УДК 517.95

В. І. Лагно (Полтав. пед. ун-т),
С. В. Спічак (Ін-т математики НАН України, Київ)

ГРУПОВА КЛАСИФІКАЦІЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ II. ІНВАРІАНТНІСТЬ ВІДНОСНО РОЗВ'ЯЗНИХ АЛГЕБР ЛІ

The problem of the group classification of quasilinear elliptic-type equations in a two-dimensional space is considered. The list of all equations of this type, which admit the solvable Lie algebras of symmetry operators, is obtained. The results of this paper along with results obtained by the authors earlier give a complete solution of the problem of the group classification of quasilinear elliptic-type equations.

Рассматривается задача групповой классификации квазилинейных уравнений эллиптического типа в двумерном пространстве. Получен перечень всех уравнений этого класса, допускающих разрешимые алгебры Ли операторов симметрии. Эти результаты вместе с результатами, полученными авторами ранее, дают исчерпывающее решение задачи групповой классификации квазилинейных уравнений эллиптического типа.

1. Вступ. У статті [1] одержано групову класифікацію квазілінійних рівнянь еліптичного типу

$$\Delta u = F(x, y, u, u_x, u_y), \tag{1.1}$$

інваріантних відносно груп локальних перетворень, алгебри Лі яких мають нетривіальний розклад Леві. У (1.1) і далі $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — двовимірний оператор Лапласа, $u = u(x, y)$, F — довільна гладка функція в деякій області простору $W = \mathbb{R}^2 \times \underset{1}{V} = \langle x, y\rangle \times \langle u, u_x, u_y\rangle$, яка є нелінійною хоча б за однією із змінних u, u_x, u_y.

У даній роботі ми завершуємо групову класифікацію рівнянь вигляду (1.1). Тут, як і в статті [1], використовуємо метод, запропонований у роботах [2, 3] (див. також [4]), згідно з яким подальшому дослідженню підлягають рівняння вигляду (1.1), які допускають розв'язні алгебри Лі операторів симетрії. При цьому розглядаємо лише ті рівняння, які замінами змінних не зводяться до рівняння Лапласа або до інших лінійних рівнянь еліптичного типу (ми їх тут називаємо суттєво нелінійними). Як було вказано у [1], такими є рівняння вигляду

$$\Delta u = f(u)(u_x^2 + u_y^2), \quad f \neq 0, \tag{1.2}$$

$$\Delta u = \lambda e^{\gamma u}, \quad \lambda,\, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \lambda\gamma \neq 0. \tag{1.3}$$

У подальшому ми опираємося на відому класифікацію неізоморфних розв'язних алгебр Лі $A_{k.i} = \langle e_1, \ldots, e_k\rangle$ [5, 6], зберігаючи при цьому позначення алгебр, які використовувалися в роботах [1, 4].

2. Означення, приклади та попередні результати групової класифікації. Насамперед нагадаємо деякі результати, що були отримані у роботі [1] і будуть використовуватись у подальших дослідженнях.

Твердження 2.1 [1]. *Група інваріантності рівняння* (1.1) *генерується інфінітезимальним оператором*

$$\mathrm{v} = a(x,y)\partial_x + b(x,y)\partial_y + c(x,y,u)\partial_u, \tag{2.1}$$

де функції a, b, c, F *задовольняють таку систему рівнянь*:

$$\begin{gathered} a_y + b_x = 0, \qquad a_x - b_y = 0, \\ c_{xx} + c_{yy} + 2u_x c_{xu} + 2u_y c_{yu} + (u_x^2 + u_y^2)c_{uu} + (c_u - 2a_x)F = \\ = aF_x + bF_y + cF_u + [c_x + u_x(c_u - a_x) - u_y b_x]F_{u_x} + \\ +[c_y + u_y(c_u - b_y) - u_x a_y]F_{u_y}. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Групову класифікацію рівняння (1.1) проводимо з точністю до еквівалентності, яку визначають перетворення з групи еквівалентності рівняння (1.1) (у подальшому будемо позначати її $\mathcal{E}$). Групу $\mathcal{E}$ утворюють перетворення вигляду

$$\bar{x} = \alpha(x,y,u), \qquad \bar{y} = \beta(x,y,u), \qquad v = \gamma(x,y,u), \qquad \frac{D(\bar{x},\bar{y},v)}{D(x,y,u)} \neq 0,$$

які зберігають диференціальну структуру рівняння (1.1), тобто трансформують його в рівняння вигляду

$$v_{\bar{x}\bar{x}} + v_{\bar{y}\bar{y}} = \Phi(\bar{x},\bar{y},v,v_{\bar{x}},v_{\bar{y}}).$$

Твердження 2.2 [1]. *Групу еквівалентності* $\mathcal{E}$ *рівняння* (1.1) *складають перетворення*

$$\bar{x} = \alpha(x,y), \qquad \bar{y} = \beta(x,y), \qquad v = \gamma(x,y,u), \tag{2.3}$$

де

$$\alpha_x = \epsilon\beta_y, \qquad \alpha_y = -\epsilon\beta_x \quad (\epsilon = \pm 1), \qquad \alpha_x^2 + \alpha_y^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 \neq 0, \qquad \gamma_u \neq 0.$$

Лема 2.1 [1]. *Існують такі перетворення з групи* $\mathcal{E}$, *які зводять оператор* (2.1) *в один із таких операторів*:

$$\mathrm{v} = \partial_x, \qquad \mathrm{v} = \partial_u.$$

Теорема 2.1 [1]. *З точністю до еквівалентності існують два класи квазілінійних рівнянь вигляду* (1.1), *які допускають однопараметричні групи локальних перетворень. Канонічний вигляд представників цих класів рівнянь і відповідні одновимірні алгебри інваріантності є такими*:

$$\begin{gathered} \Delta u = F(y,u,u_x,u_y)\colon\ A_1^1 = \langle\partial_x\rangle, \\ \Delta u = F(x,y,u_x,u_y)\colon\ A_1^2 = \langle\partial_u\rangle. \end{gathered}$$

Зазначимо, що, як показує безпосередня перевірка, вказані одновимірні алгебри Лі A_1^1 і A_1^2 операторів симетрії для довільних значень F у відповідних рівняннях є максимальними алгебрами інваріантності цих рівнянь.

Розглянемо далі алгебру $A_n = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ розмірності n, базисними елементами якої є диференціальні оператори першого порядку (векторні поля)

$$e_i = a_i(x,y)\partial_x + b_i(x,y)\partial_y + c_i(x,y,u)\partial_u, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.4}$$

для яких пари функцій $a_i(x,y)$, $b_i(x,y)$ задовольняють умови Коші – Рімана (два перших рівняння (2.2)).

Означення 2.1. *Реалізацію* (2.4) *алгебри* A_n *будемо називати допустимою, якщо існує така функція* $F(x, y, u, u_x, u_y)$, *для якої всі трійки функцій* $(a_i(x,y)$, $b_i(x,y)$, $c_i(x,y,u))$ *є розв'язками визначальних рівнянь* (2.2), *а відповідне інваріантне рівняння вигляду* (1.1) *є суттєво нелінійним.*

Означення 2.2. *Дві реалізації алгебри* A_n *з операторами вигляду* (2.4), *що містять функції* $(a_i(x,y), b_i(x,y), c_i(x,y,u))$ *і* $(\tilde{a}_i(x,y), \tilde{b}_i(x,y), \tilde{c}_i(x,y,u))$, *будемо називати еквівалентними, якщо існують перетворення еквівалентності* (2.3), *які зводять кожен оператор* e_i (2.4) *у відповідний оператор* $\tilde{e}_i = \tilde{a}_i(x,y)\partial_x + \tilde{b}_i(x,y)\partial_y + \tilde{c}_i(x,y,u)\partial_u$, $i = 1, \ldots, n$.

Означення 2.3. *Дві реалізації алгебри* A_n *будемо називати ізоморфними, якщо кожен із базисних операторів однієї реалізації є лінійною комбінацією базисних операторів іншої, а відповідне лінійне перетворення є невиродженим.*

Означення 2.4. *Дві реалізації алгебри* A_n *будемо називати різними, якщо вони є нееквівалентними та неізоморфними.*

Зрозуміло, що ізоморфні реалізації описують одну й ту ж множину операторів симетрії з точністю до їх лінійної комбінації і відповідні класи інваріантних рівнянь вигляду (1.1) збігаються. Але навіть коли вони ізоморфні, будемо розрізняти їх на етапі побудови усіх можливих реалізацій алгебр Лі розмірності $n+1$, виходячи з усіх знайдених нееквівалентних реалізацій алгебр Лі розмірності n, оскільки їх розширення можуть бути різними, і природним є те, що відповідні інваріантні рівняння будуть нееквівалентними.

