УДК 517.95

В. П. Бурский, Е. В. Кириченко
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

The solvability of the inhomogeneous Dirichlet problem in a bounded domain for scalar improperly elliptic differential equation with complex coefficients is investigated. We study a model case where the unit disk is chosen as a domain and the equation does not contain lowest terms. We prove that the problem has a unique solution in the Sobolev space for special classes of Dirichlet data that are spaces of functions with exponential decrease of the Fourier coefficients.

Розглядається проблема розв'язності неоднорідної задачі Діріхле в обмеженій області для скалярного неправильно еліптичного диференціального рівняння з комплексними коефіцієнтами. Досліджено модельний випадок, коли за область вибрано одиничний круг, а в рівнянні відсутні молодші члени. Доведено, що класами даних Діріхле, для яких задача має єдиний розв'язок у просторі Соболєва, є простори функцій з експоненціальним спаданням коефіцієнтів Фур'є.

1. Введение. Исследования корректности граничных задач восходят к Ж. Адамару, впервые заметившему, что зависимость решения задачи Коши для уравнения Лапласа в полуплоскости от начальных данных не является непрерывной. Этот пример позволил Ж. Адамару дать общепринятое сегодня определение корректности линейной граничной задачи

$$Lu = f, \quad Bu|_{\partial\Omega} = g \tag{1}$$

с линейными операторами L и B в виде оценки

$$\|u\|_S \leq \|f\|_R + \|g\|_B, \tag{2}$$

где S, R и B — банаховы пространства решений, правых частей уравнения и граничных данных соответственно. Неединственность решения граничной задачи (1), т. е. существование нетривиального решения $u \in S$ однородной задачи (1) с $f = 0$, $g = 0$, означает отсутствие оценки (2) и потому некорректность такой граничной задачи.

Во многих случаях не удается доказать корректность, но удается получить свойство нетеровости граничной задачи (1), что означает конечномерность ядра и конечномерность коядра оператора граничной задачи $L_B\colon S_B \to R$, где S_B — подпространство таких функций из S, для которых $Bu|_{\partial\Omega} = 0$, а оператор $L_B = L|_{S_B}$. Известно, что критерием нетеровости линейной дифференциальной граничной задачи для правильно (в другой терминологии — собственно) эллиптического уравнения в ограниченной области является условие Я. Б. Лопатинского [1, 2].

Напомним основные определения. Линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L} = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha$ называется эллиптическим в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, если его старший символ $l(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \neq 0$ для всех $x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, и правильно (или собственно) эллиптическим в открытой или замкнутой области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, если m четное, $m = 2k$, и для любого $x \in \Omega$, для каждой пары

© В. П. БУРСКИЙ, Е. В. КИРИЧЕНКО, 2011

линейно независимых действительных векторов ξ и η среди корней полинома $l(x, \xi + t\eta)$ от параметра t имеется ровно k корней $t_+^1, t_+^2, \ldots, t_+^k$ с положительной мнимой частью $\operatorname{Im} t_+^j > 0$ и k корней $t_-^1,\ t_-^2, \ldots, t_-^k$ с отрицательной мнимой частью $\operatorname{Im} t_-^j < 0$. Ясно, что каждый правильно эллиптический линейный дифференциальный оператор является эллиптическим. Отметим, что при $n \geq 3$ каждый эллиптический линейный дифференциальный оператор является правильно эллиптическим, но при $n = 2$ это не так (пример: оператор Коши – Римана $\partial/\partial\bar{z} = (\partial/\partial x - i\partial/\partial y)/2$), и что то же справедливо для всех n в случае, когда коэффициенты оператора вещественны ([2], см. также [1]).

