УДК 517.946

П. И. Штабалюк

Почти периодические решения квазилинейной системы дифференциальных уравнений с частными производными

В работах [1, 2] получены условия существования и единственности периодических решений линейных систем дифференциальных уравнений с частными производными с постоянными коэффициентами. В [3] с помощью обобщенной теоремы об обратной функции установлено существование периодических решений для некоторых нелинейных систем первого порядка. Для уравнений высшего порядка этот метод обобщен в работе [4].

В данной статье часть упомянутых результатов удалось перенести на почти периодический случай для квазилинейной системы дифференциальных уравнений с малым параметром.

1. Пусть V^r $(r \in N)$ — замыкание множества тригонометрических многочленов, почти периодических по каждому x_l, $l=\overline{0, p}$ по норме $\|v\|^2{}_{V^r}= =\lim\limits_{r\to\infty} 1/(2T)^{p+1}\int\limits_{K_T} v(1-\Delta)^r v dx$, где $x=(x_0, \ldots, x_p)$, $\Delta=\sum\limits_{l=0}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}$, $K_T= =\{x: -T\leqslant x_l\leqslant T,\ l=\overline{0, p}\}$. По разложению функции v в ряд Фурье $v=\sum\limits_{k\in Z^{p+1}} v_k \exp(i(\lambda_k, x))$, где $\lambda_k=(\lambda_{k_0}, \ldots, \lambda_{k_p})$, пространства V^r можно определить для произвольного действительного r $\|v\|^2{}_{V^r}=\sum\limits_{k\in Z^{p+1}}(1+\|\lambda_k\|^2)^r\times \times|v_k|^2$, где $\|\lambda_k\|^2=\sum\limits_{l=0}^{p}\lambda_{k_l}^2$. Через $\bar{V}^r$ обозначим пространство вектор-функций $v=(v_1, \ldots, v_m)$ таких, что $v_j\in V^r$, $j=\overline{1, m}$, и $\|v\|^2_{\bar{V}^r}=\|v\|^2_r= =\sum\limits_{l=1}^{m}\|v_l\|^2_{V^r}$.

Отметим свойства пространств $\bar{V}^r$, которые будут использованы в дальнейшем:

$$\forall v\in\bar{V}^r \quad \|v\|_\rho\leqslant\|v\|_r \text{ при } \rho<r, \tag{1}$$

$$\forall v\in\bar{V}^r \quad \|v\|_r\leqslant\|v\|^\alpha_{r_1}\|v\|^\beta_{r_2}, \tag{2}$$

где $r=\alpha r_1+\beta r_2$ и $\alpha+\beta=1$.

2. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^{n_j}u_j(x)}{\partial x_0^{n_j}}+\sum_{\substack{r=\overline{1,m};\, s_0<n_j\\ |s|\leqslant Q}} a_s^{jr}\frac{\partial^{|s|}u_r(x)}{\partial x_0^{s_0}\ldots\partial x_p^{s_p}}+\varepsilon F_j(u)=f_j(x), \tag{3}$$

где $u=(u_1, \ldots, u_m)$, $|s|=\sum\limits_{l=0}^{p}s_l$; $a_s^{jr}=\text{const}$, $\sum\limits_{j=1}^{m}n_j=n$, ε — малый параметр, $F_j \in C^{4Q+1}(R^m)$; $\left| \dfrac{\partial^{|i|} F_j(u)}{\partial u_1^{i_1} \ldots \partial u_m^{i_m}} \right| \leqslant B$, $|i| = 0, \overline{4Q+1}$. Ставится задача об отыскании решения системы (3) в шкале пространств $\bar{V}^s$.