Через $\mathfrak{N}A_{k.l}$ позначимо множину усіх нееквівалентних допустимих реалізацій (можливо ізоморфних) для кожної алгебри $A_{k.l}$ розмірності k, а через $\mathfrak{D}A_{k.l}$ — множину усіх різних допустимих реалізацій алгебри $A_{k.l}$. Очевидно, що $\mathfrak{D}A_{k.l} \subset \mathfrak{N}A_{k.l}$, і наша мета полягає у побудові всіх множин реалізацій $\mathfrak{D}A_{k.l}$.

Виходячи з наведених означень, можемо констатувати, що індуктивний алгоритм побудови цих множин, а також відповідних класів інваріантних рівнянь полягає у наступному.

Згідно з лемою 2.1 для одновимірної алгебри $A_{1.1}$ маємо $\mathfrak{N}A_{1.1} = \mathfrak{D}A_{1.1} = \{\partial_x, \partial_u\}$, а відповідні класи рівнянь, які допускають ці дві реалізації, описано в теоремі 2.1.

Для усіх алгебр $A_{k.l}$ розмірності k, $1 \leq k \leq 3$, будуємо множини реалізацій $\mathfrak{N}A_{k.l}$ і $\mathfrak{D}A_{k.l}$, а також відповідні їм класи інваріантних рівнянь.

Після цього розглядаємо послідовно алгебри $A_{k+1.l}$ розмірності $k+1$. Як ідеал кожна з них містить деяку підалгебру $A_{k.m}$ розмірності k (це має місце для розв'язних алгебр Лі, оскільки для кожної з них існує композиційний ряд підалгебр (див. [5, 6])). Тоді, розглядаючи кожну побудовану реалізацію з множини

$\mathfrak{N}A_{k.m}$ для алгебри $A_{k.m} = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$, будуємо додатковий оператор e_{k+1} так, щоб базисні оператори задовольняли комутаційні співвідношення алгебри $A_{k+1.l}$, і, якщо це потрібно, спрощуємо вигляд операторів перетвореннями з групи $\mathcal{E}$ (2.3).

Далі перевіряємо, чи буде отримана реалізація допустимою; якщо так, то включаємо її до множини $\mathfrak{N}A_{k+1.l}$, якщо ні — вилучаємо з подальшого розгляду. Із побудованої множини $\mathfrak{N}A_{k+1.l}$ виділяємо максимальну множину $\mathfrak{D}A_{k+1.l}$ різних реалізацій.

Після побудови множини $\mathfrak{D}A_{4.l}$ різних реалізацій алгебр розмірності 4 і відповідних класів інваріантних рівнянь, які містять довільні функції однієї змінної, використовуємо прямий метод класифікації Овсяннікова [7, 8], щоб отримати повний список рівнянь, інваріантних відносно алгебр Лі операторів симетрії, які мають розмірність вищу за чотири.

Ілюструючи цей алгоритм, зупинимося на прикладах побудови множини різних реалізацій алгебр, розмірності яких дорівнюють 2 і 3.

Алгебра $\boldsymbol{A_{2.1}}$. Згідно з лемою 2.1 $\mathfrak{N}A_{1.1} = \{\partial_x, \partial_u\}$.

1. Нехай $e_1 = \partial_x$, а e_2 має вигляд (2.1). Тоді із співвідношення $[e_1, e_2] = 0$ випливає, що $a_x(x, y) = b_x(x, y) = c_x(x, y, u) = 0$. Враховуючи також перші два рівняння (2.2), отримуємо $e_2 = \lambda_1 \partial_x + \lambda_2 \partial_y + f(y, u)\partial_u$.

1.1. Нехай $\lambda_2 \neq 0$. Розглянемо перетворення еквівалентності (2.3) вигляду

$$\bar{x} = x, \qquad \bar{y} = y, \qquad v = s(y, u). \tag{2.5}$$

Маємо $e_2 \to \tilde{e}_2 = \lambda_1 \partial_{\tilde{x}} + \lambda_2 \partial_{\tilde{y}} + (\lambda_2 s_y(y, u) + f(y, u)s_u(y, u))\partial_{\tilde{v}}$. Оскільки $\lambda_2 \neq 0$, то існує така функція $s(y, u)$, $s_u(y, u) \neq 0$, що коефіцієнт біля ∂_v дорівнює нулю. При цьому оператор e_1 не змінює свого вигляду.

1.2. Нехай $\lambda_2 = 0$, тоді $f(y, u) \neq 0$ (інакше e_2 лінійно залежить від e_1). Розглянемо перетворення еквівалентності вигляду (2.5) за умови, що $f(y, u)s_u(y, u) = 1$. Тоді $e_2 \to \tilde{e}_2 = \lambda_1 \partial_{\tilde{x}} + \partial_{\tilde{v}}$.

2. Нехай $e_1 = \partial_u$, а e_2 має вигляд (2.1). Із виконання комутаційних співвідношень отримуємо $c(x, y, u) = f(x, y)$.

2.1. Нехай $a^2 + b^2 \neq 0$. Тоді існує таке перетворення еквівалентності, яке не змінює вигляду оператора e_1, а $e_2 \to \tilde{e}_2 = \partial_{\tilde{x}} + \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y})\partial_u$. Далі, застосовуючи перетворення вигляду $v = u + s(\tilde{x}, \tilde{y})$, переконуємося, що $\tilde{e}_1 \to \partial_v$, $\tilde{e}_2 \to \partial_{\tilde{x}}$.

2.2. Нехай $a^2 + b^2 = 0$. Тоді $e_2 = f(x, y)\partial_u$. Отже, $\mathfrak{N}A_{2.1} = \{\tilde{A}^1_{2.1}, \tilde{A}^2_{2.1}, \tilde{A}^3_{2.1}, \tilde{A}^4_{2.1}\}$, де

$$\begin{gathered}\tilde{A}^1_{2.1} = \langle \partial_x, \quad \lambda_1 \partial_x + \lambda_2 \partial_y \rangle, \qquad \lambda_2 \neq 0, \quad \tilde{A}^2_{2.1} = \langle \partial_u, f(x, y)\partial_u \rangle, \\ \tilde{A}^3_{2.1} = \langle \partial_x, \lambda_1 \partial_x + \partial_u \rangle, \qquad \tilde{A}^4_{2.1} = \langle \partial_u, \partial_x \rangle.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Оскільки реалізації $\tilde{A}^3_{2.1}$ і $\tilde{A}^4_{2.1}$ ізоморфні, то

$$\mathfrak{D}A_{2.1} = \big\{\langle \partial_x, \partial_y \rangle;\ \langle \partial_x, \partial_u \rangle;\ \langle \partial_u, f(x, y)\partial_u \rangle,\ f \neq \mathrm{const}\big\}. \tag{2.7}$$

Для побудови реалізацій тривимірних алгебр Лі, які містять $A_{2.1}$ як ідеал, потрібно розглянути всі чотири нееквівалентні реалізації (2.6).

Алгебра $\boldsymbol{A_{3.1}}$. Ідеалом цієї алгебри є $A_{2.1} = \langle e_1, e_2 \rangle$. Тому для кожної реалізації (2.6) $\tilde{A}^i_{2.1}$, $i = 1, 2, 3, 4$, знаходимо оператор e_3 з умови, що він буде комутувати з іншими на нуль. В результаті отримаємо такий перелік нееквівалентних реалізацій:

$$\tilde{A}_{3.1}^1 = \langle \partial_x, \lambda_1\partial_x + \lambda_2\partial_y, \lambda_3\partial_x + \lambda_4\partial_y + \partial_u \rangle, \quad \lambda_2 \neq 0,$$

$$\tilde{A}_{3.1}^2 = \langle \partial_x, \lambda_1\partial_x + \partial_u, \lambda_3\partial_x + \lambda_4\partial_y \rangle, \quad \lambda_4 \neq 0,$$

$$\tilde{A}_{3.1}^3 = \langle \partial_x, \lambda_1\partial_x + \partial_u, \lambda_3\partial_x + f(y)\partial_u \rangle, \quad f'(y) \neq 0,$$

$$\tilde{A}_{3.1}^4 = \langle \partial_u, \partial_x, \lambda_3\partial_x + \lambda_4\partial_y \rangle, \quad \lambda_4 \neq 0,$$

$$\tilde{A}_{3.1}^5 = \langle \partial_u, \partial_x, \lambda_3\partial_x + f(y)\partial_u \rangle, \quad f'(y) \neq 0,$$

$$\tilde{A}_{3.1}^6 = \langle \partial_u, f(y)\partial_u, \partial_x \rangle, \quad f'(y) \neq 0,$$

$$\tilde{A}_{3.1}^7 = \langle \partial_u, f(x,y)\partial_u, g(x,y)\partial_u \rangle.$$

Нескладно переконатися, що для $\tilde{A}_{3.1}^3$ і $\tilde{A}_{3.1}^4$ реалізації їх ідеалів $A_{2.1} = \langle e_1, e_2 \rangle$ є ізоморфними, а самі вони — різними. Цей приклад ілюструє той факт, чому при розширенні реалізацій потрібно окремо розглядати випадки нееквівалентних реалізацій ідеалів, навіть якщо вони є ізоморфними.

