УДК 517.948

Г. П. Пелюх

Исследование систем нелинейных функциональных уравнений с особенностями

В статье изучается вопрос о построении общего решения системы нелинейных функциональных уравнений вида

$$t^{-\nu_i} x_i(\lambda t) = \lambda_i x_i(t) + f_i[t, x_1(t), \ldots, x_n(t)], \quad i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

где ν_i, λ, λ_i, $i = \overline{1, n}$,— некоторые вещественные постоянные, f_i — вещественные функции вещественных переменных, в окрестности точки $t = 0$. Аналогичный вопрос для систем линейных функциональных уравнений вида (1) рассматривался в [1, 2], а для некоторых систем нелинейных функциональных уравнений — в [3—5].

Предположим, что выполняются условия:

а) $0 < \lambda < 1$, $\nu_i > 0$, $i = \overline{1, n}$;

б) $\nu_i \neq \sum\limits_{j=1}^{n} i_j \nu_j$, $i = \overline{1, n}$, $\sum\limits_{j=1}^{n} i_j = 2, 3, \ldots, k$, где $k > \nu^*/\nu_*$ $(\nu_* = \min\{\nu_i, i = \overline{1, n}\}$, $\nu^* = \max\{\nu_i, i = \overline{1, n}\})$;

в) функции $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1, n}$, непрерывны по t и принадлежат классу C^k по $x_1, \ldots, x_n$ в некоторой окрестности начала координат $V: 0 \leqslant t \leqslant a$, $|x_i| \leqslant b$, $i = \overline{1, n}$;

г) функции $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1, n}$, и их частные производные первого порядка по $x_1, \ldots, x_n$ обращаются в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Из условий в), г) непосредственно вытекает, что в некоторой окрестности V_1 (в дальнейшем будем считать, что $V_1 = V$) начала координат функции $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$; $i = \overline{1, n}$, можно представить в виде

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1 + \ldots + i_n = 2}^{k} a^i_{i_1 \ldots i_n}(t)\, x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} + \varphi_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = \overline{1, n}, \tag{2}$$

где $a^i_{i_1 \ldots i_n}(t)$ — некоторые непрерывные функции, а $\varphi_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ — функции, непрерывные по t, класса C^k по $x_1, \ldots, x_n$ и такие, что $\varphi_i(t, x_1, \ldots, x_n) = o((|x_1| + \ldots + |x_n|)^k)$ при $t \in [0, a]$ и $x_i \to 0$, $i = \overline{1, n}$.

Покажем, что существует преобразование

$$x_i(t) = \gamma_i[t, y_1(t), \ldots, y_n(t)], \quad i = \overline{1, n}, \tag{3}$$

где $\gamma_i(t, y_1, \ldots, y_n) = y_i + o(|y_1| + \ldots + |y_n|)$, приводящее систему уравнений (1) к виду

$$y_i(\lambda t) = \lambda_i t^{\nu_i} y_i(t), \quad i = \overline{1, n}. \tag{4}$$

Для этого достаточно доказать, что в некоторой окрестности W начала координат 0 существует решение $\gamma_i(t, y_1, \ldots, y_n) = y_i + o(|y_1| + \ldots + |y_n|)$, $i = \overline{1, n}$, системы нелинейных функциональных уравнений

$$t^{-\nu_i} \gamma_i(\lambda t, \lambda_1 t^{\nu_1} y_1, \ldots, \lambda_n t^{\nu_n} y_n) = \lambda_i \gamma_i(t, y_1, \ldots, y_n) + \\ + f_i[t, \gamma_1(t, y_1, \ldots, y_n), \ldots, \gamma_n(t, y_1, \ldots, y_n)], \quad i = \overline{1, n}. \tag{5}$$

Теорема. *Пусть выполняются условия* а) — г). *Тогда в некоторой окрестности* W *начала координат* 0 *существует решение* $\gamma_i(t, y_1, \ldots, y_n)$, $i=\overline{1, n}$, *системы уравнений* (5), *непрерывное по* t, *класса* C^k *по* $y_1, \ldots, y_n$ *и такое, что* $\det \left\| \frac{\partial \gamma_i}{\partial y_j}\Big|_0 \right\| = 1$.

Для доказательства теоремы понадобится следующая лемма.

Лемма. *Если выполняются условия* а)—г), *то существуют функции*

$$\varkappa_i(t, y_1, \ldots, y_n) = y_i + \sum_{i_1+\ldots+i_n=2}^{k} c^i_{i_1\ldots i_n}(t)\, y_1^{i_1} \ldots y_n^{i_n}, \quad i=\overline{1, n}, \tag{6}$$

где $c^i_{i_1\ldots i_n}(t)$ — *некоторые пока не определенные функции такие, что*

$$t^{-\nu_i}\varkappa_i(\lambda t, \lambda_1 t^{\nu_1} y_1, \ldots, \lambda_n t^{\nu_n} y_n) - \lambda_i \varkappa_i(t, y_1, \ldots, y_n) -$$

$$- f_i[t, \varkappa_1(t, y_1, \ldots, y_n), \ldots, \varkappa_n(t, y_1, \ldots, y_n)] = \tilde f_i(t, y_1, \ldots, y_n), \quad i=\overline{1, n}, \tag{7}$$

где $\tilde f_i(t, y_1, \ldots, y_n)$ *непрерывны по* t, *класса* C^k *по* $y_1, \ldots, y_n$ *и* $\tilde f_i(t, y_1, \ldots, y_n) = o((|y_1| + \ldots + |y_n|)^k)$ *при* $t \in [0, a]$ *и* $y_i \to 0$, $i=\overline{1, n}$.