Рассмотрим случай $\varepsilon = 0$. При этом система (3) окажется линейной:

$$\frac{\partial^{n_j} u_j(x)}{\partial x_0^{n_j}} + \sum_{\substack{r=\overline{1,m}, s_0<n_j, \\ |s|\leqslant Q}} a_s^{jr} \frac{\partial^{|s|} u_r(x)}{\partial x_0^{s_0} \ldots \partial x_p^{s_p}} = f_j(x). \tag{3'}$$

Пусть $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ разлагается ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k \in Z^{p+1}} f_k \exp(i(\lambda_k, x)), \tag{4}$$

и множество ее спектральных значений $M = \{(\lambda_{k_0}, \ldots, \lambda_{k_p})\} = \{(b_0 \mu_{k_0}, \ldots \ldots, b_p \mu_{k_p})\}$ удовлетворяет условию

$$\| \mu_k \| \geqslant d \| k \|^{\sigma}, \quad \mu_{k_0} \neq 0, \tag{5}$$

где $d > 0$, $\sigma > 0$, $b = (b_0, \ldots, b_p)$ — вектор с положительными компонентами.

Почти периодическое решение системы (3′) ищем в виде ряда

$$u(x) = \sum_{k \in Z^{p+1}} u_k \exp\left(i \sum_{l=0}^{p} b_l \mu_{k_l} x_l \right). \tag{6}$$

Подставляя (4) и (6) в (3′), для определения коэффициентов u_{jk} получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$(ib_0 \mu_{k_0})^{n_j} u_{jk} + \sum_{\substack{l=\overline{1,m}, s_0<n_j \\ |s|\leqslant Q}} a_s^{jl} \prod_{r=0}^{p} (ib_r \mu_{k_r})^{s_r} u_{lk} = f_{jk}, \quad j = \overline{1, m}. \tag{7}$$

Главный определитель системы (7) имеет вид

$$\Delta(a, b, k) = \det \left\| (ib_0 \mu_{k_0})^{n_j} \delta_{jl} + \sum_{|s|\leqslant Q, s_0<n_j} a_s^{jl} \prod_{r=0}^{p} (ib_r \mu_{k_r})^{s_r} \right\|. \tag{8}$$

Теорема 1. *Почти периодическое решение системы (3′) со спектром M единственно тогда и только тогда, когда*

$$\forall k \in Z^{p+1} \quad \Delta(a, b; k) \neq 0. \tag{9}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 из [2].

3. В предположении, что условие (9) выполнено, по правилу Крамера находим решение системы (7)

$$u_{jk} = \frac{1}{\Delta(a, b; k)} \sum_{l=1}^{m} (-1)^{j+l} \det_{\substack{q,h=\overline{1,m} \\ q\neq j, h\neq l}} \left\| (ib_0 \mu_{k_0})^{n_q} \delta_{qh} + \right.$$

$$\left. + \sum_{|s|\leqslant Q, s_0<n_q} a_s^{qh} \prod_{r=0}^{p} (ib_r \mu_{k_r})^{s_r} \right\| f_{lk} = \sum_{l=1}^{m} \frac{\Delta_{jl}(a, b; k)}{\Delta(a, b; k)} f_{lk}. \tag{10}$$

Для доказательства существования решения $u(x) \in \bar{V}^s$ системы (3′) нужно исследовать сходимость по норме $\bar{V}^s$ ряда (6) с коэффициентами (10).

Теорема 2. *Пусть существуют $\gamma > 0$ и $C_1 > 0$ такие, что*

$$|\Delta(a, b; k)| \geqslant C_1 (1 + \| k \|^2)^{-\gamma/2}. \tag{11}$$

Тогда при всех $f(x)\in\overline{V}^r$, *где* $r=s+mQ+\gamma/\sigma$, *существует решение* $u(x)\in\overline{V}^s$ *системы* (3′), *представимое в виде ряда* (6).

Доказательство. Из (10) легко показать, что

$$|\Delta_{jl}(a, b; k)|\leqslant C_2(1+\|\lambda_k\|^2)^{mQ/2}. \tag{12}$$

Из условия (11), учитывая (5), получаем оценку

$$|\Delta(a, b; k)|\geqslant C_3(1+\|\lambda_k\|^2)^{-\gamma/2\sigma}. \tag{13}$$

Из сходимости рядов $\sum\limits_{k\in Z^{p+1}}(1+\|\lambda_k\|^2)^r|f_{jk}|^2$, $j=\overline{1, m}$, учитывая (12) и (13), получаем сходимость рядов

$$\sum_{k\in Z^{p+1}}(1+\|\lambda_k\|^2)^s\left|\sum_{l=1}^{m}\frac{\Delta_{jl}(a, b; k)}{\Delta(a, b; k)}f_{lk}\right|^2,\quad j=\overline{1, m},$$

при $s=r-mQ-\gamma/\sigma$, что и требовалось доказать.