Далі, оскільки реалізація $\tilde{A}_{3.1}^7$ не є допустимою, нескладно переконатися, що

$$\mathfrak{D}A_{3.1} = \big\{ \langle \partial_x, \partial_y, \partial_u \rangle;\ \langle \partial_x, \partial_u, f(y)\partial_u \rangle,\ f'(y) \neq 0 \big\}.$$

Вище ми встановили, що $\mathfrak{D}A_{2.1}$ збігається з множиною реалізацій (2.7). Нижче наведено перелік $A_{2.1}$-інваріантних рівнянь вигляду (1.1) і відповідних їм реалізацій алгебри $A_{2.1}$.

$A_{2.1}$-інваріантні рівняння:

1) $A_{2.1}^1 = \langle \partial_x, \partial_y \rangle \colon \Delta u = G(u, u_x, u_y)$,

2) $A_{2.1}^2 = \langle \partial_x, \partial_u \rangle \colon \Delta u = G(y, u_x, u_y)$,

3) $A_{2.1}^3 = \langle \partial_u, f(x,y)\partial_u \rangle \colon \Delta u = \dfrac{f_x u_x + f_y u_y}{f_x^2 + f_y^2}(f_{xx} + f_{yy}) + G(x, y, \omega)$, $\omega = f_y u_x - f_x u_y$, $f_x^2 + f_y^2 \neq 0$.

Аналогічні дослідження показують, що

$$\mathfrak{D}A_{2.2} = \big\{ \langle -x\partial_x - y\partial_y, \partial_x \rangle,\ \langle \partial_x - u\partial_u, \partial_u \rangle,\ \langle -u\partial_u, \partial_u \rangle \big\}.$$

Тому існують три нееквівалентних класи $A_{2.1}$-інваріантних рівнянь.

$A_{2.2}$-інваріантні рівняння:

1) $A_{2.2}^1 = \langle -x\partial_x - y\partial_y, \partial_x \rangle \colon \Delta u = (u_x^2 + u_y^2) G(u, \omega_1, \omega_2)$, $\omega_1 = y u_x$, $\omega_2 = y u_y$,

2) $A_{2.2}^2 = \langle \partial_x - u\partial_u, \partial_u \rangle \colon \Delta u = e^{-x} G(y, \omega_1, \omega_2)$, $\omega_1 = e^x u_x$, $\omega_2 = e^x u_y$,

3) $A_{2.2}^3 = \langle -u\partial_u, \partial_u \rangle \colon \Delta u = (u_x + u_y) G(x, y, \omega)$, $\omega = u_x u_y^{-1}$.

Тут і далі G означає довільну функцію своїх аргументів. Нескладно показати, що у випадку довільних значень функції G відповідні реалізації алгебр $A_{2.1}$ і $A_{2.2}$ є максимальними алгебрами інваріантності отриманих рівнянь.

3. Інваріантність відносно три- і чотиривимірних розв'язних алгебр Лі операторів симетрії. Як було зазначено вище, суттєвою особливістю розв'язних алгебр Лі є наявність у них композиційного ряду підалгебр. Це дає можливість для отримання реалізацій три- і чотиривимірних алгебр Лі в класі операторів (2.1) використати вже відомі реалізації двовимірних алгебр Лі.

3.1. Інваріантність відносно тривимірних алгебр Лі. Згідно з відомою класифікацією неізоморфних тривимірних розв'язних алгебр Лі [5], розрізняють дев'ять алгебр Лі $A_{3.i} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, $i = 1, \ldots, 9$. При цьому з визначальних комутаційних співвідношень випливає, що всі вони містять двовимірний комутативний ідеал $A_{2.1}$. Тому, згідно з алгоритмом і прикладом, який наведено вище для алгебри $A_{3.1}$, для решти восьми алгебр Лі потрібно виконати аналогічні обчислення, які приводять до такого результату. Для кожної алгебри $A_{3.i}$, $i = 1, 3, 4, 6, 7$, існують дві різні допустимі реалізації, для алгебр $A_{3.8}$ і $A_{3.9}$ — три, а для алгебр $A_{3.2}$, $A_{3.5}$ — чотири такі реалізації. Отже, всього існують 24 різні допустимі реалізації тривимірних розв'язних алгебр Лі.

Зазначимо, шо оператори деяких реалізацій містять довільну функцію і не спрощуються перетвореннями еквівалентності. Також реалізації алгебри $A_{3.7}$ містять параметр q, який параметризує саму алгебру, вірніше, серію алгебр.

Нижче наведено перелік рівнянь вигляду (1.1), максимальними алгебрами інваріантності яких є тривимірні алгебри Лі операторів симетрії. Тут, як і у випадку $A_{2.1}$-, $A_{2.2}$-інваріантних рівнянь, функція G є довільною функцією своїх аргументів з єдиною вимогою, щоб відповідні рівняння були суттєво нелінійними.

$A_{3.1}$-інваріантні рівняння:

1) $A^1_{3.1} = \langle \partial_x, \partial_y, \partial_u \rangle$: $\Delta u = G(u_x, u_y)$,

2) $A^2_{3.1} = \langle \partial_x, \partial_u, f(y)\partial_u \rangle$, $f'(y) \neq 0$: $\Delta u = \dfrac{f''}{f'} u_y + G(y, u_x)$.

$A_{3.2}$-інваріантні рівняння:

1) $A^1_{3.2} = \langle -x\partial_x - y\partial_y, \partial_x, \partial_u \rangle$: $\Delta u = u_x^2 G(yu_x, yu_y)$,

2) $A^2_{3.2} = \langle -u\partial_u, \partial_u, \partial_x \rangle$: $\Delta u = (u_x + u_y) G\left(y, \dfrac{u_x}{u_y}\right)$,

3) $A^3_{3.2} = \langle \partial_y - u\partial_u, \partial_u, \partial_x \rangle$: $\Delta u = (u_x + u_y) G\left(e^y u_x, e^y u_y\right)$,

4) $A^4_{3.2} = \langle \partial_x - u\partial_u, \partial_u, f(y)e^{-x}\partial_u \rangle$, $f(y) \neq 0$: $\Delta u = -\dfrac{f + f''}{f} u_x + {}$ $+ e^{-x} G(y, e^x f' u_x + e^x f u_y)$.

$A_{3.3}$-інваріантні рівняння:

1) $A^1_{3.3} = \langle \partial_u, \partial_x, \partial_y + x\partial_u \rangle$: $\Delta u = G(u_x - y, u_y)$,

2) $A^2_{3.3} = \langle \partial_u, \partial_x, (f(y) + x)\partial_u \rangle$: $\Delta u = f'' u_x + G(y, u_y - f' u_x)$.

$A_{3.4}$-інваріантні рівняння:

1) $A^1_{3.4} = \langle \partial_u, \partial_x, x\partial_x + y\partial_y + (u + x)\partial_u \rangle$: $\Delta u = e^{-u_x} G(u_y, ye^{-u_x})$,

2) $A^2_{3.4} = \langle \partial_u, (f(y) - x)\partial_u, \partial_x + u\partial_u \rangle$: $\Delta u = \dfrac{f' u_y - u_x}{1 + (f')^2} f'' + e^x G(y, f' e^{-x} u_x + {}$ $+ e^{-x} u_y)$.