Доказательство. С точностью до членов порядка $o((|y_1| + \ldots + |y_n|)^k)$ левая часть равенства (7) равна

$$t^{-\nu_i}\lambda_i t^{\nu_i} y_i + t^{-\nu_i} \sum_{i_1+\ldots+i_n=2}^{k} c^i_{i_1\ldots i_n}(\lambda t)\lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_n^{i_n} t^{i_1\nu_1+\ldots+i_n\nu_n} y_1^{i_1} \ldots y_n^{i_n} -$$

$$-\lambda_i y_i - \lambda_i \sum_{i_1+\ldots+i_n=2}^{k} c^i_{i_1\ldots i_n}(t)\, y_1^{i_1} \ldots y_n^{i_n} - \sum_{i_1+\ldots+i_n=2}^{k} P^i_{i_1\ldots i_n}(t)\, y_1^{i_1} \ldots y_n^{i_n},$$

где $P^i_{i_1\ldots i_n}(t)$ — некоторые полиномы относительно $c^i_{j_1\ldots j_n}(t)$ с коэффициентами $a^i_{i_1\ldots i_n}(t)$, причем $\sum_{m=1}^{n} j_m < \sum_{m=1}^{n} i_m$; $P^i_{i_1\ldots i_n}(t) = a^i_{i_1\ldots i_n}(t)$, $i_1 + \ldots + i_n = 2$, $i=\overline{1, n}$. Следовательно, равенства (7) можно записать в виде

$$t^{-\nu_i} \sum_{i_1+\ldots+i_n=2}^{k} \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_n^{i_n} t^{i_1\nu_1+\ldots+i_n\nu_n} c^i_{i_1\ldots i_n}(\lambda t)\, y_1^{i_1} \ldots y_n^{i_n} =$$

$$= \lambda_i \sum_{i_1+\ldots+i_n=2}^{k} c^i_{i_1\ldots i_n}(t)\, y_1^{i_1} \ldots y_n^{i_n} + \sum_{i_1+\ldots+i_n=2}^{k} P^i_{i_1\ldots i_n}(t)\, y_1^{i_1} \ldots y_n^{i_n} +$$

$$+ o((|y_1| + \ldots + |y_n|)^k), \quad i=\overline{1, n}. \tag{8}$$

Приравнивая в (8) коэффициенты при $y_1^{i_1} \ldots y_n^{i_n}$, $i_1 + \ldots + i_n = \overline{2, k}$, получаем систему линейных функциональных уравнений для $c^i_{i_1\ldots i_n}(t)$:

$$\lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_n^{i_n} t^{i_1\nu_1+\ldots+i_n\nu_n-\nu_i} c^i_{i_1\ldots i_n}(\lambda t) = \lambda_i c^i_{i_1\ldots i_n}(t) + P^i_{i_1\ldots i_n}(t),$$

$$i=\overline{1, n}, \; i_1 + \ldots + i_n = \overline{2, k}. \tag{9}$$

Система уравнений (9) представляет собой рекуррентную последовательность линейных функциональных уравнений относительно $c^i_{i_1\ldots i_n}(t)$, $i_1 + \ldots + i_n = \overline{2, k}$, $i=\overline{1, n}$. В силу условия б) при определении $c^i_{i_1\ldots i_n}(t)$ нужно решать линейные функциональные уравнения вида

$$t^{\alpha} z(\lambda t) = \tilde\lambda z(t) + r(t), \tag{10}$$

где α, $\tilde{\lambda}$ — некоторые постоянные; $r(t)$ — некоторая непрерывная при $t \in [0, a]$ функция. Если $\alpha > 0$, то уравнение (10) имеет единственное решение, которое можно построить, например, методом последовательных приближений. В случае $\alpha < 0$ уравнение (10) имеет бесконечное число непрерывных решений [6].

Таким образом, функции $\varkappa_i(t, y_1, \ldots, y_n)$, $i = \overline{1, n}$, определенные формулами (6), в которых $c^i_{i_1 \ldots i_n}(t)$ — непрерывные решения уравнений (9), удовлетворяют, очевидно, утверждению леммы.

Доказательство теоремы. Решение системы уравнений (5) будем искать методом последовательных приближений. Положим

$$\gamma_{i,0}(t, y_1, \ldots, y_n) = \varkappa_i(t, y_1, \ldots, y_n), \quad \gamma_{i,m+1}(t, y_1, \ldots, y_n) =$$
$$= \lambda_i^{-1} t^{-\nu_i} \gamma_{i,m}(\lambda t, \lambda_1 t^{\nu_1} y_1, \ldots, \lambda_n t^{\nu_n} y_n) - \lambda_i^{-1} \tilde{f}_i[t, \gamma_{1,m}(t, y_1, \ldots, y_n), \ldots$$
$$\ldots, \gamma_{n,m}(t, y_1, \ldots, y_n)], \quad i = \overline{1, n}, \quad m = 0, 1, \ldots . \tag{11}$$

Докажем, что при достаточно малых t, $|y_i|$, $i = \overline{1, n}$, последовательности $\{\gamma_{i,m}\}$, $i = \overline{1, n}$, сходятся к некоторым непрерывным функциям γ_i, $i = \overline{1, n}$. Для этого достаточно доказать равномерную сходимость рядов

$$\gamma_{i,0}(t, y_1, \ldots, y_n) + \sum_{j=0}^{\infty} [\gamma_{i,j+1}(t, y_1 \ldots, y_n) - \gamma_{i,j}(t, y_1, \ldots, y_n)], \quad i = \overline{1, n}. \tag{12}$$

