УДК 512.57

А. В. Жучок (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ВІЛЬНІ ДІМОНОЇДИ

We characterize the least semilattice congruence on the free dimonoid and prove that the free dimonoid is a semilattice of s-simple subdimonoids each being a rectangular band of subdimonoids.

Охарактеризована наименьшая полуструктурная конгруэнция свободного димоноида и доказано, что свободный димоноид является полуструктурой s-простых поддимоноидов, каждый из которых есть прямоугольная связка поддимоноидов.

Вступ. Поняття алгебри Лейбніца з'явилося в дослідженнях з теорії гомологій алгебр Лі [1]. Ж.-Л. Лоде [2] знайшов універсальну обгортуючу алгебру для алгебри Лейбніца. Роль такого об'єкта відіграє діалгебра [2] — векторний простір із двома білінійними асоціативними операціями, узгодженими між собою. Вивченню діалгебр та їх зв'язків з іншими алгебраїчними структурами присвячено багато робіт (див., наприклад, [2 – 5]). З іншого боку, діалгебра є лінійним аналогом поняття дімоноїда [2], введеного Ж.-Л. Лоде для вивчення властивостей алгебр Лейбніца. Поняття дімоноїда узагальнює поняття дігрупи [6], яке відіграє суттєву роль у дослідженнях важливих відкритих проблем теорії алгебр Лейбніца. Одним із перших результатів про дімоноїди є опис вільного дімоноїда, породженого заданою множиною [2]. За допомогою властивостей вільного дімоноїда було охарактеризовано вільні діалгебри та вивчено гомології діалгебр [2]. У [7] доведено, що кожний комутативний дімоноїд є напівструктурою архімедових піддімоноїдів. Вільні комутативні дімоноїди було побудовано в [8]. У [9] автор описав структуру довільної дісполуки піддімоноїдів. Найменшу напівструктурну конгруенцію довільного дімоноїда було описано в [10].

У даній роботі побудовано дімоноїд, який є ізоморфним вільному дімоноїду, введеному Ж.-Л. Лоде в [2]. Описано вільний дімоноїд рангу 1 та охарактеризовано найменшу напівструктурну конгруенцію вільного дімоноїда довільного рангу. Основним результатом цієї статті є теорема про те, що вільний дімоноїд є напівструктурою s-простих піддімоноїдів, кожен з яких є прямокутною сполукою піддімоноїдів. Описуються також деякі інші конгруенції вільного дімоноїда.

1. Основні поняття та допоміжні результати. Множина D з визначеними на ній бінарними асоціативними операціями $\prec$ і $\succ$, які задовольняють аксіоми

$$(x \prec y) \prec z = x \prec (y \succ z),$$

$$(x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z),$$

$$(x \prec y) \succ z = x \succ (y \succ z)$$

для всіх $x, y, z \in D$, називається дімоноїдом. У випадку, коли операції дімоноїда збігаються, він перетворюється у напівгрупу.

Відображення f дімоноїда D_1 у дімоноїд D_2 називається гомоморфізмом, якщо $(x \prec y)f = xf \prec yf,$ $(x \succ y)f = xf \succ yf$ для всіх $x,$ $y \in D_1$. Взаємно однозначний гомоморфізм дімоноїдів називається ізоморфізмом. Підмножина M дімоноїда $(D, \prec, \succ)$ називається піддімоноїдом, якщо з $x,$ $y \in M$ випливає $x \prec y$, $x \succ y \in M$.

Нагадаємо, що напівгрупа ідемпотентів I називається прямокутною сполукою, якщо рівність $xyx = x$ виконується для всіх $x, y \in I$. Відомо, що кожна прямокутна сполука є ізоморфною декартовому добутку $L \times R$ напівгрупи лівих нулів та напівгрупи правих нулів.

Дімоноїд $(D, \prec, \succ)$ назвемо дімоноїдом ідемпотентів або дісполукою, якщо $x \prec x = x = x \succ x$ для всіх $x \in D$.

Лема 1. *Нехай* $(D, \prec, \succ)$ — *дімоноїд ідемпотентів. Напівгрупа* $(D, \prec)$ *дімоноїда* $(D, \prec, \succ)$ *є прямокутною сполукою тоді й лише тоді, коли прямокутною сполукою є напівгрупа* $(D, \succ)$ *дімоноїда* $(D, \prec, \succ)$.

Доведення. Якщо $(D, \prec)$ — прямокутна сполука, $a, b \in D$, то $a \prec b \prec a = a$. З останньої рівності маємо

$$(a \prec b \prec a) \succ a = \big(a \prec (b \succ a)\big) \succ a =$$

$$= a \succ \big((b \succ a) \succ a\big) = a \succ b \succ a = a \succ a = a$$

згідно з аксіомами дімоноїда та ідемпотентністю операції $\succ$.