Ниже для случая $n = 2$ будем рассматривать общее уравнение второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами без младших членов

$$au_{x_1x_1} + bu_{x_1x_2} + cu_{x_2x_2} = 0. \tag{3}$$

Раскладывая оператор в левой части на линейные множители, уравнение (3) можно записать в виде

$$(a^1 \cdot \nabla)(a^2 \cdot \nabla)\, u = 0$$

с единичными комплексными векторами $a^j = (a_1^j, a_2^j),\ j = 1, 2,$ что позволяет перейти к виду

$$Lu \equiv \left(\sin\varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left(\sin\varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) u = 0, \tag{4}$$

где φ_1 и φ_2 — комплексные числа и $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Невещественность чисел φ_1 и φ_2 означает, что исходное уравнение является эллиптическим, т. е. $l(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$, где $l(\xi) = (\sin\varphi_1 \cdot \xi_1\ + \cos\varphi_1 \cdot \xi_2)(\sin\varphi_2 \cdot \xi_1 + \cos\varphi_2 \cdot \xi_2)$ — символ нашего дифференциального оператора L. Правильная эллиптичность здесь означает, что корни $\lambda_1,\ \lambda_2$ квадратного уравнения $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ имеют мнимые части противоположных знаков, а это эквивалентно тому, что комплексные углы φ_1 и φ_2 имеют мнимые части противоположных знаков и, стало быть, мнимые части одного знака в неправильно эллиптическом случае.

Для неправильно эллиптического уравнения (4) в единичном круге K будем изучать разрешимость задачи Дирихле

$$u|_{\partial K} = \psi, \tag{5}$$

а именно, укажем пространство B, для которого справедлива оценка (2) с пространством Соболева в качестве пространства S. Выбор нами задачи Дирихле для исследования объясняется как ее популярностью в качестве объекта исследований, так и тем обстоятельством, что она заведомо нетерова в правильно эллиптическом случае.

В настоящее время граничные задачи для линейных эллиптических уравнений и систем изучаются только для правильно эллиптического случая, поскольку после примеров А. В. Бицадзе граничные задачи для неправильно эллиптического случая представлялись весьма туманно. Напомним, что еще в 1948 г. А. В. Бицадзе привел пример уравнения $d^2u/d\overline{z}^2 = 0,\ z = x_1 + ix_2,$ однородная задача Дирихле в единичном круге для которого имеет счетное число линейно независимых полиномиальных решений $u_N(z) = (1 - z\overline{z})\, z^N$ [3]. Позже им был найден еще один пример уравнения с тем же свойством, но уже с простыми нулями символа (см. [4]).

В работе [5] один из авторов настоящей работы привел критерий нарушения единственности решения задачи Дирихле в единичном круге для общего уравнения (3), а в его же работе [6] анонсированы результаты о разрешимости задачи Дирихле (5) в обычной соболевской шкале пространств и указан путь их доказательства. В настоящей работе мы приводим их доказательства, исправляя ошибку в формулировках результатов.

Сразу отметим, что в зависимости от свойств числа $\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2$, которое называем углом между характеристиками уравнения (4), будем различать три случая:

1) угол φ_0 вещественен и π-рационален, т. е. $\varphi_0/\pi \in \mathbb{Q}$;

2) угол φ_0 вещественен и π-иррационален;

3) угол φ_0 невещественен.

Случай 1 — это случай нарушения единственности решения задачи Дирихле [5]. В случаях 2 и 3 приходится вводить пространства аналитических правых частей для разрешимости в обычной соболевской шкале пространств, причем на свойства задачи Дирихле в случае 2, в отличие от случая 3, оказывают влияние теоретико-числовые свойства числа φ_0, аналогично тому, как это происходит со свойствами задачи Дирихле для гиперболического уравнения (4) с вещественными коэффициентами (см., например, [7]).

2. Метод исследования. Рассмотрим задачу Дирихле (5) для уравнения (4) в пространстве Соболева $H^s(K)(= W_2^s(K))$, $s \geqslant 2$, где $K = \{x \in \mathbb{R}^2\colon |x| < 1\}$ — единичный круг с границей ∂K, функция ψ принадлежит $H^{s-1/2}(\partial K)$, и выясним, для каких классов граничных данных такая задача имеет единственное решение.