Сначала покажем, что при достаточно малых t, $|y_i|$, $i = \overline{1, n}$, выполняются неравенства

$$|\gamma_{i,m}(t, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant |\varkappa_i(t, y_1, \ldots, y_n)| + \frac{M}{1-\theta} (|y_1| + \ldots + |y_n|)^k,$$
$$m = 0, 1, \ldots, \tag{13}$$

где M — некоторая положительная постоянная такая, что

$$|\lambda_i^{-1} \tilde{f}_i(t, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant M(|y_1| + \ldots + |y_n|)^k, \quad 0 < \theta < 1.$$

В силу условия г) для любых точек $(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$, $(t, \bar{\bar{y}}_1, \ldots, \bar{\bar{y}}_n) \in V$ выполняется неравенство

$$|f_i(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) - f_i(t, \bar{\bar{y}}_1, \ldots, \bar{\bar{y}}_n)| \leqslant l_1 |\bar{y}_1 - \bar{\bar{y}}_1| + \ldots + l_n |\bar{y}_n - \bar{\bar{y}}_n|, \tag{14}$$

где l_i, $i = \overline{1, n}$, — некоторые положительные постоянные, зависящие от V (для произвольного $\varepsilon > 0$ можно указать положительные числа $\bar{a} < a$, $\bar{b} < b$ такие, что $\sum_{i=1}^{n} l_i < \varepsilon$ при $t \leqslant \bar{a}$, $|\bar{y}_i|$, $|\bar{\bar{y}}_i| \leqslant \bar{b}$).

Существуют положительные числа a_1, b_1 ($a_1 < \min\{1, a\}$, $b_1 < b$) такие, что при $t \leqslant a_1$, $|y_i| \leqslant b_1$, $i = \overline{1, n}$, имеем

$$|\varkappa_i(t, y_1, \ldots, y_n)| + \frac{M}{1-\theta} (|y_1| + \ldots + |y_n|)^k \leqslant b, \ |\lambda_i t^{\nu_i} y_i| \leqslant b_1,$$
$$i = \overline{1, n}, \ \lambda_*^{-1} \lambda^{*k} t^{k\nu_* - \nu^*} + \lambda_*^{-1} L \leqslant \theta, \tag{15}$$

где $L = \sum_{i=1}^{n} l_i$, $\lambda_* = \min\{|\lambda_i|, \ i = \overline{1, n}\}$, $\lambda^* = \max\{|\lambda_i|, \ i = \overline{1, n}\}$.

Так как $|\gamma_{i,m}(t, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant |\varkappa_i(t, y_1, \ldots, y_n)| + |\gamma_{i,m}(t, y_1, \ldots, y_n) - \varkappa_i(t, y_1, \ldots, y_n)|$, то для доказательства неравенств (13) достаточно показать, что при $t\leqslant a_1$, $|y_i|\leqslant b_1$, $i=\overline{1, n}$, выполняются неравенства

$$|\gamma_{i,m}(t, y_1, \ldots, y_n)-\varkappa_i(t, y_1, \ldots, y_n)|\leqslant\frac{M}{1-\theta}(|y_1|+\ldots+|y_n|)^k,$$

$$i=\overline{1, n},\ m=0, 1, \ldots. \tag{16}$$

Неравенства (16) выполняются, очевидно, при $m=0$. Пусть они уже доказаны для некоторого индекса $m\geqslant 1$. Тогда из (11), (14), (15) следует, что

$$|\gamma_{i,m+1}(t, y_1, \ldots, y_n)-\varkappa_i(t, y_1, \ldots, y_n)|=|\lambda_i^{-1}t^{-\nu_i}\gamma_{i,m}(\lambda t, \lambda_1 t^{\nu_1}y_1, \ldots, \lambda_n t^{\nu_n}y_n)-$$

$$-\lambda_i^{-1}f_i[t, \gamma_{1,m}(t, y_1, \ldots, y_n), \ldots, \gamma_{n,m}(t, y_1, \ldots, y_n)]-\lambda_i^{-1}t^{-\nu_i}\varkappa_i(\lambda t, \lambda_1 t^{\nu_1}y_1, \ldots$$

$$\ldots, \lambda_n t^{\nu_n}y_n)+\lambda_i^{-1}f_i[t, \varkappa_1(t, y_1, \ldots, y_n), \ldots, \varkappa_n(t, y_1, \ldots, y_n)]+\lambda_i^{-1}\tilde{f}_i(t, y_1, \ldots, y_n)|\leqslant$$

$$\leqslant|\lambda_i|^{-1}t^{-\nu_i}|\gamma_{i,m}(\lambda t, \lambda_1 t^{\nu_1}y_1, \ldots, \lambda_n t^{\nu_n}y_n)-\varkappa_i(\lambda t, \lambda_1 t^{\nu_1}y_1, \ldots, \lambda_n t^{\nu_n}y_n)|+$$

$$+|\lambda_i|^{-1}|f_i[t, \gamma_{1,m}(t, y_1, \ldots, y_n), \ldots, \gamma_{n,m}(t, y_1, \ldots, y_n)]-f_i[t, \varkappa_1(t, y_1, \ldots, y_n), \ldots$$

$$\ldots, \varkappa_n(t, y_1, \ldots, y_n)]|+|\lambda_i|^{-1}|\tilde{f}_i(t, y_1, \ldots, y_n)|\leqslant$$

$$\leqslant|\lambda_i|^{-1}t^{-\nu_i}\frac{M}{1-\theta}(|\lambda_1 t^{\nu_1}y_1|+\ldots+|\lambda_n t^{\nu_n}y_n|)^k+|\lambda_i|^{-1}\times$$