Навпаки, з рівності $a \succ b \succ a = a$ отримуємо

$$a \prec (a \succ b \succ a) = a \prec \big(a \succ (b \succ a)\big) =$$

$$= (a \prec a) \prec (b \succ a) = a \prec (b \succ a) = a \prec b \prec a = a \prec a = a$$

згідно з аксіомою дімоноїда та ідемпотентністю операції $\prec$, отже $(D, \prec)$ — прямокутна сполука.

Лему доведено.

У [7] автором даної роботи було введено поняття дісполуки піддімоноїдів. Нагадаємо його визначення.

Якщо $\varphi : S \to T$ — гомоморфізм дімоноїдів, то через Δ_φ позначатимемо відповідну конгруенцію на дімоноїді S.

Нехай S — довільний дімоноїд, J — деякий дімоноїд ідемпотентів. Якщо існує гомоморфізм

$$\alpha : S \to J : x \mapsto x\alpha,$$

то кожний клас конгруенції Δ_α є піддімоноїдом дімоноїда S, а сам дімоноїд S є об’єднанням таких дімоноїдів S_ξ, $\xi \in J$, що

$$x\alpha = \xi \Leftrightarrow x \in S_\xi = \Delta_\alpha^x = \big\{t \in S \,\big|\, (x;\, t) \in \Delta_\alpha\big\},$$

$$S_\xi \prec S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \prec \varepsilon}, \qquad S_\xi \succ S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \succ \varepsilon},$$

$$\xi \neq \varepsilon \Rightarrow S_\xi \cap S_\varepsilon = \varnothing.$$

У цьому випадку говоритимемо, що S розкладається в дісполуку піддімоноїдів (або S є дісполукою J піддімоноїдів S_ξ, $\xi \in J$). Якщо ж J є напівгрупою ідемпотентів (сполукою), то говоритимемо, що S є сполукою J піддімоноїдів S_ξ, $\xi \in J$.

Комутативна напівгрупа ідемпотентів називається напівструктурою. Якщо ρ — така конгруенція на дімоноїді $(D, \prec, \succ)$, що операції фактор-дімоноїда $(D, \prec, \succ)/\rho$ збігаються та він є напівструктурою, то будемо говорити, що ρ є напівструктурною конгруенцією. Дімоноїд $(D, \prec, \succ)$ назвемо s-простим, якщо його найменша напівструктурна конгруенція збігається з універсальним відношенням.

У роботі [11] розглянуто піднапівгрупу S' довільної напівгрупи S, яка має наступну властивість:

(P) для будь-якого числа елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n \in S$ з $a_1 a_2 \ldots a_n \in S'$ випливає $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_m \in S'$ для будь-якого числа елементів $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m \in S$, які задовольняють умову $\left\{\xi_j\right\}_{j=1}^{m} = \{a_i\}_{i=1}^{n}$. Таку піднапівгрупу називають P-піднапівгрупою напівгрупи S.

Нехай $(D, \prec, \succ)$ — довільний дімоноїд. Через Ω позначимо сукупність усіх P-піднапівгруп напівгрупи $(D, \prec)$. Елементи множини Ω позначатимемо через $D_\alpha, D_\beta, \ldots$. Для кожної підмножини Γ множини Ω визначимо відношення $\Gamma_\prec$ на дімоноїді $(D, \prec, \succ)$, поклавши $a \Gamma_\prec b$ тоді й лише тоді, коли

$$\left\{(x, y) \mid x \prec a \prec y \in D_\alpha\right\} = \left\{(x, y) \mid x \prec b \prec y \in D_\alpha\right\}$$

для кожного $D_\alpha \in \Gamma$.

Теорема 1 ([10], теорема 2)**.** *Відношення* $\Omega_\prec$ *на будь-якому дімоноїді* $(D, \prec, \succ)$ *є найменшою напівструктурною конгруенцією. При цьому кожний клас конгруенції* $\Omega_\prec$ *є* s*-простим дімоноїдом.*

2. Будова вільного дімоноїда. У цьому пункті спочатку побудуємо дімоноїд, який є ізоморфним вільному дімоноїду, введеному Ж.-Л. Лоде в [2], та розглянемо вільний дімоноїд рангу 1. Далі охарактеризуємо найменшу напівструктурну конгруенцію вільного дімоноїда та доведемо, що вільний дімоноїд є напівструктурою s-простих піддімоноїдів, кожен з яких є прямокутною сполукою піддімоноїдів.

Розглянемо вільний дімоноїд, побудований у [2].

Символом N будемо позначати множину додатних цілих чисел.