В работе [6] получено условие связи следов решения задачи Коши для уравнения (4) с данными из обычных соболевских пространств, которое мы приводим ниже в виде теоремы 1.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $u \in H^s(K)$ была решением задачи*

$$u|_{\partial K} = \psi \in H^{s-1/2}(\partial K), \quad u'_\nu|_{\partial K} = \chi \in H^{s-3/2}(\partial K)$$

для уравнения (4), *необходимо и достаточно, чтобы функции*

$$P(x) = -l(\nu(x))\psi(x) \in H^{s-1/2}(\partial K),$$

$$C(x) = l(\nu(x))\chi(x) + [(\nu_1^2 - \nu_2^2)\sin(\varphi_1+\varphi_2) + 2\nu_1\nu_2\cos(\varphi_1+\varphi_2)]\psi'_\tau +$$

$$+[(\nu_2^2 - \nu_1^2)\cos(\varphi_1+\varphi_2) - 2\nu_1\nu_2\sin(\varphi_1+\varphi_2)]\psi \in H^{s-3/2}(\partial K)$$

удовлетворяли условию

$$\int\limits_{\partial K} [P(x)(-i\langle \nu, \overline{\xi}\rangle) + C(x)] \exp(-i\langle x, \overline{\xi}\rangle)\, d\tau = 0 \quad \forall \xi \in \Lambda = \{\xi \in \mathbb{C}^2\colon l(\xi)\} = 0. \tag{6}$$

Здесь и ниже τ — натуральный параметр на ∂K, $\langle x, \overline{\xi}\rangle = x_1\overline{\xi}_1 + x_2\overline{\xi}_2$, $x \cdot \eta = x_1\eta_1 + x_2\eta_2$.

Позже в работе [8] было показано, что равенство (6) эквивалентно паре условий

$$\int\limits_{\partial K} \left[u'_{\nu_*} + \frac{\overline{\Delta}}{2} u'_\tau \right] Q(x \cdot \widetilde{a}^1) d\tau = 0,$$

$$\int\limits_{\partial K} \left[u'_{\nu_*} - \frac{\overline{\Delta}}{2} u'_\tau \right] Q(x \cdot \widetilde{a}^2) d\tau = 0.$$

Здесь $\widetilde{a}^1 = (-\overline{a}^1_2, \overline{a}^1_1)$, $\widetilde{a}^2 = (-\overline{a}^2_2, \overline{a}^2_1)$ — направляющие векторы множества комплексных характеристических направлений $\Lambda^j = \{\lambda \widetilde{a}^j | \lambda \in \mathbb{C}\}$, $j = 1, 2$, $\langle \widetilde{a}^j, a^j \rangle = 0$, $\Lambda = \Lambda^1 \cup \Lambda^2$, $\dfrac{\partial}{\partial \tau}$ и $\dfrac{\partial}{\partial \nu_*} = l(\nu) \dfrac{\partial}{\partial \nu} - \dfrac{1}{2k} [l(\nu(s))]'_s \dfrac{\partial}{\partial \tau}$ — производные по касательной и по конормали соответственно, k — кривизна кривой ∂K.

Данная эквивалентность вместе с теоремой 1 гарантировала справедливость следующей теоремы, доказанной в [8].

Теорема 2. *Для того чтобы функция $u \in H^s(K)$, $s \geqslant 2$, была решением задачи*

$$u'_\tau|_{\partial K} = \gamma \in H^{s-3/2}(\partial K), \quad u'_{\nu_*}|_{\partial K} = \kappa \in H^{s-3/2}(\partial K)$$

для уравнения (4), *необходимо и достаточно, чтобы функции γ и κ удовлетворяли интегральному равенству*

$$\int\limits_{\partial K} \left[\kappa - (-1)^j \frac{\overline{\Delta}}{2} \gamma \right] Q(x \cdot \widetilde{a}^j) d\tau = 0, \quad j = 1, 2, \tag{7}$$

с любым полиномом $Q \in \mathbb{C}[z]$. При этом функция u восстанавливается с точностью до аддитивной постоянной.