$$\times\left(l_1\frac{M}{1-\theta}(|y_1|+\ldots+|y_n|)^k+\ldots+l_n\frac{M}{1-\theta}(|y_1|+\ldots+|y_n|)^k\right)+$$

$$+M(|y_1|+\ldots+|y_n|)^k\leqslant\lambda_*^{-1}\lambda^{*k}t^{k\nu_*-\nu^*}\frac{M}{1-\theta}(|y_1|+\ldots+|y_n|)^k+$$

$$+\lambda_*^{-1}\frac{LM}{1-\theta}(|y_1|+\ldots+|y_n|)^k+M(|y_1|+\ldots+|y_n|)^k\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M}{1-\theta}(\lambda_*^{-1}\lambda^{*k}t^{k\nu_*-\nu^*}+\lambda_*^{-1}L)(|y_1|+\ldots+y_n|)^k+$$

$$+M(|y_1|+\ldots+|y_n|)^k\leqslant\frac{M}{1-\theta}\theta(|y_1|+\ldots+|y_n|)^k+$$

$$+M(|y_1|+\ldots+|y_n|)^k=\frac{M}{1-\theta}(|y_1|+\ldots+|y_n|)^k.$$

Тем самым доказано, что неравенства (16) и, следовательно, неравенства (13) выполняются при $t\leqslant a_1$, $|y_i|\leqslant b_1$, $i=\overline{1, n}$, и всех $m\geqslant 0$. Теперь покажем, что при $t\leqslant a_1$, $|y_i|\leqslant b_1$, $i=\overline{1, n}$, и всех $m\geqslant 0$ имеют место неравенства

$$|\gamma_{i,m+1}(t, y_1, \ldots, y_n)-\gamma_{i,m}(t, y_1, \ldots, y_n)|\leqslant M\theta^m(|y_1|+\ldots+|y_n|)^k,$$

$$i=\overline{1, n}. \tag{17}$$

В силу (7), (11) при $m=0$ получаем

$$|\gamma_{i,1}(t, y_1, \ldots, y_n)-\gamma_{i,0}(t, y_1, \ldots, y_n)|=|\lambda_i^{-1}t^{-\nu_i}\varkappa_i(\lambda t, \lambda_1 t^{\nu_1}y_1, \ldots, \lambda_n t^{\nu_n}y_n)-$$

$$-\lambda_i^{-1}f_i[t, \varkappa_1(t, y_1, \ldots, y_n), \ldots, \varkappa_n(t, y_1, \ldots, y_n)]-$$

$$-\varkappa_i(t, y_1, \ldots, y_n)|\leqslant M(|y_1|+\ldots+|y_n|)^k,$$

т. е. в этом случае неравенства (17) выполняются. Пусть неравенства (17) доказаны уже для некоторого индекса $m-1\geqslant 0$. Тогда из (11), (14), (15) будет следовать

$$|\gamma_{i,m+1}(t, y_1, \dots, y_n) - \gamma_{i,m}(t, y_1, \dots, y_n)| \leqslant |\lambda_i|^{-1} t^{-\nu_i} |\gamma_{i,m}(\lambda t, \lambda_1 t^{\nu_1} y_1, \dots$$

$$\dots, \lambda_n t^{\nu_n} y_n) - \gamma_{i,m-1}(\lambda t, \lambda_1 t^{\nu_1} y_1, \dots, \lambda_n t^{\nu_n} y_n)| + |\lambda_i|^{-1} |f_i[t, \gamma_{1,m}(t, y_1, \dots$$

$$\dots, y_n), \dots, \gamma_{n,m}(t, y_1, \dots, y_n)] - f_i[t, \gamma_{1,m-1}(t, y_1, \dots, y_n), \dots$$

$$\dots, \gamma_{n,m-1}(t, y_1, \dots, y_n)]| \leqslant \lambda_*^{-1} t^{-\nu^*} M\theta^{m-1} (|\lambda_1 t^{\nu_1} y_1| + \dots + |\lambda_n t^{\nu_n} y_n|)^k +$$

$$+ \lambda_*^{-1} LM\theta^{m-1} (|y_1| + \dots + |y_n|)^k \leqslant \lambda_*^{-1} t^{-\nu^*} M\theta^{m-1} \lambda^{*k} t^{k\nu_*} (|y_1| + \dots$$

$$\dots + |y_n|)^k + \lambda_*^{-1} LM\theta^{m-1} (|y_1| + \dots + |y_n|)^k = M\theta^{m-1} (|y_1| + \dots + |y_n|)^k \times$$

$$\times (\lambda_*^{-1} \lambda^{*k} t^{k\nu_* - \nu^*} + \lambda_*^{-1} L) < M\theta^m (|y_1| + \dots + |y_n|)^k.$$

Таким образом, при $t \leqslant a_1$, $|y_i| \leqslant b_1$, $i = \overline{1, n}$, неравенства (17) выполняются для любого $m \geqslant 0$.

Из (17) непосредственно следует, что при $t \leqslant a_1$, $|y_i| \leqslant b_1$, $i = \overline{1, n}$, ряды (12) и, следовательно, последовательности функций (11) равномерно сходятся к некоторым функциям $\gamma_i(t, y_1, \dots, y_n)$, $i = \overline{1, n}$. Так как функции $\gamma_{i,m}(t, y_1, \dots, y_n)$, $i = \overline{1, n}$, непрерывны при любом $m \geqslant 0$ и всех $t \leqslant a_1$, $|y_i| \leqslant b_1$ $i = \overline{1, n}$, то функции $\gamma_i(t, y_1, \dots, y_n)$, $i = \overline{1, n}$, также непрерывны при $t \leqslant a_1$, $|y_i| \leqslant b_1$, $i = \overline{1, n}$.