Нехай X — довільна непорожня множина, $n \in N$. Через Y_n позначимо об'єднання n різних копій множини X^n та покладемо $D(X) = \bigcup_{n \ge 1} Y_n$. Позначаючи через $(x_1 \ldots \breve{x}_i \ldots x_n)$ елемент в i-й компоненті Y_n, на множині $D(X)$ визначимо операції

$$(x_1 \ldots \breve{x}_i \ldots x_k) \prec (x_{k+1} \ldots \breve{x}_j \ldots x_l) = (x_1 \ldots \breve{x}_i \ldots x_l),$$

$$(x_1 \ldots \breve{x}_i \ldots x_k) \succ (x_{k+1} \ldots \breve{x}_j \ldots x_l) = (x_1 \ldots \breve{x}_j \ldots x_l)$$

для всіх $(x_1 \ldots \breve{x}_i \ldots x_k)$, $(x_{k+1} \ldots \breve{x}_j \ldots x_l) \in D(X)$. Тоді $\big(D(X), \prec, \succ\big)$ є вільним дімоноїдом над множиною X (див. [2, с.15]).

Вільний дімоноїд однозначно з точністю до ізоморфізму визначається потужністю множини X. Наведемо іншу, більш природну на наш погляд, конструкцію вільного дімоноїда над множиною X. А саме, нехай $F[X]$ — вільна напівгрупа з вільною базою X. Символом ℓ_w позначатимемо довжину слова $w \in F[X]$. На множині

$$F = \left\{(w, m) \in F[X] \times N \mid \ell_w \ge m\right\}$$

визначимо операції $\prec, \succ$ за правилами

$$(w_1, m_1) \prec (w_2, m_2) = (w_1 w_2, m_1), \tag{1}$$

$$(w_1, m_1) \succ (w_2, m_2) = (w_1 w_2, \ell_{w_1} + m_2) \tag{2}$$

для всіх $(w_1, m_1), (w_2, m_2) \in F$.

Лема 2. *Множина* F *з діями* $\prec, \succ$, *що визначаються умовами* (1), (2), *є дімоноїдом.*

Доведення. Безпосередньо перевіряється, що $(F, \prec, \succ)$ є дімоноїдом.

Лему доведено.

Дімоноїд, отриманий таким способом, позначатимемо через $\breve{F}[X]$.

Лема 3. *Дімоноїди* $(D(X), \prec, \succ)$ *та* $\breve{F}[X]$ *є ізоморфними.*

Доведення. Задамо відображення $\sigma : D(X) \to \breve{F}[X]$ таким чином:

$$(x_1 \ldots \breve{x}_i \ldots x_k) \mapsto (x_1 \ldots x_i \ldots x_k, i), \quad (x_1 \ldots \breve{x}_i \ldots x_k) \in D(X).$$

Пересвідчимося, що σ є гомоморфізмом. Справді, для довільних $(x_1 \ldots \breve{x}_i \ldots \ldots x_k), (y_1 \ldots \breve{y}_j \ldots y_l) \in D(X)$ маємо

$$\big((x_1 \ldots \breve{x}_i \ldots x_k) \prec (y_1 \ldots \breve{y}_j \ldots y_l)\big)\sigma =$$
$$= (x_1 \ldots \breve{x}_i \ldots x_k\, y_1 \ldots y_j \ldots y_l)\sigma =$$
$$= (x_1 \ldots x_i \ldots x_k\, y_1 \ldots y_j \ldots y_l, i) =$$
$$= (x_1 \ldots x_i \ldots x_k, i) \prec (y_1 \ldots y_j \ldots y_l, j) =$$
$$= (x_1 \ldots \breve{x}_i \ldots x_k)\sigma \prec (y_1 \ldots \breve{y}_j \ldots y_l)\sigma,$$

$$\big((x_1 \ldots \breve{x}_i \ldots x_k) \succ (y_1 \ldots \breve{y}_j \ldots y_l)\big)\sigma =$$
$$= (x_1 \ldots x_i \ldots x_k\, y_1 \ldots \breve{y}_j \ldots y_l)\sigma =$$
$$= (x_1 \ldots x_i \ldots x_k\, y_1 \ldots y_j \ldots y_l, k + j) =$$
$$= (x_1 \ldots x_i \ldots x_k\, y_1 \ldots y_j \ldots y_l, \ell_{x_1 \ldots x_i \ldots x_k} + j) =$$
$$= (x_1 \ldots x_i \ldots x_k, i) \succ (y_1 \ldots y_j \ldots y_l, j) =$$
$$= (x_1 \ldots \breve{x}_i \ldots x_k)\sigma \succ (y_1 \ldots \breve{y}_j \ldots y_l)\sigma,$$

тобто σ є узгодженим з діями $\prec, \succ$ в цих дімоноїдах.

За побудовою σ є бієктивним відображенням.