Таким образом, было получено другое условие связи следов решения, имеющее вид проблемы неопределенности некоторой проблемы моментов, свойства которой определяли свойства граничной задачи.

Рассмотрим несколько подробнее возникшую проблему моментов на границе ∂K единичного круга K:

Для $j = 1, 2$ и двух заданных наборов чисел ω^j_n, $\omega^1_0 = \omega^2_0$, $n = 0, 1, \ldots,$ найти функцию α такую, что

$$\int\limits_{\partial K} \alpha(\tau) (x(\tau) \cdot \widetilde{a}^j)^n d\tau = \omega^j_n.$$

Эта проблема моментов обобщает классическую тригонометрическую проблему моментов. Действительно, возьмем в качестве векторов $\widetilde{a}^j$ следующие векторы: $\widetilde{a}^1 = (1, i)$, $\widetilde{a}^2 = (1, -i)$. Получим обычную тригонометрическую проблему моментов

$$\int\limits_{\partial K} \alpha(\tau) e^{in\tau} d\tau = \omega^1_n, \quad \int\limits_{\partial K} \alpha(\tau) e^{-in\tau} d\tau = \omega^2_n.$$

Далее, умножая эти равенства на коэффициенты полинома Чебышева T_n первого рода и складывая, получаем

$$\int\limits_{\partial K} \alpha(\tau) T_n(-x(\tau) \cdot \widetilde{a}^j) d\tau = \mu^j_n$$

с некоторыми μ_n^j. Поскольку $T_n(\cos\sigma) = \cos n\sigma$ и, кроме того, произведение $x(\tau) \cdot \widetilde{a}^j = (\cos\tau, \sin\tau) \cdot (-\cos\varphi_j, \sin\varphi_j) = -\cos(\tau + \varphi_j)$, исходную проблему моментов можно записать в следующей форме:

Для $j = 1, 2$ *и двух заданных наборов чисел* μ_n^j, $n = 0, 1, \ldots$, *найти функцию* α *такую, что*

$$\int\limits_{\partial K} \alpha(\tau) \cos n(\tau + \varphi_j) d\tau = \mu_n^j. \tag{8}$$

Введем обозначения. Пусть M_l^j — подпространство пространства $H^l(\partial K)$, $l \in \mathbb{R}$, элементами которого являются функции $\alpha(\tau)$, удовлетворяющие при всех $k \in \mathbb{Z}_+$ интегральному равенству

$$\int\limits_{\partial K} \alpha(\tau)(x \cdot \widetilde{a}^j)^k d\tau = 0, \quad j = 1, 2.$$

Определение 1. *Определим пространство Соболева* $H_\rho^m(\partial K)$ *с весом* $\rho = \rho(n)$ *для коэффициентов Фурье как пространство функций*

$$\alpha(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\alpha_n^C \cos n\tau + \alpha_n^S \sin n\tau\big) \tag{9}$$

из $L_2(\partial K)$ *таких, что коэффициенты* α_n^C, α_n^S *разложения удовлетворяют условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(|\alpha_n^C|^2 + |\alpha_n^S|^2\big) \rho^2(n) \big(1 + n^2\big)^m < \infty. \tag{10}$$

***Замечание* 1.** В дальнейшем в качестве веса $\rho(n)$ примем значение

$$\rho = \rho(n) = e^{n(|\mathrm{Im}(\varphi_1 + \varphi_2)| - |\mathrm{Im}(\varphi_2 - \varphi_1)|)}.$$

Отметим, что $|\mathrm{Im}(\varphi_1 + \varphi_2)| - |\mathrm{Im}(\varphi_2 - \varphi_1)| > 0$ для неправильно эллиптического уравнения (4). Пространство $H_\rho^m(\partial K)$ с таким весом состоит из аналитических функций. Функции с экспоненциальным убыванием коэффициентов Фурье систематически используются в теории функций, начиная с работ С. Н. Бернштейна (см. [9]).