$A_{3.5}$-інваріантні рівняння:

1) $A^1_{3.5} = \langle \partial_x, \partial_y, x\partial_x + y\partial_y \rangle$: $\Delta u = (u_x + u_y)^2 G\left(u, \dfrac{u_x}{u_y}\right)$,

2) $A^2_{3.5} = \langle \partial_x, \partial_y, x\partial_x + y\partial_y + \partial_u \rangle \colon \Delta u = e^{-2u} G\left(e^u u_x, \dfrac{u_x}{u_y} \right),$

3) $A^3_{3.5} = \langle \partial_x, \partial_u, x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u \rangle \colon \Delta u = y^{-1} G(u_x, u_y),$

4) $A^4_{3.5} = \langle \partial_u, f(y)\partial_u, \partial_x + u\partial_u \rangle,\ f' \neq 0 \colon \Delta u = \dfrac{u_y}{f'} f'' + e^x G(y, f' e^{-x} u_x).$

***$A_{3.6}$*-інваріантні рівняння:**

1) $A^1_{3.6} = \langle \partial_x, \partial_u, x\partial_x + y\partial_y - u\partial_u \rangle \colon \Delta u = y^{-3} G(y^2 u_x, y^2 u_y),$

2) $A^2_{3.6} = \langle \partial_u, e^{2x} f(y)\partial_u, \partial_x + u\partial_u \rangle,\ f(y) \neq 0 \colon \Delta u = \dfrac{2fu_x + f'u_y}{4f^2 + (f')^2}(f'' + 4f) +$
$+ e^x G(y, f' e^{-x} u_x - 2f e^{-x} u_y).$

***$A_{3.7}$*-інваріантні рівняння:**

1) $A^1_{3.7} = \langle \partial_x, \partial_u, x\partial_x + y\partial_y + qu\partial_u \rangle,\ q \neq 0, \pm 1 \colon \Delta u = y^{q-2} G(y^{1-q} u_x, y^{1-q} u_y),$

2) $A^2_{3.7} = \langle \partial_u, e^{(1-q)x} f(y)\partial_u, \partial_x + u\partial_u \rangle, 0 < |q| < 1 \colon \Delta u = \dfrac{(1-q) f u_x + f' u_y}{(1-q)^2 f^2 + (f')^2} \times$
$\times (f'' + f(1-q)^2) + e^x G(y, f' e^{-x} u_x + (q-1) f e^{-x} u_y).$

***$A_{3.8}$*-інваріантні рівняння:**

1) $A^1_{3.8} = \langle \partial_x, \partial_y, y\partial_x - x\partial_y \rangle \colon \Delta u = G(u, u_x^2 + u_y^2),$

2) $A^2_{3.8} = \langle \partial_x, \partial_y, y\partial_x - x\partial_y + \partial_u \rangle \colon \Delta u = G\left(u_x^2 + u_y^2, \operatorname{arctg}\left(\dfrac{u_x}{u_y}\right) - u \right),$

3) $A^3_{3.8} = \langle \partial_u, \operatorname{tg}(f(y) - x)\partial_u, \partial_x - u \operatorname{tg}(f(y) - x)\partial_u \rangle \colon \Delta u = \dfrac{f' u_y - u_x}{(f')^2 + 1} f'' +$
$+ 2(f' u_y - u_x) \operatorname{tg}(f - x) + (f' u_x + u_y) G(y, \cos(f - x)(f' u_x + u_y)).$

***$A_{3.9}$*-інваріантні рівняння:**

1) $A^1_{3.9} = \langle \partial_x, \partial_y, (qx + y)\partial_x + (qy - x)\partial_y \rangle,\ q > 0 \colon \Delta u = (u_x^2 + u_y^2) G\Big(u, \ln(u_x^2 +$
$+ u_y^2) + 2q \operatorname{arctg} \dfrac{u_x}{u_y} \Big),$

2) $A^2_{3.9} = \langle \partial_x, \partial_y, (qx + y)\partial_x + (qy - x)\partial_y + \partial_u \rangle,\ q > 0 \colon \Delta u =$
$= e^{-2qu} G\left(\operatorname{arctg}\left(\dfrac{u_x}{u_y}\right) - u, \ln(u_x^2 + u_y^2) + 2q \operatorname{arctg} \dfrac{u_x}{u_y} \right),$

3) $A^3_{3.9} = \langle \partial_u, \operatorname{tg}(f(y) - x)\partial_u, \partial_x + (q - \operatorname{tg}(f(y) - x)) u\partial_u \rangle,\ q > 0 \colon \Delta u =$
$= \dfrac{f' u_y - u_x}{(f')^2 + 1} f'' + 2(f' u_y - u_x) \operatorname{tg}(f - x) + (f' u_x + u_y) G(y, \cos(f - x)(f' u_x + u_y) e^{-qx}).$

Зауважимо, що у випадку $A^1_{3.7}$-інваріантного рівняння ми, за рахунок розширення області значень параметра q, звели два випадки реалізацій алгебри $A_{3.7}$ в один.

3.2. Інваріантність відносно чотиривимірних алгебр Лі. Згідно з класифікацією неізоморфних чотиривимірних розв'язних алгебр Лі [5], розрізняють по десять розкладних (в пряму суму алгебр Лі нижчих розмірностей) та нерозкладних алгебр Лі.

3.2.1. Інваріантність відносно розкладних алгебр. Побудова реалізацій розкладних алгебр Лі (окрім алгебри $A_{2.2} \oplus A_{2.2}$) вимагає простого розширення відомих різних реалізацій алгебр $A_{3.i}$, $i = 1, \ldots, 9$, ще одним оператором вигляду (2.1), який комутує з базисними операторами реалізацій алгебр $A_{3.i}$, $i = 1, \ldots, 9$, на нуль. Зупинимося на випадку алгебри $\tilde{A}_{4.1} = A_{3.1} \oplus A_1$.

Розширення множини базисних операторів реалізації $A^1_{3.1}$ приводить до такої реалізації алгебри $\tilde{A}_{4.1}$, в якій один базисний оператор є лінійною комбінацією решти. Розширення множини базисних операторів реалізації $A^2_{3.1}$ приводить до недопустимої реалізації алгебри $\tilde{A}_{4.1}$. Отже, серед рівнянь вигляду (1.1) немає $\tilde{A}_{4.1}$-інваріантних.

Для решти розкладних чотиривимірних розв'язних алгебр Лі існують інваріантні рівняння, які допускають їх реалізації в якості максимальних алгебр інваріантності. Нижче наведено відповідні класифікаційні результати.

Рівняння, інваріантні відносно $\tilde{A}_{4.2} = A_{3.2} \oplus A_1$:

1) $\tilde{A}^1_{4.2} = \langle -u\partial_u, \partial_u, \partial_x \rangle \oplus \langle \partial_y \rangle \colon \Delta u = (u_x + u_y) G\left(\dfrac{u_x}{u_y}\right)$,

2) $\tilde{A}^2_{4.2} = \langle \partial_y - u\partial_u, \partial_u, \partial_x \rangle \oplus \langle e^{-y}\partial_u \rangle \colon \Delta u = e^{-y} G(e^y u_x) - (u_x + u_y)$.

Рівняння, інваріантні відносно $\tilde{A}_{4.3} = A_{3.3} \oplus A_1$:

$\tilde{A}^1_{4.3} = \langle \partial_u, \partial_x, x\partial_u \rangle \oplus \langle \partial_y \rangle \colon \Delta u = G(u_y)$.

Рівняння, інваріантні відносно $\tilde{A}_{4.4} = A_{3.4} \oplus A_1$:

1) $\tilde{A}^1_{4.4} = \langle \partial_u, \partial_x, x\partial_x + y\partial_y + (u + x)\partial_u \rangle \oplus \langle y\partial_u \rangle \colon \Delta u = e^{-u_x} G(y e^{-u_x})$,

2) $\tilde{A}^2_{4.4} = \langle \partial_u, -x\partial_u, \partial_x + u\partial_u \rangle \oplus \langle \partial_y \rangle \colon \Delta u = e^x G(e^{-x} u_y)$.

Рівняння, інваріантні відносно $\tilde{A}_{4.5} = A_{3.5} \oplus A_1$:

1) $\tilde{A}^1_{4.5} = \langle \partial_x, \partial_y, x\partial_x + y\partial_y \rangle \oplus \langle \partial_u \rangle \colon \Delta u = (u_x + u_y)^2 G\left(\dfrac{u_x}{u_y}\right)$,

2) $\tilde{A}^2_{4.5} = \langle \partial_x, \partial_u, x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u \rangle \oplus \langle y\partial_u \rangle \colon \Delta u = y^{-1} G(u_x)$.

