, де $\gamma(s) = z_s$, $s \in [0,1]$. Тепер розглянемо дотичні площини в точках $(z_s, h(z_s))$; будемо позначати їх $L_s = T^L_{\mathbb{H}}(z_s, h(z_s))$. Припустимо, що $t_0 > 0$, отже, $R(z_0) = \sqrt{h(z_0)} = t_0$. Ми знаємо, що L_0 горизонтальна, але всі L_s не можуть бути горизонтальними, бо $R(z_1) > |t_1| = |t_0| = R(z_0)$. Нехай s_0 — точна нижня межа усіх s таких, що L_s не горизонтальні. Очевидно, $0 \le s_0 < 1$. Усі площини L_s, $0 \le s \le s_0$ збігаються між собою і перетинають Ω в точці (z_1, t_1). Тоді знайдеться $s_0 < s < 1$, для якого площина L_s вже не є горизонтальною, але перетинає Ω, що суперечить п. 1 доведення леми 3.

Лему 4 доведено.

***Доведення теореми* 2.** *Необхідність* випливає з необхідної умови теореми 1.

Достатність. Використовуючи лему 2, будуємо відкриті множини Ω_ε, які апроксимують Ω зсередини. За лемою 4 області Ω_ε є лінійно опуклими. Покажемо, що і область Ω також є лінійно опуклою. Припустимо, що це не так, і для деякої точки $(z_0, t_0) \in \partial\Omega$ дотична площина $T^L_{\mathbb{H}}(z_0, t_0)$ перетинає Ω в деякій точці $(\tilde{z}, \tilde{t})$.

За умовою $\operatorname{grad} \rho \ne 0$. Якщо припустити, що $\rho_t = \bar{t} = 0$ і $h_z \ne 0$, то це можливо лише в тих точках межі, в яких $|t|^2 = h(z) = 0$. Але це точки вигляду $(z^0, 0) \in \partial\Omega$, де $h(z^0) = 0$, $h_z(z^0) \ne 0$, в яких дотична площина

$$\bar{t}^0(t - t^0) - h_z(z^0)(z - z^0) = 0$$

набирає вигляду

$$h_z(z^0)(z - z^0) = 0,$$

$$z = z^0$$

і, очевидно, не перетинає область Ω ($\rho(z^0, t) = |t|^2 - h(z^0) = |t|^2 \geq 0$). Тому в даному випадку $\rho_t \neq 0$, і без обмеження загальності можна вибрати систему координат так, щоб дотична площина $T^L_{\mathrm{H}}(z_0, t_0)$ збігалася з площиною $t = t_0$, до того ж $t_0 = |t_0|$. Тоді $h_z(z_0) = 0$, і дотичні площини до Ω_ε у точках $(z_0, \sqrt{h(z_0) - \varepsilon}) \in \partial\Omega_\varepsilon$ мають рівняння $t = \sqrt{h(z_0) - \varepsilon}$.

Для $\varepsilon_0 = h(\tilde{z}) - |\tilde{t}|^2$ точка $(\tilde{z}, \tilde{t})$ належить $\partial\Omega_{\varepsilon_0}$, а для всіх $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$|\tilde{t}|^2 - (h(\tilde{z}) - \varepsilon) < |\tilde{t}|^2 - (h(\tilde{z}) - \varepsilon_0) = 0,$$

тобто для всіх $\varepsilon < \varepsilon_0$ площина $T^L_{\mathrm{H}}(z_0, t_0)$ перетинає Ω_ε у точці $(\tilde{z}, \tilde{t})$. Тоді для фіксованого $\varepsilon < \varepsilon_0$ площина $T^L_{\mathrm{H}}(z_0, \sqrt{h(z_0) - \varepsilon})$ перетинає Ω_ε у точці $(\tilde{z}, \sqrt{h(z_0) - \varepsilon})$. Дійсно, $|\tilde{t}|^2 = |t_0|^2 = h(z_0)$,

$$h(z_0) - \varepsilon - (h(\tilde{z}) - \varepsilon) < h(z_0) - (h(\tilde{z}) - \varepsilon) = |\tilde{t}|^2 - (h(\tilde{z}) - \varepsilon) < 0,$$

але це суперечить лемі 4. Отже, наше припущення є хибним і в жодній межовій точці дотична площина не перетинає область Ω, тобто Ω є лінійно опуклою.

***Зауваження* 1.** У 1986 р. Г. А. Мкртчян [10] довів теорему, аналогічну теоремі О. П. Южакова та А. П. Кривоколеску [8], а саме, показав, що *обмежена гіперкомплексно опукла область в* H^n *з гладкою межею є гіперкомплексно опуклою.* В роботі [10] під (локальною) гіперкомплексною опуклістю автор розуміє (локальну) лінійну опуклість зліва або справа. Як бачимо, диференціальна умова (2) в теоремі 2 є слабшою за умову локальної лінійної опуклості в теоремі Г. А. Мкртчяна, застосованій до повних областей Гартогса в H^2. А от послабити умову гладкості межі області, зберігаючи висновок, виявляється, неможливо, що показує наступний приклад локально лінійно опуклої повної області Гартогса $\tilde{\Omega}$ в $\mathbb{H}^2$, яка не є лінійно опуклою.