Определение 2. *Будем говорить, что векторы* $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$ *имеют* $H_\rho^m - H^l$*-свойство на кривой* ∂K, $l \leqslant m$, *если для каждой функции* $\alpha \in H_\rho^m(\partial K)$ *существуют единственные функции* $\alpha^1 \in M_l^1$, $\alpha^2 \in M_l^2$ *такие, что имеет место представление* $\alpha = \alpha^1 + \alpha^2 + \mathrm{const}$.

После подстановки разложения (9) в равенство (8) получим соотношения

$$\pi(\alpha_n^C \cos n\varphi_j - \alpha_n^S \sin n\varphi_j) = \mu_n^j, \quad j = 1, 2,$$

исходя из которых определим подпространства M_l^j, $j = 1, 2$, равенствами

$$M_l^1\colon \alpha_n^C \cos n\varphi_1 - \alpha_n^S \sin n\varphi_1 = 0,$$

$$M_l^2\colon \alpha_n^C \cos n\varphi_2 - \alpha_n^S \sin n\varphi_2 = 0.$$

Теперь исследуем задачу $H_\rho^m - H^l$ на окружности ∂K в предположении, что $\alpha \in H_\rho^m(\partial K)$ — произвольная функция, имеющая представление (9). Спроектируем вектор $(\alpha_n^C, \alpha_n^S) \in \mathbb{C}^2$ на прямую $\alpha_n^C \cos n\varphi_1 - \alpha_n^S \sin n\varphi_1 = 0$ вдоль прямой $\alpha_n^C \cos n\varphi_2 - \alpha_n^S \sin n\varphi_2 = 0$. Определяя координаты $(\alpha_n^{1,C}, \alpha_n^{1,S})$ проекции из системы

$$\alpha_n^{1,C} \cos n\varphi_1 - \alpha_n^{1,S} \sin n\varphi_1 = 0,$$

$$\alpha_n^{1,C} \cos n\varphi_2 - \alpha_n^{1,S} \sin n\varphi_2 = \alpha_n^C \cos n\varphi_2 - \alpha_n^S \sin n\varphi_2,$$

имеем

$$(\alpha_n^{1,C}, \alpha_n^{1,S}) = \left(\frac{\alpha_n^C - \alpha_n^S \operatorname{tg} n\varphi_2}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}, \; \frac{\operatorname{ctg} n\varphi_1 (\alpha_n^C - \alpha_n^S \operatorname{tg} n\varphi_2)}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1} \right).$$

Прямым дополнением этого вектора в $\mathbb{C}^2$, лежащим на второй прямой, будет вектор

$$(\alpha_n^{2,C}, \alpha_n^{2,S}) = \left(\alpha_n^C - \frac{\alpha_n^C - \alpha_n^S \operatorname{tg} n\varphi_2}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}, \; \alpha_n^S - \frac{\operatorname{ctg} n\varphi_1 (\alpha_n^C - \alpha_n^S \operatorname{tg} n\varphi_2)}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1} \right) =$$

$$= \left(\frac{\operatorname{tg} n\varphi_2 (-\alpha_n^C \operatorname{ctg} n\varphi_1 + \alpha_n^S)}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}, \; \frac{-\alpha_n^C \operatorname{ctg} n\varphi_1 + \alpha_n^S}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1} \right).$$

Далее, имея координаты проекции и прямого дополнения, находим функции $\alpha^j \in M_l^j, \; j = 1, 2$:

$$\alpha^1 = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^{1,C} \cos n\tau + \alpha_n^{1,S} \sin n\tau) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_n^C - \alpha_n^S \operatorname{tg} n\varphi_2}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1} \cos n\tau + \frac{\operatorname{ctg} n\varphi_1 (\alpha_n^C - \alpha_n^S \operatorname{tg} n\varphi_2)}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1} \sin n\tau \right),$$

$$\alpha^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^{2,C} \cos n\tau + \alpha_n^{2,S} \sin n\tau) = \tag{11}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{tg} n\varphi_2 (-\alpha_n^C \operatorname{ctg} n\varphi_1 + \alpha_n^S)}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1} \cos n\tau + \frac{-\alpha_n^C \operatorname{ctg} n\varphi_1 + \alpha_n^S}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1} \sin n\tau \right).$$