Рівняння, інваріантні відносно $\tilde{A}_{4.6} = A_{3.6} \oplus A_1$:

1) $\tilde{A}^1_{4.6} = \langle \partial_x, \partial_u, x\partial_x + y\partial_y - u\partial_u \rangle \oplus \langle y^{-1}\partial_u \rangle \colon \Delta u = -2y^{-1} u_y + y^{-3} G(y^2 u_x)$,

2) $\tilde{A}^2_{4.6} = \langle \partial_u, e^{2x}\partial_u, \partial_x + u\partial_u \rangle \oplus \langle \partial_y \rangle \colon \Delta u = 2u_x + e^x G(e^{-x} u_y)$.

Рівняння, інваріантні відносно $\tilde{A}_{4.7} = A_{3.7} \oplus A_1$:

1) $\tilde{A}^1_{4.7} = \langle \partial_x, \partial_u, x\partial_x + y\partial_y + qu\partial_u \rangle \oplus \langle y^q\partial_u \rangle$, $q \neq 0, \pm 1 \colon \Delta u = (q-1) y^{-1} u_y + y^{q-2} G(y^{1-q} u_x)$,

2) $\tilde{A}^2_{4.7} = \langle \partial_u, e^{(1-q)x}\partial_u, \partial_x + u\partial_u \rangle \oplus \langle \partial_y \rangle$, $0 < |q| < 1 \colon \Delta u = (1-q) u_x + e^x G(e^{-x} u_y)$.

Рівняння, інваріантні відносно $\tilde{A}_{4.8} = A_{3.8} \oplus A_1$:

1) $\tilde{A}^1_{4.8} = \langle \partial_x, \partial_y, y\partial_x - x\partial_y \rangle \oplus \langle \partial_u \rangle \colon \Delta u = G(u_x^2 + u_y^2)$,

2) $\tilde{A}^2_{4.8} = \langle \partial_u, -\operatorname{tg} x\partial_u, \partial_x + u\operatorname{tg} x\partial_u \rangle \oplus \langle \partial_y \rangle \colon \Delta u = 2u_x \operatorname{tg} x + u_y G(u_y \cos x)$.

Рівняння, інваріантні відносно $\tilde{A}_{4.9} = A_{3.9} \oplus A_1$:

1) $\tilde{A}^1_{4.9} = \langle \partial_x, \partial_y, (qx + y)\partial_x + (qy - x)\partial_y \rangle \oplus \langle \partial_u \rangle$, $q > 0 \colon \Delta u = (u_x^2 + u_y^2) G\left((u_x^2 + u_y^2)\exp\left(2q \operatorname{arctg} \dfrac{u_x}{u_y}\right)\right)$,

2) $\tilde{A}^2_{4.9} = \langle \partial_u, -\operatorname{tg} x\partial_u, \partial_x + u(q + \operatorname{tg} x)\partial_u \rangle \oplus \langle \partial_y \rangle$, $q > 0 \colon \Delta u = 2u_x \operatorname{tg} x + u_y G(u_y e^{-qx} \cos x)$.

Рівняння, інваріантні відносно $\tilde{A}_{4.10} = A_{2.2} \oplus A_{2.2}$:

1) $\tilde{A}^1_{4.10} = \langle -x\partial_x - y\partial_y, \partial_x \rangle \oplus \langle -u\partial_u, \partial_u \rangle \colon \Delta u = \dfrac{(u_x^2 + u_y^2)}{yu_x} G\left(\dfrac{u_x}{u_y}\right)$,

2) $\tilde{A}^2_{4.10} = \langle \partial_x - u\partial_u, \partial_u \rangle \oplus \left\langle \lambda_1 \partial_x + \lambda_2 \partial_y, e^{-x} e^{(1+\lambda_1)y/\lambda_2} \partial_u \right\rangle$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 \in \mathbb{R} \colon \Delta u = -\left(1 + \left(\dfrac{1+\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right) u_x + e^{-x} e^{\lambda_1 y/\lambda_2} G\left(e^x e^{-\lambda_1 y/\lambda_2}\left(\dfrac{1+\lambda_1}{\lambda_2} u_x + u_y\right)\right)$.

Зауважимо, що у випадку алгебри $\tilde{A}_{4.10}$ ми розширюємо нееквівалентні реалізації алгебри $A_{2.2}$ двома операторами вигляду (2.1), які задовольняють комутаційні співвідношення алгебри $A_{2.2}$.

3.2.2. Інваріантність відносно нерозкладних алгебр. Усі нерозкладні чотиривимірні розв'язні алгебри Лі є напівпрямою сумою деякої тривимірної розв'язної алгебри Лі й одновимірної алгебри Лі, тобто мають структуру $A_1 \Subset A_3$, де $A_1 = \langle e^4 \rangle$, $A_3 = \langle e^1, e^2, e^3 \rangle$. При цьому для алгебр $A_{4.i}$, $i = 1, \ldots, 6$, $A_{4.i} = A_1 \Subset A_{3.1}$, для алгебр $A_{4.i}$, $i = 7, 8, 9$, $A_{4.i} = A_1 \Subset A_{3.3}$, а $A_{4.10} = A_1 \Subset A_{3.5}$.

Використавши відомі нееквівалентні реалізації алгебр $A_{3.1}$, $A_{3.3}$, $A_{3.5}$, ми отримали повний перелік рівнянь вигляду (1.1), максимальними алгебрами інваріантності яких є чотиривимірні нерозкладні розв'язні алгебри Лі операторів симетрії.

$A_{4.1}$-інваріантні рівняння:

$$A^1_{4.1} = \langle \partial_y - xy\partial_u \rangle \Subset \langle \partial_u, -y\partial_u, \partial_x \rangle \colon \Delta u = G(y^2 + 2u_x).$$

$A_{4.2}$-інваріантні рівняння:

1) $A^1_{4.2} = \langle x\partial_x + y\partial_y + (u + y)\partial_u \rangle \Subset \langle \partial_x, \partial_u, \partial_y \rangle$, $q = 1 \colon \Delta u = e^{-u_y} G(u_x)$,

2) $A^2_{4.2} = \langle qx\partial_x + qy\partial_y + u\partial_u \rangle \Subset \langle \partial_x, \partial_u, -q^{-1} \ln y\partial_u \rangle$, $q \neq 0 \colon \Delta u = -\dfrac{u_y}{y} + \dfrac{u_x}{y} G\left(y^{(q-1)/q} u_x\right)$,

3) $A^3_{4.2} = \langle x\partial_x + y\partial_y + (qu + y^{q-1}x)\partial_u \rangle \Subset \langle \partial_u, y^{q-1}\partial_u, \partial_x \rangle$, $q \neq 0; 1 \colon \Delta u = \dfrac{q-2}{y} u_y + y^{q-2} G\left(u_x y^{1-q} - \ln y\right)$.

$A_{4.3}$-інваріантні рівняння:

1) $A^1_{4.3} = \langle x\partial_x + y\partial_y \rangle \Subset \langle \partial_x, \partial_u, -\ln y\partial_u \rangle \colon \Delta u = -\dfrac{u_y}{y} + u_x^2 G(yu_x)$,

2) $A^2_{4.3} = \langle \partial_y + (u + xe^y)\partial_u\rangle \Subset \langle \partial_u, e^y\partial_u, \partial_x\rangle\colon \Delta u = u_y + e^y G(e^{-y}u_x - y)$.

$A_{4.4}$-інваріантні рівняння:

$A^1_{4.4} = \langle x\partial_x + y\partial_y + (u - x\ln y)\partial_u\rangle\langle \partial_u, -\ln y\partial_u, \partial_x\rangle\colon \Delta u = -\dfrac{u_y}{y} + \dfrac{1}{y}G(2u_x + {}$ ${}+ \ln^2 y)$.

$A_{4.5}$-інваріантні рівняння:

1) $A^1_{4.5} = \langle x\partial_x + y\partial_y + pu\partial_u\rangle\langle \partial_x, \partial_y, \partial_u\rangle, p \neq 0; 1, q = 1\colon \Delta u = (u_x u_y)^r G\left(\dfrac{u_x}{u_y}\right)$, $r = \dfrac{p-2}{2(p-1)}$,

2) $A^2_{4.5} = \langle x\partial_x + y\partial_y + qu\partial_u\rangle\langle \partial_x, \partial_u, y^{q-p}\partial_u\rangle$, $-1 \le p < q \le 1$, $pq \neq 0\colon \Delta u =$ $= \dfrac{q-p-1}{y}u_y + y^{q-2}G\left(u_x y^{1-q}\right)$,

3) $A^3_{4.5} = \langle qx\partial_x + qy\partial_y + u\partial_u\rangle\langle \partial_u, \partial_x, y^{(1-p)/q}\partial_u\rangle$, $-1 \le p < 1$, $-1 \le q \le 1$, $pq \neq 0\colon \Delta u = \dfrac{1-q-p}{qy}u_y + y^{(1-2q)/q}G\left(u_x y^{(q-1)/q}\right)$.