Выясним условия, при которых выполняется оценка (11).

Теорема 3. *При* $\gamma=n(p+1+\delta)$, $\delta>0$, *оценка (11) верна для почти всех (в смысле меры Лебега в* R^{p+1}) *векторов* b *с положительными компонентами.*

Доказательство. Пусть вектор $b'=(b_1, \ldots, b_p)$—фиксированный. Дифференцируя (8) по b_0 n раз, получаем $\left|\dfrac{d^n\Delta(a, b; k)}{db_0^n}\right|=n!\,|\mu_{k_0}|>0$. Тогда согласно лемме 1 из [5] мера тех b_0, для которых выполняется неравенство, противоположное (11), не будет превышать

$$C_4(1+\|k\|^2)^{-\gamma/2n} \tag{14}$$

при каждом фиксированном k.

Интегрируя (14) по некоторому параллелепипеду переменных $b_1, \ldots, b_p$, получаем аналогичную оценку для векторов b:

$$\operatorname{mes}\{b:|\Delta(a, b; k)<C_1(1+\|k\|^2)^{-\gamma/2}\}\leqslant C_5(1+\|k\|^2)^{-\gamma/2n}. \tag{15}$$

Из сходимости ряда $\sum\limits_{k\in Z^{p+1}}(1+\|k\|^2)^{-\gamma/2n}$ и из леммы Бореля—Кантелли [5] следует, что мера тех b, при которых (15) выполняется для бесконечного набора $(\lambda_{k_0}, \ldots, \lambda_{k_p})\in M$, равна нулю, что и завершает доказательство.

4. Вернемся к системе (3), которую можно переписать в виде

$$Lu+\varepsilon F(u)=f. \tag{3″}$$

Для доказательства существования почти периодического решения системы (3″) нам понадобится понятие приближенного решения уравнения.

Согласно приведенному в [3] определению уравнение порядка Q $Lv=g$, где $L:\overline{V}^s\to\overline{V}^r$, $0\leqslant r<s$, имеет приближенное решение с порядком потери μ, если существует постоянная K такая, что $\forall H>1$ $\exists\omega_H\in\overline{V}^s$ и

$$\|\omega_H\|_s\leqslant KH^Q,\quad\|L\omega_H-g\|_0\leqslant cKH^{-\mu}. \tag{16}$$

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия:* 1) $\exists c_0>0$ *такое, что* $\forall v\in V^0$

$$(Lv, v)_0\geqslant c_0\|v\|_0^2; \tag{17}$$

2) *производная Фрэше оператора* F *ограничена, т. е.* $\exists B_1>0$ *такое, что*

$$\forall v\in\overline{V}^s\quad\|F'(u)v\|_s\leqslant B_1\|v\|_s. \tag{18}$$

3) $$f(x)\in\overline{V}^r,\quad\text{где}\quad r=(m+1)Q+n(p+1+\delta)/\sigma+1. \tag{19}$$

Тогда $\exists \varepsilon_0 > 0$ *такое, что* $\forall\, \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ *и для почти всех* $b = (b_0, \dots, b_p)$ *существует* $w \in \overline{V}^Q$, *удовлетворяющая системе* (3″).

Доказательство. Применим к системе (3″) теорему Нэша—Мозера об обратной функции [3, 6]. Для этого, во-первых, покажем существование функции w_0, почти удовлетворяющей системе (3″), а, во-вторых, проверим, что линеаризированная система $Lv + \varepsilon F'(u)v = g$ имеет приближенное решение с порядком потери $\mu = 4$.

Как следует из теорем 2, 3 и условия (19), для почти всех векторов b существует вектор-функция $w_0 \in \overline{V}^{5Q+1}$ такая, что

$$Lw_0 + \varepsilon F(w_0) = f + \varepsilon F(w_0). \tag{20}$$

Из равенства (20), учитывая (17), можно заключить, что при достаточно малых ε функция w_0 близка по норме к искомому решению.