Рассмотрим векторы $\widetilde{a}^1, \; \widetilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$, заданные уравнением (4), и выясним, при каком показателе $l, \; l \leqslant m$, эти векторы имеют $H_\rho^m - H^l$-свойство на кривой ∂K. Исследуем отдельно два случая, отмеченные во введении:

2) $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$ — вещественное π-иррациональное число,

3) φ_0 — невещественное комплексное число.

Оценим коэффициенты при множителях $\alpha_n^C \cos n\tau, \; \alpha_n^S \cos n\tau, \; \alpha_n^C \sin n\tau, \; \alpha_n^S \sin n\tau$ в выражениях (11) функций α^1 и α^2:

$$\left| \frac{1}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1} \right| = \left| \frac{\sin n\varphi_1 \cos n\varphi_2}{\sin n\varphi_1 \cos n\varphi_2 - \sin n\varphi_2 \cos n\varphi_1} \right| = \left| \frac{\sin n\varphi_1 \cos n\varphi_2}{\sin n\varphi_0} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{n|\mathrm{Im}\varphi_1|}\cdot e^{n|\mathrm{Im}\varphi_2|}}{|\sin n\varphi_0|} = \frac{e^{n|\mathrm{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|}}{|\sin n\varphi_0|},$$

$$\left|\frac{\mathrm{tg}\, n\varphi_2}{1-\mathrm{tg}\, n\varphi_2\,\mathrm{ctg}\, n\varphi_1}\right| = \left|\frac{\sin n\varphi_1 \sin n\varphi_2}{\sin n\varphi_0}\right| \leqslant \frac{e^{n|\mathrm{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|}}{|\sin n\varphi_0|}, \tag{12}$$

$$\left|\frac{\mathrm{ctg}\, n\varphi_1}{1-\mathrm{tg}\, n\varphi_2\,\mathrm{ctg}\, n\varphi_1}\right| = \left|\frac{\cos n\varphi_1 \cos n\varphi_2}{\sin n\varphi_0}\right| \leqslant \frac{e^{n|\mathrm{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|}}{|\sin n\varphi_0|},$$

$$\left|\frac{\mathrm{ctg}\, n\varphi_1\,\mathrm{tg}\, n\varphi_2}{1-\mathrm{tg}\, n\varphi_2\,\mathrm{ctg}\, n\varphi_1}\right| = \left|\frac{\cos n\varphi_1 \sin n\varphi_2}{\sin n\varphi_0}\right| \leqslant \frac{e^{n|\mathrm{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|}}{|\sin n\varphi_0|}.$$

Случай 2. Напомним, что, по предположению из замечания 1, мы используем вес для коэффициентов Фурье в виде $\rho = e^{n(|\mathrm{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|-|\mathrm{Im}(\varphi_2-\varphi_1)|)}$, так что $\rho = e^{n|\mathrm{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|}$ при вещественном φ_0, поскольку в этом случае $\mathrm{Im}\,\varphi_1 = \mathrm{Im}\,\varphi_2$.

Воспользуемся следующим утверждением из книги [7].

Утверждение 1. *Пусть* $\mu + 1 > 0$. *Неравенство для числа* $\varphi_0 \in \mathbb{R}$

$$\exists C_0 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}: \ |\sin n\varphi_0| > C_0 n^{-\mu} \tag{13}$$

равносильно неравенству

$$\exists C_1 > 0 \quad \forall \frac{q}{r} \in \mathbb{Q}: \ \left|\frac{\varphi_0}{\pi} - \frac{q}{r}\right| > C_1 r^{-\mu-1}.$$