$A_{4.6}$-інваріантні рівняння:

1) $A^1_{4.6} = \langle (px + y)\partial_x + (py - x)\partial_y + qu\partial_u\rangle\langle \partial_u, \partial_x, \partial_y\rangle$, $q \neq 0$, $p \ge 0\colon \Delta u =$ $= \exp\left((q - 2p)\operatorname{arctg}\dfrac{u_x}{u_y}\right) G\left((u_x^2 + u_y^2)\exp\left(2(p-q)\operatorname{arctg}\dfrac{u_x}{u_y}\right)\right)$,

2) $A^2_{4.6} = \langle qx\partial_x + qy\partial_y + (p + \operatorname{tg}(q^{-1}\ln y)u\partial_u\rangle\langle \partial_x, \partial_u, -\operatorname{tg}(q^{-1}\ln y)\partial_u\rangle$, $q \neq 0$, $p \ge 0\colon \Delta u = \left(\dfrac{2\operatorname{tg}(q^{-1}\ln y)}{qy} - \dfrac{1}{y}\right)u_y + \dfrac{1}{\cos(q^{-1}\ln y)y^{(2q-p)/q}}G\Big(u_x\cos(q^{-1}\ln y) \times$ $\times y^{(q-p)/q}\Big)$.

$A_{4.7}$-інваріантні рівняння:

$A^1_{4.7} = \langle x\partial_x + y\partial_y + \left(2u - \dfrac{x^2}{2} + \lambda xy\right)\partial_u\rangle\langle \partial_u, (\lambda y - x)\partial_u, \partial_x\rangle, \lambda \in \mathbb{R}\colon \Delta u =$ $= -\ln y + G\left(\dfrac{\lambda u_x + u_y}{y} - \lambda^2 \ln y\right)$.

$A_{4.8}$-інваріантні рівняння:

1) $A^1_{4.8} = \langle x\partial_x + y\partial_y + 2u\partial_u\rangle\langle \partial_u, \partial_x, \partial_y + x\partial_u\rangle$, $q = 1\colon \Delta u = G\left(\dfrac{u_x - y}{u_y}\right)$,

2) $A^2_{4.8} = \langle x\partial_x + y\partial_y + (1+q)u\partial_u\rangle\langle \partial_u, \partial_x, (\lambda y + x)\partial_u\rangle$, $|q| \le 1\colon \Delta u = y^{q-1} \times$ $\times G\big(y^{-q}(u_y - \lambda u_x)\big)$,

3) $A^3_{4.8} = \langle \partial_y + u\partial_u\rangle\langle \partial_u, -x\partial_u, \partial_x + \lambda\partial_y\rangle, q = 0\colon \Delta u = \exp(y - \lambda x)G(\exp(\lambda x -$ $- y)u_y)$,

4) $A^4_{4.8} = \langle qx\partial_x + qy\partial_y + (1+q)u\partial_u\rangle\langle \partial_u, (\lambda y - x)\partial_u, \partial_x\rangle$, $0 < |q| \le 1\colon \Delta u =$ $= y^{(1-q)/q}G\left(\dfrac{\lambda u_x + u_y}{y^{1/q}}\right)$.

***$A_{4.9}$*-інваріантні рівняння:**

$$A^1_{4.9}=\langle (qx+y)\partial_x+(qy-x)\partial_y+\left(2qu+\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}\right)\partial_u\rangle\langle\partial_u,\partial_x,\partial_y+x\partial_u\rangle\colon \Delta u = G\left(((u_x-y)^2+u_y^2)\exp\left(-2q\operatorname{arctg}\left(\frac{u_x-y}{u_y}\right)\right)\right),\ q\geq 0.$$

***$A_{4.10}$*-інваріантні рівняння:**

1) $A^1_{4.10}=\langle y\partial_x-x\partial_y+\partial_u\rangle\langle\partial_x,\partial_y,x\partial_x+y\partial_y\rangle\colon \Delta u=(u_x^2+u_y^2)G\left(\operatorname{arctg}\frac{u_x}{u_y}-u\right)$,

2) $A^2_{4.10}=\langle\lambda_1\partial_x+\lambda_2\partial_y+u\operatorname{tg}(\lambda_2^{-1}y)\partial_u\rangle\langle\partial_u,-\operatorname{tg}(\lambda_2^{-1}y)\partial_u,\partial_x+u\partial_u\rangle\colon \Delta u = 2\lambda_2^{-1}\operatorname{tg}(\lambda_2^{-1}y)u_y+u_xG(\exp(\lambda_1 y/\lambda_2-x)\cos(\lambda_2^{-1}y)u_x)$, $\lambda_2\neq 0$, $\lambda_1\in\mathbb{R}$,

3) $A^3_{4.10}=\langle y\partial_x-x\partial_y+\lambda\partial_u\rangle\langle\partial_x,\partial_y,x\partial_x+y\partial_y+\partial_u\rangle,\lambda\in\mathbb{R}\colon \Delta u=(u_x^2+u_y^2)G\left((u_x^2+u_y^2)e^{2u}\exp\left(-2\lambda\operatorname{arctg}\left(\frac{u_x}{u_y}\right)\right)\right)$.

4. Завершення групової класифікації. У третьому пункті статті ми отримали повний перелік суттєво нелінійних рівнянь вигляду (1.1), максимальними алгебрами інваріантності яких є чотиривимірні розв'язні алгебри Лі операторів симетрії. Усі отримані рівняння містять довільні функції, які залежать від однієї змінної. Це дає можливість для завершення групової класифікації рівнянь вигляду (1.1) використати класичний алгоритм Овсяннікова [7, 8]. Не наводячи тут досить громіздких і складних, але стандартних обчислень, зупинимося лише на деяких випадках рівнянь, які допускають чотиривимірні розв'язні алгебри інваріантності, й наведемо перелік рівнянь вигляду (1.1), які інваріантні відносно розв'язних алгебр Лі розмірностей вищих за чотири. При цьому ми виключаємо з переліку рівнянь ті, які еквівалентні рівнянням, що отримані в статті [1], а також рівняння, які еквівалентні рівнянням вигляду (1.2) або (1.3) (тобто не є суттєво нелінійними).

I. Зупинимося на випадку $A^2_{4.5}$-інваріантного рівняння. Далі, для спрощення, ми не будемо наводити аргументи у функціях-коефіцієнтах, які входять в оператор інваріантності (2.1), пам'ятаючи, що $a=a(x,y,u)$, $b=b(x,y,u)$, $c=c(x,y,u)$. Нижче дійсні сталі інтегрування позначимо як μ_i, $i=1,\ldots,8$.

Нехай $\omega=u_xy^{1-q}$. Розглядаємо змінні ω, u_y, u як незалежні й аналізуємо визначальні рівняння (2.2).

1. Збираючи коефіцієнти в класифікуючому рівнянні біля u_y^2, отримуємо $c_{uu}=0$. Звідси випливає, що $c=f(x,y)u+h(x,y)$.

2. Збираючи коефіцієнти біля u_y, отримуємо рівняння $y(p-q+1)a_x+2y^2\times f_y(x,y)-(p-q+1)b-ya_yG'(\omega)=0$. Якщо $a_y\neq 0$, то $G(\omega)$ — лінійна функція, й інваріантне рівняння буде лінійним. Тому покладаємо $a_y=0$ і, враховуючи перші два рівняння (2.2), отримуємо $a=\mu_1x+\mu_2$, $b=\mu_1y+\mu_3$, $f=\dfrac{\mu_3(q-p-1)}{2y}+h(x)$.

3. Збираючи коефіцієнти біля u, отримуємо рівняння $yf_y(x,y)(p-q+1)+y^2\Delta f-y'h'(x)G'(\omega)=0$, звідки випливає, що $h(x)=\mu_4$, $\mu_3(p-q+1)(q-p+1)=0$. Оскільки $q-p+1>q-q+1>0$, то $\mu_3(p-q+1)=0$.