Переходя в (13) к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$|\gamma_i(t, y_1, \dots, y_n)| \leqslant |\varkappa_i(t, y_1, \dots, y_n)| + \frac{M}{1-\theta} (|y_1| + \dots + |y_n|)^k,$$

$$i = \overline{1, n}.$$

В силу (15) при $t \leqslant a_1$, $|y_i| \leqslant b_1$, $i = \overline{1, n}$, имеем $|\gamma_i(t, y_1, \dots, y_n)| \leqslant b$, $i = \overline{1, n}$.

Функции $\gamma_i(t, y_1, \dots, y_n)$, $i = \overline{1, n}$, являются решением системы уравнений (5). Действительно, переходя в (11) к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$\gamma_i(t, y_1, \dots, y_n) \equiv \lambda_i^{-1} t^{-\nu_i} \gamma_i(\lambda t, \lambda_1 t^{\nu_1} y_1, \dots, \lambda_n t^{\nu_n} y_n) -$$

$$- \lambda_i^{-1} f_i[t, \gamma_1(t, y_1, \dots, y_n), \dots, \gamma_n(t, y_1, \dots, y_n)], \quad i = \overline{1, n}.$$

Покажем, что функции $\gamma_i(t, y_1, \dots, y_n)$, $i = \overline{1, n}$, принадлежат классу C^k по $y_1, \dots, y_n$.

При любом i и $s = \overline{1, k}$ имеем

$$[f_i(t, \gamma_1(t, y_1, \dots, y_n), \dots, \gamma_n(t, y_1, \dots, y_n))]_{y_{j_1} \dots y_{j_s}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} [f_i(t, \gamma_1(t, y_1, \dots, y_n), \dots, \gamma_n(t, y_1, \dots, y_n))]_{\gamma_j} [\gamma_j(t, y_1, \dots, y_n)]_{y_{j_1} \dots y_{j_s}} +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i_1, \dots, i_s \leqslant n} [f_i(t, \gamma_1(t, y_1, \dots, y_n), \dots, \gamma_n(t, y_1, \dots, y_n))]_{\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_s}} \times$$

$$\times [\gamma_{i_1}(t, y_1, \dots, y_n)]_{y_{j_1}} \dots [\gamma_{i_s}(t, y_1, \dots, y_n)]_{y_{j_s}} +$$

$$+ \sum_{r=1}^{s-1} \sum_{1 \leqslant i_1, \dots, i_r \leqslant n} R^i_{i_1 \dots i_r} [f_i(t, \gamma_1(t, y_1, \dots, y_n), \dots, \gamma_n(t, y_1, \dots, y_n))]_{\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_r}}, \tag{18}$$

где $R^i_{i_1 \dots i_r}$ — многочлены относительно производных функций $\gamma_1(t, y_1, \dots$ $\dots, y_n), \dots, \gamma_n(t, y_1, \dots, y_n)$ по $y_1, \dots, y_n$ порядка $\leqslant s-1$.

Следовательно, существуют положительные постоянные M_s, L_0 и $L^j_{j_1\dots j_r}$, $j=\overline{1,n}$, $r=\overline{1,s-1}$, $1\leqslant j_i\leqslant n$, такие, что

$$|[f_i(t,\bar\gamma_1(t,y_1,\dots,y_n),\dots,\bar\gamma_n(t,y_1,\dots,y_n))]_{y_{j_1}\dots y_{j_s}}-$$

$$-[f_i(t,\bar{\bar\gamma}_1(t,y_1,\dots,y_n),\dots,\bar{\bar\gamma}_n(t,y_1,\dots,y_n))]_{y_{j_1}\dots y_{j_s}}|\leqslant M_s+$$

$$+L\sum_{j=1}^{n}|[\bar\gamma_j(t,y_1,\dots,y_n)]_{y_{j_1}\dots y_{j_s}}-[\bar{\bar\gamma}_j(t,y_1,\dots,y_n)]_{y_{j_1}\dots y_{j_s}}|+$$

$$+L_0\sum_{j=1}^{n}|\bar\gamma_j(t,y_1,\dots,y_n)-\bar{\bar\gamma}_j(t,y_1,\dots,y_n)|+$$

$$+\sum_{r=1}^{s-1}\sum_{j=1}^{n}\sum_{1\leqslant j_1,\dots,j_r\leqslant n}L^j_{j_1\dots j_r}|[\bar\gamma_j(t,y_1,\dots,y_n)]_{y_{j_1}\dots y_{j_r}}-[\bar{\bar\gamma}_j(t,y_1,\dots,y_n)]_{y_{j_1}\dots y_{j_r}}|, \tag{19}$$

где $|\bar\gamma_i(t,y_1,\dots,y_n)|\leqslant b$, $|\bar{\bar\gamma}_i(t,y_1,\dots,y_n)|\leqslant b$, $|[\bar\gamma_i(t,y_1,\dots,y_n)]_{y_{j_1}\dots y_{j_s}}|\leqslant c$, $|[\bar{\bar\gamma}_i(t,y_1,\dots,y_n)]_{y_{j_1}\dots y_{j_s}}|\leqslant c$, $i=\overline{1,n}$, $s=\overline{1,k}$ (c — некоторая положительная постоянная, $M_s=0$ при $s=\overline{1,k-1}$ и $M_k\to 0$, если $[\bar\gamma_j(t,y_1,\dots,y_n)-\bar{\bar\gamma}_j(t,y_1,\dots,y_n)]\to 0$ при t, $y_i\to 0$, $i=\overline{1,n}$.