Якщо кватерніонна пряма $t = az + b$, $a, b \in \mathbb{H}$, не перетинає $\tilde{\Omega}$, то і пряма $et = az + b$, $|e| = 1$, утворена з першої поворотом $(z, t) \to (z, et)$, не перетинає $\tilde{\Omega}$. А отже, і об'єднання таких прямих для всіх можливих $|e| = 1$ — це конус $K\colon |t| = |az + b|$, який не перетинає $\tilde{\Omega}$. З цих міркувань робимо висновок: область $\tilde{\Omega} \in \mathbb{H}^2$ є лінійно опуклою тоді і тільки тоді, коли через довільну точку доповнення до Ω проходить конус з рівнянням вигляду $|t| = |az + b|$, який не перетинає Ω.

Побудуємо область вигляду $\{(z, t) \in \mathbb{H} \times \mathbb{R}_+\colon |z| < 1, |t| < f(z)\}$, а саме, $\Omega = \{(z, t) \in \mathbb{H} \times \mathbb{R}_+\colon |z| < 1,\ |t| < |z - 3e_2|,\ |t| < |z - 2\sqrt{2}e_1 + e_2|,\ |t| < < |z - \sqrt{6} + \sqrt{2}e_1 + e_2|,\ |t| < |z + \sqrt{6} + \sqrt{2}e_1 + e_2|\}$. Оскільки доповнення до Ω є об'єднанням конусів $|t| = |az + b|$, то вона є лінійно опуклою областю. Очевидно, що відповідна функція $f(z) = \min\{|z - 3e_2|, |z - 2\sqrt{2}e_1 + e_2|, |z - \sqrt{6} + \sqrt{2}e_1 + e_2|, |z + \sqrt{6} + \sqrt{2}e_1 + e_2|\}$ має рівно два локальних максимуми в кулі $|z| \leq 1$ в точках $z = \pm e_3$ (в даних точках порушується гладкість). На відрізку $z_0 = z_1 = z_2 = 0$, $-1 \leq z_3 \leq 1$ графік функції $f(z)$ є гіперболою $t^2 = z_3^2 + 9$, яка має два локальних максимуми в точках $z_3 = \pm 1$.

Нехай

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & z_3 \leq 0, \\ \min\{f(z), \sqrt{10} - \varepsilon\}, & z_3 > 0. \end{cases}$$

Тоді, очевидно, область $\{(z, t) \in \mathbb{H}^2\colon |z| < 1,\ |t| < g(z)\}$ буде локально лінійно опуклою але не лінійно опуклою областю Гартогса.

1. *Behnke H., Peschl E.* Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen Konvexität in bezug auf analytische Ebenen im kleinen und großen // Math. Ann. – 1935. – **111**, № 2. – P. 158 – 177.
2. *Зиновьев Б. С.* Аналитические условия и некоторые вопросы аппроксимации линейно выпуклых областей с гладкими границами в пространстве $\mathbb{C}^n$ // Изв. вузов. Матемематика. – 1971. – № 6 (109). – С. 61 – 69.
3. *Знаменский С. В.* Семь задач о $\mathbb{C}$-выпуклости // Комплексный анализ в современной математике: к 80-летию со дня рождения Б. В. Шабата (редактор-составитель Е. М. Чирка). – М.: ФАЗИС, 2001. – С. 123 – 132.
4. *Kiselman Ch. O.* A differential inequality characterizing weak lineal convexity // Math. Ann. – 1998. – **311**, № 1. – P. 1 – 10.
5. *Зелинский Ю. Б.* О локально линейно выпуклых областях // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 2. – С. 280 – 284.
6. *Осіпчук Т. М.* Аналітичні умови локальної лінійної оруклості в $\mathbf{H}^n$ // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, № 3. – С. 244 – 254.
7. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – М.: Наука, 1970. – Т. 1. – 608 с.
8. *Южаков А. П., Кривоколеско В. П.* Некоторые свойства линейно выпуклых областей с гладкими границами в $\mathbb{C}^n$ // Сиб. мат. журн. – 1971. – **12**, № 2. – С. 452 – 458.
9. *Kiselman Ch. O.* Lineally convex Hartogs domains // Acta Math. Vietnamica. – 1996. – **21**. – P. 69 – 94.
10. *Мкртчян Г. А.* Гиперкомплексно выпуклые области с гладкой границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1986. – № 3. – С. 15 – 17.

Одержано 14.07.09