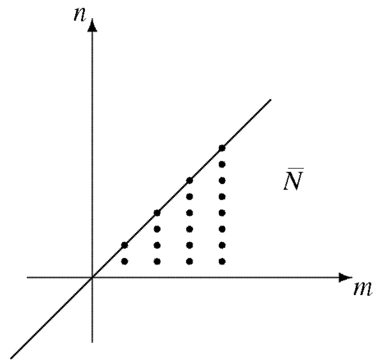
Лему доведено.

Побудуємо дімоноїд, ізоморфний вільному дімоноїду рангу 1.

Нехай $\bar{N} = \{(m, n) \in N \times N \mid m \geq n\}$ (див. рисунок). На множині $\bar{N}$ визначимо операції $\prec, \succ$ за правилами

$$(m, n) \prec (k, l) = (m + k, n),$$
$$(m, n) \succ (k, l) = (m + k, m + l)$$

для всіх $(m, n), (k, l) \in \bar{N}$. Безпосередня перевірка показує, що $(\bar{N}, \prec, \succ)$ є дімоноїдом.



Лема 4. *Якщо* $|X| = 1$, *то* $\breve{F}[X] \cong (\bar{N}, \prec, \succ)$.

Доведення. Нехай $X = \{a\}$. Визначимо відображення

$$\tau : \breve{F}[X] \to (\bar{N}, \prec, \succ),$$

поклавши $(a^k, l)\tau = (k, l)$. За побудовою τ є бієктивним відображенням. Покажемо, що воно є гомоморфізмом. Для всіх (a^k, l), $(a^t, s) \in \breve{F}[X]$ маємо

$$\big((a^k, l) \prec (a^t, s)\big)\tau = (a^{k+t}, l)\tau = (k + t, l) =$$

$$= (k, l) \prec (t, s) = (a^k, l)\tau \prec (a^t, s)\tau,$$

$$\big((a^k, l) \succ (a^t, s)\big)\tau = (a^{k+t}, \ell_{a^k} + s)\tau = (a^{k+t}, k + s)\tau =$$

$$= (k + t, k + s) = (k, l) \succ (t, s) = (a^k, l)\tau \succ (a^t, s)\tau.$$

Лему доведено.

Для кожного $w \in F[X]$ через $c(w)$ позначимо множину елементів $x \in X$, які входять до запису елемента w. Нехай

$$C_Y = \{(w, m) \in \breve{F}[X] \,|\, c(w) = Y\}$$

для кожної непорожньої скінченної множини $Y \subseteq X$. Легко бачити, що $(C_Y, \prec, \succ)$, $Y \subseteq X$ є піддімоноїдом дімоноїда $\breve{F}[X]$.

Наступна теорема характеризує найменшу напівструктурну конгруенцію $\Omega_{\prec}$ (див. п. 1) вільного дімоноїда.

Теорема 2. *Для будь-яких* (w_1, m_1), $(w_2, m_2) \in \breve{F}[X]$ *має місце еквівалентність*

$$(w_1, m_1)\,\Omega_{\prec}(w_2, m_2) \Leftrightarrow c(w_1) = c(w_2).$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай $(w_1, m_1)\,\Omega_{\prec}(w_2, m_2)$ для деяких (w_1, m_1), $(w_2, m_2) \in \breve{F}[X]$. Це означає, що

$$\{((w_3, m_3), (w_4, m_4)) \,|\, (w_3, m_3) \prec (w_1, m_1) \prec (w_4, m_4) \in T\} =$$

$$= \{((w_3, m_3), (w_4, m_4)) \,|\, (w_3, m_3) \prec (w_2, m_2) \prec (w_4, m_4) \in T\}$$

для кожної P-піднапівгрупи $T \in \Omega$ напівгрупи $(F, \prec)$ (див. п. 1). Розглянемо піддімоноїд $(C_Y, \prec, \succ)$, де $Y = c(w_1)$, дімоноїда $\breve{F}[X]$. Покажемо, що $(C_{c(w_1)}, \prec)$ — P-піднапівгрупа напівгрупи $(F, \prec)$. Нехай

$$(\omega_1, s_1) \prec (\omega_2, s_2) \prec \ldots \prec (\omega_k, s_k) = (\omega_1\omega_2 \ldots \omega_k, s_1) \in C_{c(w_1)}$$

для деяких $(\omega_1, s_1), (\omega_2, s_2), \ldots, (\omega_k, s_k) \in \breve{F}[X]$ та

$$(u_1, t_1) \prec (u_2, t_2) \prec \ldots \prec (u_r, t_r) = (u_1u_2 \ldots u_r, t_1) \in \breve{F}[X]$$

для деяких $(u_1, t_1), (u_2, t_2), \ldots, (u_r, t_r) \in \breve{F}[X]$ таких, що

$$\{(u_1, t_1), (u_2, t_2), \ldots, (u_r, t_r)\} = \{(\omega_1, s_1), (\omega_2, s_2), \ldots, (\omega_k, s_k)\}.$$

З останньої рівності випливає, що $c(u_1u_2 \ldots u_r) = c(\omega_1\omega_2 \ldots \omega_k)$. Але $c(\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_k) = c(w_1)$. Звідси $c(u_1u_2 \ldots u_r) = c(w_1)$ і, отже, $(u_1u_2 \ldots u_r, t_1) \in C_{c(w_1)}$, а $\left(C_{c(w_1)}, \prec\right)$ — P-піднапівгрупа.