Пусть a_2, b_2 — достаточно малые положительные числа такие, что при $t\leqslant a_2$, $|y_i|\leqslant b_2$, $i=\overline{1,n}$, имеем

$$\lambda_*^{-1}\lambda^{*k}t^{k\nu_*-\nu^*}+\lambda_*^{-1}nL+\lambda_*^{-1}M_k+\lambda_*^{-1}nL_0(|y_1|+\dots+|y_n|)^s+$$

$$+\lambda_*^{-1}\sum_{r=1}^{s-1}\sum_{j=1}^{n}\sum_{1\leqslant j_1,\dots,j_r\leqslant n}L^j_{j_1\dots j_r}(|y_1|+\dots+|y_n|)^{s-r}\leqslant\theta,\quad s=\overline{1,k}. \tag{20}$$

Покажем, что при $t\leqslant a_2$, $|y_i|\leqslant b_2$, $i=\overline{1,n}$, выполняются неравенства

$$|[\gamma_{i,m}(t,y_1,\dots,y_n)]_{y_{j_1}\dots y_{j_s}}-[\gamma_{i,m-1}(t,y_1,\dots,y_n)]_{y_{j_1}\dots y_{j_s}}|\leqslant$$

$$\leqslant\widetilde M\,\theta^{m-1}(|y_1|+\dots+|y_n|)^{k-s},\quad s=\overline{1,k},\quad m=1,2,\dots, \tag{21}$$

где $\widetilde M$ — некоторая положительная постоянная.

Так как функции $f_i(t,y_1,\dots,y_n)$, $i=\overline{1,n}$, принадлежат классу C^k по $y_1,\dots,y_n$, $\varkappa_i(t,y_1,\dots,y_n)=y_i+\sum\limits_{i_1+\dots+i_n=2}^{k}c^i_{i_1\dots i_n}(t)\,y_1^{i_1}\dots y_n^{i_n}$, $f_i[t,\varkappa_1(t,y_1,\dots,y_n),\dots,\varkappa_n(t,y_1,\dots,y_n)]=\sum\limits_{i_1+\dots+i_n=2}^{k}P^i_{i_1\dots i_n}y_1^{i_1}\dots y_n^{i_n}+\bar f_i(t,y_1,\dots,y_n)$, $i=\overline{1,n}$, где $P^i_{i_1\dots i_n}$—многочлены из (9), функции $\bar f_i(t,y_1,\dots,y_n)$ непрерывны по t, класса C^k по $y_1,\dots,y_n$ и $\bar f_i(t,y_1,\dots,y_n)=o((|y_1|+\dots+|y_n|)^k)$ при $y_i\to 0$, $i=\overline{1,n}$, то

$$[\varkappa_i(t,y_1,\dots,y_n)]_{y_{j_1}\dots y_{j_s}}=\sum_{i_1+\dots+i_n=s}^{k}i_{j_1}\dots i_{j_s}c^i_{i_1\dots i_n}(t)\,y_1^{i_1}\dots y_{j_1}^{i_{j_1}-1}\dots y_{j_s}^{i_{j_s}-1}\dots y_n^{i_n},$$

$$[f_i(t,\varkappa_1(t,y_1,\dots,y_n),\dots,\varkappa_n(t,y_1,\dots,y_n))]_{y_{j_1}\dots y_{j_s}}=$$

$$=\sum_{i_1+\dots+i_n=s}^{k}i_{j_1}\dots i_{j_s}P^i_{i_1\dots i_n}y_1^{i_1}\dots y_{j_1}^{i_{j_1}-1}\dots y_{j_s}^{i_{j_s}-1}\dots y_n^{i_n}+\bar R^i_{j_1\dots j_s}(t,y_1,\dots,y_n),$$

где функции $\overline{R}^i_{j_1\ldots j_s}(t, y_1, \ldots, y_n)$ непрерывны по t, класса C^{k-s} по $y_1, \ldots, y_n$ и $\overline{R}^i_{j_1\ldots j_s}(t, y_1, \ldots, y_n) = o((|y_1| + \ldots + |y_n|)^{k-s})$ при $y_i \to 0$, $i = \overline{1, n}$, $1 \leqslant j_1, \ldots, j_s \leqslant n$, $s = \overline{1, k}$. Кроме того, поскольку

$$\gamma_{i,1}(t, y_1, \ldots, y_n) - \gamma_{i,0}(t, y_1, \ldots, y_n) = \lambda_i^{-1} t^{-\nu_i} \varkappa_i(\lambda t, \lambda_1 t^{\nu_1} y_1, \ldots, \lambda_n t^{\nu_n} y_n) -$$
$$- \lambda_i^{-1} f_i[t, \varkappa_1(t, y_1, \ldots, y_n), \ldots, \varkappa_n(t, y_1, \ldots, y_n)] - \varkappa_i(t, y_1, \ldots, y_n)$$

и, следовательно,

$$[\gamma_{i,1}(t, y_1, \ldots, y_n)]_{y_{j_1}\ldots y_{j_s}} - [\gamma_{i,0}(t, y_1, \ldots, y_n)]_{y_{j_1}\ldots y_{j_s}} =$$
$$= \lambda_i^{-1} \lambda_{j_1} \ldots \lambda_{j_s} t^{-\nu_i + \nu_{j_1} + \ldots + \nu_{j_s}} [\varkappa_i(\lambda t, \lambda_1 t^{\nu_1} y_1, \ldots, \lambda_n t^{\nu_n} y_n)]_{y_{j_1}\ldots y_{j_s}} -$$
$$- [\varkappa_i(t, y_1, \ldots, y_n)]_{y_{j_1}\ldots y_{j_s}} - \lambda_i^{-1} [f_i(t, \varkappa_1(t, y_1, \ldots, y_n), \ldots, \varkappa_n(t, y_1, \ldots, y_n))]_{y_{j_1}\ldots y_{j_s}},$$
$$i = \overline{1, n}, \; s = \overline{1, k}, \; 1 \leqslant j_1, \ldots, j_s \leqslant n,$$