4. Збираючи решту коефіцієнтів, одержуємо рівняння

$$yg_y(x,y)(p-q+1)+y^2\Delta g+[\mu_4y^q+2\mu_3y^{q-1}-(\mu_1y+\mu_3)qy^{q-1}]G(\omega)+$$

$$+\Big[-yg_x-\mu_4\omega y^q-\mu_3\omega y^{q-1}+(\mu_1 y+\mu_3)q\omega y^{q-1}\Big]G'(\omega)=0. \tag{4.1}$$

Диференціюючи це рівняння за змінною x, маємо $g_{xx}=0$, тобто $g(x,y)=xv(y)+$ $+w(y)$. Після підстановки цього співвідношення в (4.1) отримуємо $v(y)=\mu_5 y^{q-p}+$ $+\mu_6$. Далі, домноживши рівняння (4.1) на y^{1-q} і здиференціювавши його за змінними y і ω, одержимо рівняння

$$[\mu_5(p-2)y^{1-p}+\mu_6(q-2)y^{1-q}-\omega(\mu_4-\mu_1 q)]G''(\omega)=0.$$

Звідси випливає, що $\mu_4=\mu_1 q$, $\mu_5=\mu_6=0$. Тоді (4.1) набирає вигляду

$$y(p-q+1)w'(y)+y^2w''(y)+\mu_3(2-q)y^{q-1}G-\mu_3(1-q)y^{q-1}\omega G'=0.$$

Якщо $\mu_3=0$, то розширень чотиривимірної алгебри не існує. Отже, $(p-q+1)=0$, звідки випливає, що $0<q<1$. Тоді

$$\frac{y^2w''(y)}{y^{q-1}}=\lambda=\mu_3\Lambda=\mathrm{const}.$$

Тому

$$G(\omega)=K\omega^{(2-q)/(1-q)}+\frac{\Lambda}{q-2},\qquad w(y)=\frac{\mu_3\Lambda y^{q-1}}{(2-q)(1-q)}+\mu_7 y+\mu_8.$$

Покладаючи вище в усіх виразах $\mu_3=1$, а $\mu_i=0$, $i\neq 3$, отримуємо додатковий оператор симетрії $e_5=\partial_y+\dfrac{\Lambda y^{q-1}}{(2-q)(1-q)}\partial_u$. Позначаючи $L=\dfrac{\Lambda}{(2-q)(1-q)}$, маємо $e_5=\partial_y+Ly^{q-1}\partial_u$, $G(\omega)=K\omega^{(2-q)/(1-q)}+(q-1)L$. Якщо виконати заміну $u=v+L\dfrac{y^q}{q}$, то реалізація, яку утворюють оператори з $A^2_{4.5}$, трансформується в ізоморфну, а в операторі e_5 $L=0$. Масштабними перетвореннями коефіцієнт K можна звести до 1, тому, враховуючи умову $(p-q+1)=0$, знаходимо

$$\Delta u=u_x^{(2-q)/(1-q)},\qquad e_5=\partial_y,\quad 0<q<1.$$

II. Розглянемо далі випадок $A^3_{4.10}$-інваріантного рівняння. Нехай незалежні змінні u, u_x, u_y пов'язані співвідношеннями

$$u_x=\mu u_y=\pm\mu\sqrt{\frac{t}{s(1+\mu^2)}},\qquad s=\exp(2u-2\lambda\,\mathrm{arctg}\,\mu), \tag{4.2}$$

де $\mu\in\mathbb{R}$ є довільним параметром, а змінні t і u розглядаються як незалежні.

Тоді в $A^3_{4.10}$-інваріантному рівнянні $G(\omega)=G(t)$. Підставляючи в класифікуюче рівняння замість u_x, u_y праву частину співвідношення (4.2) спочатку зі знаком $+$, а потім зі знаком $-$, отримуємо систему двох таких рівнянь:

$$\begin{gathered}tc_{uu}+s\Delta c-tc_uG(t)+2t^2[\lambda a_y-c_u+a_x-c]G'(t)=0,\\(\mu c_x+c_y)_u-(\mu c_x+c_y)G(t)-t[\mu c_x+c_y-\lambda c_x+\lambda\mu c_y)]G'(t)=0.\end{gathered} \tag{4.3}$$

Поклавши $u_x=-\mu u_y=\mp\mu e^{-2u}\sqrt{\dfrac{st}{(1+\mu^2)}}$, одержимо таку пару рівнянь:

$$\begin{aligned} &tc_{uu} + s^{-1}e^{-4u}\Delta c - tc_u G(t) + 2t^2[\lambda a_y - c_u + a_x - c]G'(t) = 0, \\ &(c_y - \mu c_x)_u - (c_y - \mu c_x)G(t) + t[\mu c_x - c_y + \lambda c_x + \lambda\mu c_y)]G'(t) = 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

З перших рівнянь (4.3) і (4.4) випливає

$$c_{uu} - c_u G(t) + 2t[\lambda a_y - c_u + a_x - c]G'(t) = 0, \quad \Delta c = 0, \tag{4.5}$$

а з других рівнянь (4.3) і (4.4) — система

$$\begin{aligned} &c_{yu} - c_y G(t) + t(\lambda c_x - c_y)G'(t) = 0, \\ &c_{xu} - c_x G(t) - t(c_x + \lambda c_y)G'(t) = 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

З цих рівнянь, диференціюючи за змінною t, отримуємо систему

$$\begin{aligned} &(\lambda c_x - 2c_y)G'(t) + t(\lambda c_x - c_y)G''(t) = 0, \\ &-(2c_x + \lambda c_y)G'(t) - t(c_x + \lambda c_y)G''(t) = 0. \end{aligned}$$

А. Нехай $\lambda \neq 0$. Визначник системи (відносно невідомих $G'(t)$ і $G''(t)$) дорівнює нулю: $\lambda t(c_x^2 + c_y^2) = 0$ (в супротивному випадку $G(t) = \mathrm{const}$, і тоді рівняння вигляду (1.1) не буде суттєво нелінійним). Отже, $c = c(u)$. Тепер, якщо $c_u = 0$, то з (4.5) випливає, що $\lambda a_y + a_x = c = \mathrm{const}$, а тому розширень алгебри симетрії не буде й, отже, $c_u \neq 0$. Якщо $\lambda a_y - c_u + a_x - c = 0$, то з (4.5) випливає, що $G(t) = \mathrm{const}$. Тому, покладаючи $h(x, y, u) = 2(\lambda a_y - c_u + a_x - c) \neq 0$, отримуємо $G(t) = Kt^L + M$, де $L = \dfrac{c_u}{h} = \mathrm{const} \neq 0$, $M = \dfrac{c_{uu}}{c_u} = \mathrm{const}$. Звідси випливає $c = \mu_1 e^{Mu} + \mu_2$, $\dfrac{\mu_1 M e^{Mu}}{2(\lambda a_y - \mu_1 M e^{Mu} + a_x - \mu_1 e^{Mu} - \mu_2)} = L \neq 0$. Якщо $M = -1$, то ліва частина останньої рівності не може бути сталою величиною, а тому

$$\lambda a_y + a_x = \mu_2, \qquad L = -\frac{M}{2(M+1)} \neq -\frac{1}{2},$$

й, отже,

$$a = \mu_2 x + \mu_3(\lambda x - y) + \mu_4, \qquad b = \mu_2 y + \mu_3(\lambda y + x) + \mu_5,$$

$G(t) = Kt^{-M/2(M+1)} + M$, а додатковий оператор має вигляд $e_5 = e^{Mu}\partial_u$. Використовуючи перетворення $v = e^{-Mu}$, знаходимо

$$\begin{aligned} &e_3 = x\partial_x + y\partial_y + \partial_u \to x\partial_x + y\partial_y - Mv\partial_v, \quad M = -\frac{2L}{1+2L}, \\ &e_4 = y\partial_x - x\partial_y + \lambda\partial_u \to y\partial_x - x\partial_y - \lambda Mv\partial_v, \qquad e_5 = e^{Mu} \to \partial_v, \end{aligned}$$

а відповідне інваріантне рівняння (1.1) набере вигляду

$$\Delta v = \tilde{K}(v_x^2 + v_y^2)\left[(v_x^2 + v_y^2)\exp\left(-2\lambda \operatorname{arctg}\left(\frac{v_x}{v_y}\right)\right)\right]^L, \quad L \neq -\frac{1}{2}.$$

За допомогою перетворень еквівалентності з групи $\mathcal{E}$ константу $\tilde{K}$ можна покласти рівною 1.

Зазначимо, що при $L = -\dfrac{1}{2}$ останнє рівняння збігається з рівнянням, яке було отримане при проведенні розширення реалізації $\tilde{A}^1_{4.2}$.