Из условий (17) и (18) вытекает, что при малых ε найдется константа $c_1 > 0$ такая, что

$$(Gv, v)_0 \geqslant C_1 \| v \|_0^2, \tag{21}$$

где $G = L + \varepsilon F'(u)$.

Так как коэффициенты оператора L постоянны, а производные от функций F_j ограничены, верна оценка

$$\| v \|_s^2 \leqslant c_2 ((Gv, v)_s + K_1^2 \| v \|_0^2). \tag{22}$$

Наряду с уравнением $Gv = g$ рассмотрим возмущенное уравнение

$$G_h v \equiv h^{2\alpha} (1 - \Delta)^\alpha v + Gv = g, \tag{23}$$

где $0 < h < 1$ и $Q < 2\alpha \leqslant r = 4Q + 1$.

Система (23) эллиптическая и при условии (21) имеет единственное почти периодическое решение w_h [7]. Покажем, что множество функций w_h, $0 < h < 1$, удовлетворяет определению 1 для уравнения $Gv = g$. Применяя к w_h оценку (21), получаем $h^{2\alpha} \| w_h \|_\alpha^2 + c_1 \| w_h \|_0^2 \leqslant (G_h w_h, w_h)_0 = (g, w_h)_0$, $c_1 \| w_h \|_0 \leqslant \| g \|_0$.

Аналогично для старших производных имеем $h^{2\alpha} \| w_h \|_{\alpha+r}^2 + \| w_h \|_r^2 \leqslant \leqslant c_2 ((G_h w_h, w_h)_r + K_1^2 \| w_h \|_0^2) \leqslant 0{,}5 (\| w_h \|_r^2 + c_2^2 \| g \|_r^2 + c_2 K_1^2 \| w_h \|_0^2$. Следовательно, $h^{2\alpha} \| w_h \|_{\alpha+r}^2 + 0{,}5 \| w_h \|_\alpha^2 \leqslant 0{,}5 C_2^2 K^2 + c_2/c_1 K_1^2 \leqslant 0{,}5 c_3^2 K^2$, считая, что $K \geqslant K_1$, $K \geqslant \| g \|_r$.

Таким образом, $\| w_h \|_{\alpha+r} \leqslant c_3 h^{-\alpha} K$, $\| w_h \|_r \leqslant c_3 K$. А поскольку $s = r + Q \leqslant r + \alpha$, то учитывая (2), имеем

$$\| w_h \|_s \leqslant c_3 h^{-\alpha} K. \tag{24}$$

Из (1) и (24) следует, что $\| (1 - \Delta)^\alpha w_h \|_0 = \| w_h \|_{2\alpha} \leqslant \| w_h \|_r \leqslant c_3 K$. Значит,

$$\| G(w_h) - g \|_0 = h^{2\alpha} \| (1 - \Delta)^\alpha w_h \|_0 \leqslant c_3 K h^{2\alpha}. \tag{25}$$

Положив $H = 1/h$, видим, что соотношения (24) и (25) удовлетворяют определению 1 при $\mu = 2\alpha/Q$. Если положить $\alpha = 2Q$, получаем, что набор функций w_h, $0 < h < 1$, есть приближенное решение с порядком потери $\mu = 4$. Заметим также, что условие $\| G(u) \|_r \leqslant MK$ при $\| u \|_r \leqslant K$ (см. формулу (5, 3) в [3]) выполняется, так как ограничены частные производные функций F_j и применима лемма о суперпозиции [3, с. 186]. Условие $\| G(u + v) - G(u) - G'(u)v \|_0 \leqslant M \| v \|_0^2$ (см. [3], формула (5.6)) тоже легко проверяется с учетом гладкости функций F_j и того, что L — оператор с постоянными коэффициентами.

Таким образом, все условия теоремы Нэша — Мозера выполнены. Значит, итерационная последовательность, построенная для (3) методом Ньютона — Канторовича, сходится по норме $\overline{V}^Q$.

Приведем достаточные условия, при которых выполняется оценка (17) (в работе [3] такие условия найдены для периодической задачи для линейной системы первого порядка с переменными коэффициентами).