то в силу леммы неравенства (21) выполняются, очевидно, при $m = 1$. Пусть они уже доказаны для некоторого индекса $m > 1$. Тогда

$$|[\gamma_{i,l}(t, y_1, \ldots, y_n)]_{y_{j_1}\ldots y_{j_s}}| \leqslant |[\gamma_{i,0}(t, y_1, \ldots, y_n)]_{y_{j_1}\ldots y_{j_s}}| +$$
$$+ |[\gamma_{i,1}(t, y_1, \ldots, y_n)]_{y_{j_1}\ldots y_{j_s}} - [\gamma_{i,0}(t, y_1, \ldots, y_n)]_{y_{j_1}\ldots y_{j_s}}| +$$
$$+ \ldots + |[\gamma_{i,l}(t, y_1, \ldots, y_n)]_{y_{j_1}\ldots y_{j_s}} - [\gamma_{i,l-1}(t, y_1, \ldots, y_n)]_{y_{j_1}\ldots y_{j_s}}| \leqslant$$
$$\leqslant N + \widetilde{M}(|y_1| + \ldots + |y_n|)^{k-s} + \ldots + \widetilde{M}\theta^{l-1}(|y_1| + \ldots + |y_n|)^{k-s} \leqslant$$
$$\leqslant N + \frac{\widetilde{M}}{1-\theta}(|y_1| + \ldots + |y_n|)^{k-s}, \; i = \overline{1, n}, \; l = \overline{1, m}, \; 1 \leqslant j_1, \ldots \quad (22)$$
$$\ldots, j_s \leqslant n, \; s = \overline{1, k},$$

где N — некоторая положительная постоянная.

Возьмем $c \geqslant N + \dfrac{\widetilde{M}}{1-\theta}(|y_1| + \ldots + |y_n|)^{k-s}$, $s = \overline{1, k}$ Поскольку $[\gamma_{j,m}(t, y_1, \ldots, y_n) - \gamma_{j,m-1}(t, y_1, \ldots, y_n)] \to 0$ при $y_i \to 0$, $i = \overline{1, n}$ (это следует из (17)), то в силу (13), (15), (22) и (19) находим, что

$$|[\gamma_{i,m+1}(t, y_1, \ldots, y_n)]_{y_{j_1}\ldots y_{j_s}} - [\gamma_{i,m}(t, y_1, \ldots, y_n)]_{y_{j_1}\ldots y_{j_s}}| =$$
$$= |\lambda_i^{-1} \lambda_{j_1} \ldots \lambda_{j_s} t^{-\nu_i + \nu_{j_1} + \ldots + \nu_{j_s}} [\gamma_{i,m}(\lambda t, \lambda_1 t^{\nu_1} y_1, \ldots, \lambda_n t^{\nu_n} y_n)]_{y_{j_1}\ldots y_{j_s}} -$$
$$- \lambda_i^{-1} [f_i(t, \gamma_{1,m}(t, y_1, \ldots, y_n), \ldots, \gamma_{n,m}(t, y_1, \ldots, y_n))]_{y_{j_1}\ldots y_{j_s}} -$$
$$- \lambda_i^{-1} \lambda_{j_1} \ldots \lambda_{j_s} t^{-\nu_i + \nu_{j_1} + \ldots + \nu_{j_s}} [\gamma_{i,m-1}(\lambda t, \lambda_1 t^{\nu_1} y_1, \ldots, \lambda_n t^{\nu_n} y_n)]_{y_{j_1}\ldots y_{j_s}} +$$
$$+ \lambda_i^{-1} [f_i(t, \gamma_{1,m-1}(t, y_1, \ldots, y_n), \ldots, \gamma_{n,m-1}(t, y_1, \ldots, y_n))]_{y_{j_1}\ldots y_{j_s}}| \leqslant$$
$$\leqslant |\lambda_i|^{-1} |\lambda_{j_1}| \ldots |\lambda_{j_s}| t^{-\nu_i + \nu_{j_1} + \ldots + \nu_{j_s}} |[\gamma_{i,m}(\lambda t, \lambda_1 t^{\nu_1} y_1, \ldots, \lambda_n t^{\nu_n} y_n)]_{y_{j_1}\ldots y_{j_s}} -$$
$$- [\gamma_{i,m-1}(\lambda t, \lambda_1 t^{\nu_1} y_1, \ldots, \lambda_n t^{\nu_n} y_n)]_{y_{j_1}\ldots y_{j_s}}| + |\lambda_i|^{-1} \Bigg[L \sum_{=1}^{n} |[\gamma_{j,m}(t, y_1, \ldots, y_n)]_{y_{j_1}\ldots y_{j_s}} -$$

$$- [\gamma_{j,m-1}(t, y_1, \dots, y_n)]_{y_{j_1}\dots y_{j_s}}| + M_s + L_0 \sum_{j=1}^{n} |\gamma_{j,m}(t, y_1, \dots, y_n) -$$

$$- \gamma_{j,m-1}(t, y_1, \dots, y_n)| + \sum_{r=1}^{s-1}\sum_{j=1}^{n}\sum_{1\leqslant j_1,\dots,j_r\leqslant n} L^{j}_{j_1\dots j_r} |[\gamma_{j,m}(t, y_1, \dots, y_n)]_{y_{j_1}\dots y_{j_r}} -$$