Припустимо тепер, що $c(w_1) \neq c(w_2)$. Тоді з

$$(w_3, m_3) \prec (w_1, m_1) \prec (w_4, m_4) = (w_3w_1w_4, m_3) \in C_{c(w_1)}$$

не випливає

$$(w_3, m_3) \prec (w_2, m_2) \prec (w_4, m_4) = (w_3w_2w_4, m_3) \in C_{c(w_1)},$$

оскільки

$$c(w_3w_2w_4) = c(w_3) \cup c(w_2) \cup c(w_4) \neq$$

$$\neq c(w_3) \cup c(w_1) \cup c(w_4) = c(w_3w_1w_4) = c(w_1).$$

Отже, ми прийшли до суперечності, тобто припущення, що $c(w_1) \neq c(w_2)$, не є вірним. Таким чином,

$$(w_1, m_1)\, \Omega_{\prec}(w_2, m_2) \Rightarrow c(w_1) = c(w_2).$$

Достатність. Нехай T — довільна P-піднапівгрупа напівгрупи $(F, \prec)$ та (w_1, m_1), (w_2, m_2), (w_3, m_3), $(w_4, m_4) \in \breve{F}[X]$. Припустимо, що (w_1, m_1), $(w_2, m_2) \in C_Y$ для деякої непорожньої скінченної підмножини $Y \subseteq X$. Нехай $w_1 = a_1 \ldots a_i \ldots a_t$, $a_i \in X$, $1 \le i \le t$, $t \ge m_1$, $w_2 = b_1 \ldots b_i \ldots b_r$, $b_i \in X$, $1 \le i \le r$, $r \ge m_2$. Зрозуміло, що $c(w_1) = c(w_2)$. Припустимо тепер, що $(w_3, m_3) \prec (w_1, m_1) \prec (w_4, m_4) \in T$. Згідно з P-властивістю напівгрупи T з рівності

$$(w_3, m_3) \prec (w_1, m_1) \prec (w_4, m_4) =$$

$$= (w_3, m_3) \prec (a_1, 1) \prec \ldots \prec (a_i, 1) \prec \ldots \prec (a_t, 1) \prec (w_4, m_4)$$

випливає, що

$$(w_3, m_3) \prec (b_1, 1) \prec \ldots \prec (b_i, 1) \prec \ldots \prec (b_r, 1) \prec (w_4, m_4) \in T.$$

Але

$$(w_3, m_3) \prec (b_1, 1) \prec \ldots \prec (b_i, 1) \prec \ldots \prec (b_r, 1) \prec (w_4, m_4) =$$

$$= (w_3, m_3) \prec (b_1 \ldots b_i \ldots b_r, 1) \prec (w_4, m_4) =$$

$$= (w_3, m_3) \prec (w_2, m_2) \prec (w_4, m_4).$$

Отже, з умови $(w_3, m_3) \prec (w_1, m_1) \prec (w_4, m_4) \in T$ випливає, що

$$(w_3, m_3) \prec (w_2, m_2) \prec (w_4, m_4) \in T.$$

Аналогічно доводиться імплікація

$$(w_3, m_3) \prec (w_2, m_2) \prec (w_4, m_4) \in T \Rightarrow (w_3, m_3) \prec (w_1, m_1) \prec$$

$$\prec (w_4, m_4) \in T.$$

Таким чином, за означенням $(w_1, m_1)\, \Omega_{\prec} (w_2, m_2)$.

Теорему доведено.

Якщо $w \in F[X]$, то через $w^{(0)}$ (відповідно $w^{(1)}$) позначимо першу (відповідно останню) літеру слова w. Нехай $B(X)$ — напівструктура непорожніх скінченних підмножин множини X відносно операції теоретико-множинного об'єднання. Для кожного $Y \in B(X)$ та всіх $x, y \in Y$ покладемо

$$C_Y^{(x,y)} = \left\{(w, m) \in C_Y \,\middle|\, (w^{(0)}, w^{(1)}) = (x, y)\right\},$$

$Y \times Y$ — прямокутна сполука (див. п. 1), тобто напівгрупа з операцією $(x, y)(a, b) = (x, b)$ для всіх $(x, y), (a, b) \in Y \times Y$.