Из неравенства (13) нетрудно видеть, что при вещественном φ_0 все указанные выше отношения в левых частях неравенств (12) оцениваются величиной ρn^{μ}. Следовательно, коэффициенты функций α^1, α^2 удовлетворяют оценке

$$|\alpha_n^{j,C}| \leqslant \rho n^{\mu}(|\alpha_n^C| + |\alpha_n^S|), \quad |\alpha_n^{j,S}| \leqslant \rho n^{\mu}(|\alpha_n^C| + |\alpha_n^S|), \quad j = 1, 2,$$

которая означает, с учетом принадлежности $\alpha \in H_\rho^m(\partial K)$, что $\alpha^j \in H^{m-\mu}(\partial K)$. В самом деле,

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n^C|^2 + |\alpha_n^S|^2)\rho^2 n^{2m} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n^{j,\,C}|^2 + |\alpha_n^{j,S}|^2}{\rho^2 n^{2\mu}} \cdot \rho^2 n^{2m} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \big(|\alpha_n^{j,\,C}|^2 + |\alpha_n^{j,\,S}|^2\big) n^{2(m-\mu)}.$$

Итак, мы выяснили, используя неравенство (10), что в случае 2 функции α^j принадлежат $H^{m-\mu}(\partial K)$ (т. е. искомое $l = m - \mu$).

Перейдем к исследованию случая 3. Если φ_0 — комплексное невещественное число, то, как нетрудно убедиться, все четыре отношения из (12) оцениваются сверху весом $\rho = e^{n(|\mathrm{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|-|\mathrm{Im}(\varphi_2-\varphi_1)|)}$. Но тогда

$$|\alpha_n^{j,C}| \leqslant \rho(|\alpha_n^C| + |\alpha_n^S|), \quad |\alpha_n^{j,S}| \leqslant \rho(|\alpha_n^C| + |\alpha_n^S|), \quad j = 1, 2,$$

поэтому, снова используя определение 1, замечаем, что функции α^j принадлежат $H^m(\partial K)$ (здесь индекс l совпадает с m).

Резюмируя полученные результаты, сформулируем только что доказанное нами утверждение как теорему 3.

Теорема 3. *Пусть φ_0 — вещественное число, α принадлежит $H^m_\rho(\partial K)$ и выполнено неравенство* (13). *Тогда функции α^j, $j = 1, 2$, принадлежат пространству $H^{m-\mu}(\partial K)$. Если же φ_0 — комплексное невещественное число и, по-прежнему, α принадлежит $H^m_\rho(\partial K)$, то функции α^j принадлежат $H^m(\partial K)$.*

***Замечание* 2.** В смысле определения 2 последнее утверждение означает, что при вещественном φ_0 векторы $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$ имеют $H^m_\rho - H^{m-\mu}$-свойство на окружности ∂K, а в случае комплексного φ_0 — $H^m_\rho - H^m$-свойство на ∂K.

Теперь обратимся к формулировке и доказательству основного результата, отражающего связь свойств проблемы моментов (8) с разрешимостью задачи (4), (5).

Теорема 4. *Пусть φ_0 вещественно и π-иррационально. Если векторы $\widetilde{a}^1$, $\widetilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$ имеют $H^{s-3/2}_\rho - H^{s-\mu-3/2}$-свойство на границе ∂K круга, то решение $u(x)$ задачи* (5) *для уравнения* (4) *существует, единственно и принадлежит пространству $H^{s-\mu}(K)$.*

Доказательство. В силу свойства $H^{s-3/2}_\rho - H^{s-\mu-3/2}$ векторов $\widetilde{a}^1$, $\widetilde{a}^2$ любая функция $2\gamma = 2\psi'_\tau \in H^{s-3/2}_\rho(\partial K)$ представима в виде суммы $2\gamma = v_1 + v_2$, где $v_j \in M^j_{s-\mu-3/2}$, $j = 1, 2$. Положим $\kappa = \dfrac{\overline{\Delta}}{2}(v_1 - \gamma)$, где $\Delta = \sin\varphi_0$. Поскольку $H^{s-3/2}_\rho \subset H^{s-3/2} \subset H^{s-\mu-3/2}$, функция κ принадлежит $H^{s-\mu-3/2}(\partial K)$. При таком выборе функций γ и κ выполняется равенство (7).