$$- [\gamma_{j,m-1}(t, y_1, \dots, y_n)]_{y_{j_1}\dots y_{j_r}}|\Bigg] \leqslant |\lambda_i|^{-1} |\lambda_{j_1}| \dots |\lambda_{j_r}| t^{-\nu_i+\nu_{j_1}+\dots+\nu_{j_s}} \widetilde{M}\theta^{m-1} \times$$

$$\times (|\lambda_1 t^{\nu_1} y_1| + \dots + |\lambda_n t^{\nu_n} y_n|)^{k-s} + |\lambda_i|^{-1} [nL\widetilde{M}\theta^{m-1} (|y_1| + \dots + |y_n|)^{k-s} +$$

$$+ M_s + nL_0\widetilde{M}\theta^{m-1} (|y_1| + \dots + |y_n|)^{k} + \sum_{r=1}^{s-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{1\leqslant j_1,\dots,j_r\leqslant n} L^{j}_{j_1\dots j_r}\right) \times$$

$$\times \widetilde{M}\theta^{m-1} (|y_1| + \dots + |y_n|)^{k-r}] \leqslant [\lambda_*^{-1} \lambda^{*k} t^{k\nu_* - \nu^*} +$$

$$+ \lambda_*^{-1} nL + \lambda_*^{-1} M_s + \lambda_*^{-1} \sum_{r=1}^{s-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{1\leqslant j_1,\dots,j_r\leqslant n} L^{j}_{j_1\dots j_r}\right) (|y_1| + \dots + |y_n|)^{s-r} +$$

$$+ \lambda_*^{-1} nL_0 (|y_1| + \dots + |y_n|)^{s}] \times \widetilde{M}\theta^{m-1} (|y_1| + \dots + |y_n|)^{k-s} \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{M}\theta^{m} (|y_1| + \dots + |y_n|)^{k-s}, \quad i = \overline{1, n}, \ s = \overline{1, k},$$

т. е. неравенства (21) имеют место при любом $m \geqslant 1$ и $s = \overline{1, k}$.

Из (21) непосредственно вытекает, что функции $\gamma_i(t, y_1, \dots, y_n) = \lim_{m\to\infty} \gamma_{i,m}(t, y_1, \dots, y_n)$, $i = \overline{1, n}$, k раз непрерывно дифференцируемы по $y_1, \dots, y_n$.

Поскольку $\gamma_i(t, y_1, \dots, y_n) = y_i + \sum_{m=1}^{\infty} [\gamma_{i,m}(t, y_1, \dots, y_n) - \gamma_{i,m-1}(t, y_1, \dots, y_n)]$, $i = \overline{1, n}$, выполняются неравенства (21) и $k > 1$, то

$$\left.\frac{\partial \gamma_i(t, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_j}\right|_{O} = 0 \text{ при } i \neq j \text{ и } \left.\frac{\partial \gamma_i(t, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_i}\right|_{O} = 1,$$

$$i, j = \overline{1, n}.$$

Следовательно, $\det \left\| \left.\frac{\partial \gamma_i(t, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_j}\right|_{O} \right\| = 1$. Теорема доказана.

Таким образом, с помощью взаимно однозначной замены переменных (3) система уравнений (1) сводится к виду (4). Общее непрерывное решение системы уравнений (4) при $t > 0$ имеет вид

$$y_i(t) = \lambda^{\frac{\nu_i}{2}\left[\frac{\ln^2 t}{\ln^2 \lambda} - \left(1 - 2\frac{\ln|\lambda_i|}{\nu_i \ln\lambda}\right)\frac{\ln t}{\ln\lambda}\right]} \omega_i\left(\frac{\ln t}{\ln \lambda}\right), \quad i = \overline{1, n}, \tag{23}$$

где $\omega_i(\tau)$, $i = \overline{1, n}$, — произвольные непрерывные функции, удовлетворяющие таким условиям: $\omega_i(\tau + 1) = \omega_i(\tau)$ при $\lambda_i > 0$, $\omega_i(\tau + 1) = -\omega_i(\tau)$ при $\lambda_i < 0$

Принимая во внимание (3) и (23), можно выписать общее решение системы уравнений (1) при достаточно малых $t > 0$: $x_i(t) = \gamma_i[t, y_1(t), \dots, y_n(t)]$, $i = \overline{1, n}$, где $\gamma_i(t, y_1, \dots, y_n)$, $i = \overline{1, n}$, — решение системы уравнений (5), $y_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, определяются по формулам (23) и удовлетворяют условию $|y_i(t)| \leqslant b_2$, $i = \overline{1, n}$.

1. *Adams C. R.* The general theory of a class of linear partial q —difference equations.— Trans. Amer. Math. Soc., 1924, **26**, p. 283—312.
2. *Adams C. R.* Note on the existence of analytic solutions of nonhomogeneous linear q—difference equations, ordinary and partial.— Ann. Math., 1925, **27**, N 2, p. 73—83.
3. *Пелюх Г. П , Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений.— Киев: Наук. думка, 1974.— 119 с.
4. *Пелюх Г. П.* Общее решение одного класса систем нелинейных функциональных уравнений.— В кн.: Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений. Киев, 1979, с. 49—53.
5. *Пелюх Г. П.* Исследование систем нелинейных функциональных уравнений с особенностями. — В кн.: Second International Symposium on Functional equations and inequalities. Debrecen, 1979, p. 28.
6. *Kuczma M.* Functional equations in a single variable.— Warszawa: PWN, 1968.— 383 p.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
25.05.82