Б. Нехай $\lambda = 0$. Доведемо, що $c_x = c_y = 0$. Якщо $c_y \neq 0$, то з (4.6) отримуємо

$$G = Kt^{-1} + M, \qquad M = \frac{c_{yu}}{c_y}, \quad K \neq 0.$$

Підстановка цього співвідношення в (4.5) приводить до рівностей

$$2a_x - c_u - 2c = 0, \qquad c_{uu} - Mc_u = 0.$$

Якщо $M = 0$, то рівняння (1.1) має вигляд $\Delta u = e^{-2u}$ і зводиться до лінійного рівняння. Тому $M \neq 0$. З отриманої системи випливає

$$c = h(x,y)e^{Mu} + g(x,y), \qquad a_x = g(x,y), \quad h(x,y)(M+2) = 0.$$

Якщо $M = -2$, то заміною змінних $u = \dfrac{1}{2}\ln v$ відповідне рівняння вигляду (1.1) зводиться до рівняння $\Delta v = 2Kv$, яке є лінійним. Отже, $h(x,y) = 0$, а тому $c = g(x,y)$, звідки $M = \dfrac{c_{yu}}{c_y} = 0$. Це суперечить умові $M \neq 0$. Отже, $c_x = c_y = 0$, й інваріантних рівнянь у цьому випадку не буде.

III. Зазначимо також, що дослідження $\tilde{A}^1_{4.10}$-інваріантного рівняння приводить до рівняння

$$\Delta u = \lambda y^{-1}\sqrt{u_x^2 + u_y^2},$$

яке є інваріантним відносно реалізації

$$\langle -u\partial_u, \partial_u \rangle \oplus \langle 2x\partial_x + 2y\partial_y, -(x^2 - y^2)\partial_x - 2xy\partial_y + y\partial_u, \partial_x \rangle$$

алгебри $A_{2.2} \oplus \mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$. Це рівняння було отримано в статті [1].

Провівши аналогічні дослідження усіх рівнянь, інваріантних відносно чотиривимірних розв'язних алгебр Лі операторів симетрії, ми отримали одинадцять нееквівалентних класів рівнянь вигляду (1.1), які допускають максимальні п'ятивимірні розв'язні алгебри Лі операторів симетрії. В таблиці наведено перелік відповідних канонічних рівнянь отриманих класів, а також реалізацій їх алгебр інваріантності (тут використано відомі [2 – 4] позначення цих алгебр).

5. Висновки. Підсумовуючи результати досліджень групової класифікації рівнянь вигляду (1.1), можемо відзначити наступне.

1. З точністю до перетворень еквівалентності, які визначаються групою дифеоморфізмів (2.3), існують 42 класи нееквівалентних рівнянь, які допускають максимальні чотиривимірні алгебри Лі операторів симетрії. При цьому ці рівняння містять довільні функції однієї змінної. Наявність цих функцій у рівняннях викликає інтерес до подальшого їх дослідження щодо наявності некласичних (наприклад, умовних) симетрій (див., наприклад, [9 – 12]).

2. Серед суттєво нелінійних рівнянь вигляду (1.1) лише 13 рівнянь допускають максимальні п'ятивимірні алгебри інваріантності, при цьому одинадцять із них є розв'язними алгебрами Лі, а дві — мають нетривіальний розклад Леві (див. [1]).

3. В принципі можуть існувати різні розширення групи еквівалентності, відносно яких деякі із знайдених рівнянь будут попарно еквівалентними. Однак, враховуючи велику кількість таких рівнянь, пошук таких розширень групи еквівалентності можна розглядати як окрему задачу.

Рівняння вигляду (1.1) з найвищими симетрійними властивостями

№	Рівняння	Реалізації ідеалів	Додатковий оператор e_5	Тип алгебри
1	$\Delta u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \exp\left(-q \operatorname{arctg} \frac{u_x}{u_y}\right)$	$\tilde{A}_{4.2}^1$	$(qx+y)\partial_x + (qy-x)\partial_y$	$A_{3.9} \oplus A_{2.2}$, $q > 0$
2	$\Delta u = \exp(u_y)$	$\tilde{A}_{4.3}^1$	$x\partial_x + y\partial_y + (u-y)\partial_u$	$A_{5.20}$, $p = 0$
3	$\Delta u = \ln(u_y)$	$\tilde{A}_{4.3}^1$	$x\partial_x + y\partial_y + \left(2u + \frac{x^2}{2}\right)\partial_u$	$A_{5.23}$, $p = 1$
4	$\Delta u = u_y^{\frac{p-1}{p}}$	$\tilde{A}_{4.3}^1$	$x\partial_x + y\partial_y + (p+1)u\partial_u$	$A_{5.19}$, $q = 1$, $p \neq 0; 1$
5	$\Delta u = (u_x^2 + u_y^2) \exp\left(-q \operatorname{arctg} \frac{u_x}{u_y}\right)$	$\tilde{A}_{4.5}^1$	$y\partial_x - x\partial_y + qu\partial_u$	$A_{5.35}$, $p = 0$, $q \neq 0$
6	$\Delta u = yu_x^2 - 2y^{-1}u_y$	$\tilde{A}_{4.6}^1$	$\partial_y - \frac{u}{y}\partial_u$	$A_{5.19}$, $p = q = -1$
7	$\Delta u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$	$\tilde{A}_{4.8}^1$	$u\partial_u$	$A_{3.8} \oplus A_{2.2}$
8	$\Delta u = (u_x^2 + u_y^2)^{(2-p)/2(1-p)}$	$\tilde{A}_{4.8}^1$	$x\partial_x + y\partial_y + pu\partial_u$	$A_{5.35}$, $q = 0$, $p \neq 0; 1$
9	$\Delta u = (u_x^2 + u_y^2)^{(2-p)/2(1-p)} \exp\left(\frac{qp}{1-p} \operatorname{arctg} \frac{u_x}{u_y}\right)$	$\tilde{A}_{4.9}^1$	$x\partial_x + y\partial_y + pu\partial_u$	$A_{5.35}$, $\tilde{q} = -pq$, $p \neq 0; 1$, $q > 0$
10	$\Delta u = \lambda\sqrt{2u_x \mp y^2}$	$A_{4.5}^3$	$\partial_y \pm xy\partial_u$	$A_{5.30}$, $p = 1$
11	$\Delta u = (\lambda u_x + u_y)^{1/2} + py$	$A_{4.8}^4$	$\partial_y + \frac{p}{2(1+\lambda^2)}(\lambda y - x)^2\partial_u$	$A_{5.30}$, $p = 1$

4. Відомо (див., наприклад, [13]), що повний груповий аналіз диференціального рівняння передбачає, окрім вивчення його симетрійних властивостей, побудову інваріантних та частково інваріантних розв'язків, зокрема таких, що задовольняють додаткові крайові чи інші умови. Тому у подальшому було б цікавим і корисним використати результати групової класифікації рівнянь вигляду (1.1) для побудови саме таких розв'язків.

1. *Лагно В. І., Спічак С. В.* Групова класифікація квазілінійних рівнянь еліптичного типу. І. Інваріантність відносно алгебр Лі з нетривіальним розкладом Леві // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 11. – С. 1532 – 1545.
2. *Zhdanov R. Z., Lahno V. I.* Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source // J. Phys. A: Math. and Gen. – 1999. – **32**. – P. 7405 – 7418.
3. *Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R.* The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations // Acta Appl. Math. – 2001. – **69**. – P. 43 – 94.
4. *Лагно В. И., Спичак С. В., Стогний В. И.* Симметрийный анализ уравнений эволюционного типа. – М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2004. – 392 с.
5. *Мубаракзянов Г. М.* О разрешимых алгебрах Ли // Изв. вузов. Математика. – 1963. – № 1(32). – С. 114 – 123.
6. *Мубаракзянов Г. М.* Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка // Там же. –1963. – № 3(34). – С. 99 – 106.
7. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР. – 1959. – **125**, № 3. – С. 492 – 495.
8. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
9. *Ахатов И. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.* Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Современные проблемы математики. Новейшие достижения / Итоги науки и техники. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1989. – **34**. – С. 3 – 83.
10. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 336 с.
11. *Fushchich W., Shtelen W., Serov N.* Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. – 436 p.
12. *Fushchych W. I., Tsyfra I. M.* On a reduction and solutions of the nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math. and Gen. – 1987. – **20**. – P. L45 – L48.
13. *Воробьев Е. М., Игнатович Н. В.* Групповой анализ краевой задачи для уравнений ламинарного пограничного слоя // Мат. моделирование. – 1991. – **3**, № 11. – С. 116 – 123.

Одержано 09.11.09,
після доопрацювання — 16.09.10