В самом деле, при $j = 1$ выражение в квадратных скобках под интегралом $\displaystyle\int_{\partial K} \left[\kappa - (-1)^j \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma\right] Q(x \cdot \widetilde{a}^j) d\tau$ имеет вид

$$\kappa + \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma = \frac{\overline{\Delta}}{2}(v_1 - \gamma) + \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma = \frac{\overline{\Delta}}{2} v_1,$$

так что равенство нулю интеграла $\displaystyle\int_{\partial K} \frac{\overline{\Delta}}{2} v_1 Q(x \cdot \widetilde{a}^1) d\tau$ достигается в силу принадлежности $v_1 \in M^1_{s-\mu-3/2}$.

Аналогично, при $j = 2$

$$\int\limits_{\partial K} \left[\kappa - \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma\right] Q(x \cdot \widetilde{a}^2) d\tau = \int\limits_{\partial K} \left[\frac{\overline{\Delta}}{2}(v_1 - \gamma) - \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma\right] Q(x \cdot \widetilde{a}^2) d\tau =$$

$$= \frac{\overline{\Delta}}{2} \int\limits_{\partial K} \big(v_1 - 2\gamma\big) Q(x \cdot \widetilde{a}^2) d\tau = -\frac{\overline{\Delta}}{2} \int\limits_{\partial K} v_2 \cdot Q(x \cdot \widetilde{a}^2) d\tau = 0,$$

так как $v_2 \in M^2_{s-\mu-3/2}$.

Из равенства нулю указанных интегралов следует (в силу теоремы 2), что существует решение $u \in H^{s-\mu}(K)$ задачи Дирихле (4), (5).

Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть φ_0 невещественно. Если векторы $\widetilde{a}^1$, $\widetilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$ имеют $H^{s-3/2}_\rho - H^{s-3/2}$-свойство на границе ∂K круга, то решение $u(x)$ задачи* (5) *для уравнения* (4) *существует, единственно и принадлежит пространству $H^s(K)$.*

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы с тем отличием, что в этом случае $\mu = 0$.

Объединяя теоремы 3, 4 и 5, получаем основной результат в виде теорем 6 и 7, соответствующих случаям 2 и 3.

Теорема 6. *Пусть* φ_0 *вещественно и* π*-иррационально,* ψ *принадлежит* $H_\rho^{s-1/2}(\partial K)$ *и выполнено неравенство* (13). *Тогда решение задачи* (4), (5) *существует, единственно и принадлежит пространству* $H^{s-\mu}(K)$.

Теорема 7. *Если* φ_0 *— невещественное число и* ψ *принадлежит* $H_\rho^{s-1/2}(\partial K)$, *то решение задачи* (4), (5) *существует, единственно и принадлежит пространству* $H^s(K)$.

1. *Лионс Ж.-М., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
2. *Лопатинский Я. Б.* Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям // Укр. мат. журн. – 1953. – **5**, № 2. – С. 123 – 151.
3. *Бицадзе А. В.* О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. – 1948. – **3**, № 6. – С. 211 – 212.
4. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы дифференциальных уравнений с частными производными. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
5. *Бурский В. П.* О нарушении единственности решения задачи Дирихле для эллиптических систем в круге // Мат. заметки. – 1990. – **48**, № 3. – С. 32 – 36.
6. *Бурский В. П.* О решениях задачи Дирихле для эллиптических систем в круге // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 10. – С. 1307 – 1313.
7. *Бурский В. П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 2002. – 316 с.
8. *Бурский В. П.* О краевых задачах для эллиптического уравнения с комплексными коэффициентами и одной проблеме моментов // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 11. – С. 1476 – 1483.
9. *Мандельбройт С.* Квазианалитические классы функций. – Л.; М.: ОНТИ НКТП СССР, 1937.

Получено 02.07.10