У термінах дісполуки піддімоноїдів (див. п. 1) сформулюємо основний результат даної роботи.

Теорема 3. *Вільний дімоноїд* $\breve{F}[X]$ *є напівструктурою* $B(X)$ s*-простих піддімоноїдів* $(C_Y, \prec, \succ)$, $Y \in B(X)$. *При цьому кожний дімоноїд* $(C_Y, \prec, \succ)$, $Y \in B(X)$ *є прямокутною сполукою* $Y \times Y$ *піддімоноїдів* $(C_Y^{(x,y)}, \prec, \succ)$, $x, y \in Y$.

Доведення. Згідно з теоремою 2 $\Omega_{\prec}$ є найменшою напівструктурною конгруенцією вільного дімоноїда $\breve{F}[X]$, $\breve{F}[X]/\Omega_{\prec} \cong B(X)$ та

$$\breve{F}[X] \to \breve{F}[X]/\Omega_{\prec} : (w, m) \mapsto [(w, m)]$$

є гомоморфізмом $\big([(w, m)]$ — клас конгруенції $\Omega_{\prec}$, який містить $(w, m)\big)$. Зрозуміло, що класами конгруенції $\Omega_{\prec}$ є дімоноїди $(C_Y, \prec, \succ)$, $Y \in B(X)$. З теореми 1 випливає, що кожний дімоноїд $(C_Y, \prec, \succ)$, $Y \in B(X)$ є s-простим. Крім цього, неважко бачити, що для кожного $Y \in B(X)$ відображення

$$(C_Y, \prec, \succ) \to Y \times Y : (w, m) \mapsto \left(w^{(0)}, w^{(1)}\right)$$

є гомоморфізмом. Звідси $(C_Y, \prec, \succ)$ є прямокутною сполукою $Y \times Y$ піддімоноїдів $(C_Y^{(x,y)}, \prec, \succ)$, $x, y \in Y$.

Теорему доведено.

3. Конгруенції вільного дімоноїда. У цьому пункті побудуємо деякі конгруенції вільного дімоноїда.

Нехай $\breve{F}[X]$ — вільний дімоноїд (див. п. 2), α — довільна, але фіксована конгруенція вільної напівгрупи $F[X]$. Визначимо відношення $\tilde{\alpha}$ на множині $\breve{F}[X]$, поклавши

$$(w_1, m_1)\,\tilde{\alpha}(w_2, m_2) \;\Leftrightarrow\; w_1 \alpha w_2$$

для всіх $(w_1, m_1), (w_2, m_2) \in \breve{F}[X]$.

Лема 5. *Відношення* $\tilde{\alpha}$ *є конгруенцією вільного дімоноїда* $\breve{F}[X]$. *При цьому операції фактор-дімоноїда* $\breve{F}[X]/\tilde{\alpha}$ *збігаються.*

Доведення. Той факт, що $\tilde{\alpha}$ є конгруенцією $\breve{F}[X]$, безпосередньо випливає з того, що α є конгруенцією $F[X]$. Для довільних елементів (w_1, m_1), $(w_2, m_2) \in \breve{F}[X]$ крім цього маємо

$$(w_1, m_1) \prec (w_2, m_2) = (w_1 w_2, m_1),$$

$$(w_1, m_1) \succ (w_2, m_2) = (w_1 w_2, \ell_{w_1} + m_2).$$

Оскільки

$$(w_1 w_2, m_1)\,\tilde{\alpha}(w_1 w_2, \ell_{w_1} + m_2),$$

то

$$(w_1, m_1) \prec (w_2, m_2)\,\tilde{\alpha}(w_1, m_1) \succ (w_2, m_2),$$

звідки випливає, що операції дімоноїда $\breve{F}[X]/\tilde{\alpha}$ збігаються.

Лему доведено.

***Наслідок* 1.** *Якщо* α — *діагональ множини* $F[X]$, *то* $\breve{F}[X]/\tilde{\alpha}$ — *вільна напівгрупа.*

Доведення. Нехай $[(w, n)]$ — клас конгруенції $\tilde{\alpha}$, який містить елемент $(w, n) \in \breve{F}[X]$. Визначимо відображення

$$\theta\colon \breve{F}[X]/\tilde{\alpha} \to F[X] : [(w, n)] \mapsto [(w, n)]\theta = w,$$

яке, як неважко бачити, є ізоморфізмом.

Наслідок доведено.

Дімоноїд $(D, \prec, \succ)$ називатимемо прямокутним, якщо напівгрупи $(D, \prec)$ та $(D, \succ)$ є прямокутними сполуками.