Теорема 5. *Пусть выполнены следующие условия*: 1) *матрица* $a_0 + a_0^T$ *положительно определена*; 2) *при* $|s| = 1$ $a_s^{jr} = a_s^{rj}$, $j, r = \overline{1, m}$; 3) *если существует* k_1 *такое, что* $s_{k_1} = 2l_{k_1} + 1$ *и для* $k \neq k_1$ $s_k = 2l_k$, *то* $a_s^{jr} = a_s^{rj}$, $j, r = \overline{1, m}$, $k = \overline{0, p}$; 4) *если существуют* $k_1 \neq k_2$ *такие, что* $s_{k_1} = 2l_{k_1} + 1$ *и* $s_{k_2} = 2l_{k_2} + 1$, *то* $a_s^{jr} = 0$, $j, r = \overline{1, m}$; 5) *если* $|s| = 2l$, $l = 1, 2, \ldots$ *и* $\forall k \in \overline{0, p}$ $s_k = 2l_k$, *то* $a_s^{jr} = -a_s^{rj}$ *при* $r \neq j$; 6) *при* $|s| = 4l + 2$ $a_s^{jj} \leqslant 0$ *и при* $|s| = 4l$ $a_s^{jj} \geqslant 0$. *Тогда оценка верна* (17).

Доказательство. Условия 2) — 6) дают неравенство $(Lv, v)_0 \geqslant (a_0 v, v)_0$. Так как $(a_0 v, v)_0 = 0{,}5\,((a_0 + a_0^T)\,v, v)_0$, то с учетом условия 1) получаем, что $\|(Lv, v)_0 \geqslant 0{,}5\,((a_0 + a_0^T)\,v, v)_0 \geqslant \lambda_0 \|v\|_0^2$, где $\lambda_0 > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $0{,}5\,(a_0 + a_0^T)$.

Заметим, что при условиях теоремы 5 для выполнения оценки (21) нужно потребовать, чтобы $|\varepsilon| < \lambda_0 / B_1$.

В простейших случаях удается получить менее жесткие условия на коэффициенты оператора L.

Теорема 6. *Пусть* $V(1, D_2, D_4, \ldots, D_{2r}) = 0{,}5r$ *и* $(-1)^m a_{2m} > 0$. *Тогда верна оценка* (16).

Доказательство. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что оценка (16) верна тогда, когда многочлен

$$(-1)^m a_{2m} \xi^{2m} + (-1)^{m-1} a_{2m-2} \xi^{2m-2} + \ldots - a_2 \xi^2 + a_0 \tag{26}$$

положительно определен. Условие $V(1, D_2, D_4, \ldots, D_{2r}) = 0{,}5r$ является необходимым и достаточным для того, чтобы корни многочлена (26) были комплекснозначными [8]. Вместе с условием $(-1)^m a_{2m} > 0$ получается и положительная определенность многочлена.

1. *Полищук В. Н., Пташник Б. И.* О периодической краевой задаче для системы гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами.— Укр. мат. журн., 1978, **30**, № 3, с. 326—333.
2. *Полищук В. Н., Пташник Б. И.* Периодические решения системы дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами.— Там же, 1980, **32**, № 2, с. 239—243.
3. *Мозер Ю.* Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения.— Успехи мат. наук, 1968, **23**, вып. 4, с. 179—238.
4. *Самойленко А. М., Мосеенков В. Б.* Итерационные методы решения нелинейных уравнений с частными производными, близких к линейным.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1980.— 44 с.
5. *Берник В. И., Пташник Б. И.* Краевая задача для системы уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. — Дифференц. уравнения, 1980, **16**, № 2, с. 273—279.
6. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу.— М.: Мир, 1977.— 232 с.
7. *Шубин М. А.* Почти периодические функции и дифференциальные операторы с частными производными.— Успехи мат. наук, 1978, **33**, вып. 2, с. 3—47.
8. *Каленюк П. І., Скоробогатько В. Я.* Якісні методи теорії диференціальних рівнянь.—К.: Наук. думка, 1977.— 124 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редакцию
14.12.81