Нехай $w \in F[X]$, $n \in N$, $\ell_w \geq n$. Через $w^{[n]}$ позначатимемо n-ту літеру слова w. Визначимо відношення γ на множині $\breve{F}[X]$, поклавши

$$(w_1, n_1)\,\gamma(w_2, n_2) \;\Leftrightarrow\; w_1^{[n_1]} = w_2^{[n_2]}$$

для всіх $(w_1, n_1), (w_2, n_2) \in \breve{F}[X]$.

Лема 6. *Відношення* γ *є конгруенцією вільного дімоноїда* $\breve{F}[X]$. *При цьому* $\breve{F}[X]/\gamma$ — *прямокутний дімоноїд.*

Доведення. Очевидно, що γ є відношенням еквівалентності. Нехай $(w_1,$

$n_1)$, (w_2, n_2), $(w_3, n_3) \in \breve{F}[X]$ та $(w_1, n_1)\,\gamma(w_2, n_2)$. Це означає, що $w_1^{[n_1]} = w_2^{[n_2]}$. Маємо

$$(w_1, n_1) \prec (w_3, n_3) = (w_1w_3, n_1),$$

$$(w_2, n_2) \prec (w_3, n_3) = (w_2w_3, n_2),$$

звідки

$$(w_1w_3)^{[n_1]} = w_1^{[n_1]} = w_2^{[n_2]} = (w_2w_3)^{[n_2]}.$$

Аналогічно з

$$(w_3, n_3) \prec (w_1, n_1) = (w_3w_1, n_3),$$

$$(w_3, n_3) \prec (w_2, n_2) = (w_3w_2, n_3)$$

отримуємо

$$(w_3w_1)^{[n_3]} = w_3^{[n_3]} = (w_3w_2)^{[n_3]}.$$

Отже, γ є конгруенцією напівгрупи $(F, \prec)$. Покажемо, що γ є конгруенцією напівгрупи $(F, \succ)$. Маємо

$$(w_1, n_1) \succ (w_3, n_3) = (w_1w_3, \ell_{w_1} + n_3),$$

$$(w_2, n_2) \succ (w_3, n_3) = (w_2w_3, \ell_{w_2} + n_3).$$

З рівності

$$(w_1w_3)^{[\ell_{w_1} + n_3]} = w_3^{[n_3]} = (w_2w_3)^{[\ell_{w_2} + n_3]}$$

випливає, що

$$(w_1w_3, \ell_{w_1} + n_3)\,\gamma(w_2w_3, \ell_{w_2} + n_3).$$

Аналогічно з

$$(w_3, n_3) \succ (w_1, n_1) = (w_3w_1, \ell_{w_3} + n_1),$$

$$(w_3, n_3) \succ (w_2, n_2) = (w_3w_2, \ell_{w_3} + n_2)$$

отримуємо

$$(w_3w_1)^{[\ell_{w_3} + n_1]} = w_1^{[n_1]} = w_2^{[n_2]} = (w_3w_2)^{[\ell_{w_3} + n_2]},$$

тобто

$$(w_3w_1, \ell_{w_3} + n_1)\,\gamma(w_3w_2, \ell_{w_3} + n_2).$$

Отже, γ є конгруенцією напівгрупи $(F, \succ)$.

Нехай $(w_1, n_1) \in \breve{F}[X]$. Оскільки

$$(w_1w_1)^{[n_1]} = w_1^{[n_1]} = (w_1w_1)^{[\ell_{w_1} + n_1]},$$

то

$$(w_1, n_1)\,\gamma(w_1, n_1) \;\dashv\; (w_1, n_1) \;=\; (w_1w_1, n_1),$$

$$(w_1, n_1)\,\gamma(w_1, n_1) \;\vdash\; (w_1, n_1) \;=\; (w_1w_1, \ell_{w_1} + n_1).$$

Таким чином, $\breve{F}[X]/\gamma$ є дімоноїдом ідемпотентів. Для будь-яких (w_1, n_1), $(w_2, n_2) \in \breve{F}[X]$ крім цього маємо

$$(w_1, n_1) \;\dashv\; (w_2, n_2) \;\dashv\; (w_1, n_1) \;=\; (w_1w_2w_1, n_1).$$

З рівності $(w_1w_2w_1)^{[n_1]} = w_1^{[n_1]}$ випливає $(w_1w_2w_1, n_1)\,\gamma(w_1, n_1)$. Отже, $(F, \dashv)/\gamma$ — прямокутна сполука. Звідси, згідно з лемою 1, $(F, \vdash)/\gamma$ — прямокутна сполука. Отже, за означенням $\breve{F}[X]/\gamma$ — прямокутний дімоноїд.

Лему доведено.

***Наслідок* 2.** *Існує бієкція* $X \to \breve{F}[X]/\gamma$.

Доведення. Нехай $[(w, n)]$ — клас конгруенції γ, який містить елемент $(w, n) \in \breve{F}[X]$. Стверджувана бієкція визначається відображенням

$$\mu : X \to \breve{F}[X]/\gamma \,:\, x \mapsto x\mu \;=\; [(w, n)],$$

де $w^{[n]} = x$.

Наслідок доведено.

Визначимо відношення β на множині $\breve{F}[X]$, поклавши

$$(w_1, n_1)\,\beta(w_2, n_2) \;\Leftrightarrow\; n_1 \;=\; n_2 \wedge \ell_{w_1} \;=\; \ell_{w_2}$$

для всіх $(w_1, n_1), (w_2, n_2) \in \breve{F}[X]$.

Лема 7. *Відношення* β *є конгруенцією вільного дімоноїда* $\breve{F}[X]$.

Доведення. Очевидно, що β є відношенням еквівалентності. Нехай $(w_1, n_1), (w_2, n_2), (w_3, n_3) \in \breve{F}[X]$ та $(w_1, n_1)\,\beta(w_2, n_2)$. Це означає, що $n_1 = n_2$, $\ell_{w_1} = \ell_{w_2}$. Маємо

$$(w_1, n_1) \;\dashv\; (w_3, n_3) \;=\; (w_1w_3, n_1),$$

$$(w_2, n_2) \;\dashv\; (w_3, n_3) \;=\; (w_2w_3, n_2).$$

Оскільки

$$\ell_{w_1w_3} \;=\; \ell_{w_1} + \ell_{w_3} \;=\; \ell_{w_2} + \ell_{w_3} \;=\; \ell_{w_2w_3}$$

та $n_1 = n_2$, то $(w_1w_3, n_1)\,\beta(w_2w_3, n_2)$. Аналогічно можна показати, що

$$(w_3w_1, n_3)\,\beta(w_3w_2, n_3).$$

Отже, β є конгруенцією напівгрупи $(F, \dashv)$.

Покажемо, що β є конгруенцією напівгрупи $(F, \vdash)$. Маємо

$$(w_1, n_1) \;\vdash\; (w_3, n_3) \;=\; (w_1w_3, \ell_{w_1} + n_3),$$

$$(w_2, n_2) \;\vdash\; (w_3, n_3) \;=\; (w_2w_3, \ell_{w_2} + n_3).$$

Оскільки $\ell_{w_1w_3} = \ell_{w_2w_3}$ та $\ell_{w_1} + n_3 = \ell_{w_2} + n_3$, то

$$(w_1w_3, \ell_{w_1} + n_3)\,\beta(w_2w_3, \ell_{w_2} + n_3).$$

З іншого боку,

$$(w_3, n_3) \succ (w_1, n_1) = (w_3w_1, \ell_{w_3} + n_1),$$

$$(w_3, n_3) \succ (w_2, n_2) = (w_3w_2, \ell_{w_3} + n_2).$$

З рівностей $\ell_{w_3w_1} = \ell_{w_3w_2}$ та $\ell_{w_3} + n_1 = \ell_{w_3} + n_2$ випливає, що

$$(w_3w_1, \ell_{w_3} + n_1)\,\beta(w_3w_2, \ell_{w_3} + n_2).$$

Отже, β є конгруенцією напівгрупи $(F, \succ)$.

Лему доведено.

1. *Loday J.-L.* Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz // Enseign. math. – 1993. – **39**. – P. 269 – 293.
2. *Loday J.-L.* Dialgebras // Dialgebras and Related Operads: Lect. Notes Math. – 2001. – **1763**. – P. 7 – 66.
3. *Колесников П. С.* Многообразия диалгебр и конформные алгебры // Сиб. мат. журн. – 2008. – **49**, № 2. – С. 322 – 339.
4. *Felipe R.* Generalized Loday algebras and digroups // Comuns CIMAT. – No I-04-01/21-01-2004.
5. *Пожидаев А. П.* Диалгебры и связанные с ними тройные системы // Сиб. мат. журн. – 2008. – **49**, № 4. – С. 870 – 885.
6. *Phillips J. D.* A short basis for the variety of digroups // Semigroup Forum. – 2005. – **70**. – P. 466 – 470.
7. *Zhuchok A. V.* Commutative dimonoids // Algebra and Discrete Math. – 2009. – № 2. – P. 116 – 127.
8. *Zhuchok A. V.* Free commutative dimonoids // Ibid. – 2010. – **9**, № 1. – P. 109 – 119.
9. *Zhuchok A. V.* Dibands of subdimonoids // Mat. Stud. – 2010. – **33**. – S. 120 – 124.
10. *Жучок А. В.* Найменша напівструктурна конгруенція дімоноїду // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 3. – С. 22 – 24.
11. *Yamada M.* On the greatest semilattice decomposition of a semigroup // Kodai Math. Semin. Repts.– 1955.– **7**.– P. 59 – 62.

Одержано 11.11.10