УДК 514.17

В. В. Остапенко

Об одном условии почти выпуклости

В статье рассматриваются множества, удовлетворяющие некоторому условию почти выпуклости. Потребность в исследовании подобных множеств возникла в теории дифференциальных игр [1]. Ниже приводятся некоторые аналоги теорем отделимости для выпуклых множеств [2, 3] и изучаются вопросы сохранения условия почти выпуклости при определенных операциях.

Будем использовать такие обозначения: Z — конечномерное евклидово пространство; ∂X — множество всех граничных точек множества $X \subset Z$; $S(z, r) = \{y \in Z : \| y - z \| \leqslant r\}$, $S = S(0, 1)$; $h(z, X) = \inf\limits_{y \in X} \| z - y \|$ — расстояние между точкой и множеством; $\| \cdot \|$ — норма в пространстве Z.

Определение 1. *Множество M удовлетворяет условию почти выпуклости с константой $\varkappa \geqslant 0$, если для любых z_i и λ_i, $i \in I$ (I — конечное множество индексов), таких, что $z_i \in M$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i = 1$, выполняется $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i z_i \in M + \varkappa r^2 S$, где $r = \max\limits_{i,j \in I} \| z_i - z_j \|$. Если нет необходимости уточнять константу $\varkappa$, то будем просто говорить, что множество M почти выпукло.*

Всюду в дальнейшем предполагаем, что множество M замкнуто.

Лемма 1. *Пусть M удовлетворяет условию почти выпуклости с константой $\varkappa$. Тогда шар Σ радиуса $\rho \leqslant 1/(8\varkappa)$ может касаться множества M только в одной точке.*

Доказательство. Пусть Σ касается M в точках $m_1 \neq m_2$ и $\| m_1 - m_2 \| = r$. Из геометрических соображений и ограничения на радиус шара Σ получаем противоречие

$$h(0{,}5(m_1 + m_2), M) \geqslant \rho - \sqrt{\rho^2 - 0{,}25 r^2} > \varkappa r^2.$$

Теорема 1. *Пусть M удовлетворяет условию почти выпуклости с константой $\varkappa > 0$, $m_0 \in \partial M$ и шар $S(z_0, \rho)$, $0 < \rho < 1/(8\varkappa)$, касается множества M в точке m_0. Проведем прямую через точки z_0 и m_0 и пусть l — луч данной прямой с началом в z_0, не содержащий точки m_0; z_* — точка на l такая, что $\sigma = \| m_0 - z_* \| \leqslant 1/(8\varkappa)$. Тогда шар $S(z_*, \sigma)$ касается множества M в точке m_0.*

Доказательство. Предположим, что существует такое σ_1 ($\rho \leqslant \sigma_1 \leqslant 1/(8\varkappa)$), что для $\sigma \geqslant \sigma_1$ утверждение теоремы не выполняется. Без ограничения общности можно считать, что $\sigma_1 = \rho$. Тогда возможны два случая.

1. Существуют последовательности $z_n \to z_0$ и $m_n \to m_0$ такие, что $\| z_n - m_n \| = h(z_n, M)$, $m_n \neq m_0$, $m_n \in \partial M$, $z_n \in l$. Обозначим через γ гиперплоскость, касающуюся шара $S(z_0, \rho)$ в точке m_0, и пусть y_n — точка на границе $S(z_0, \rho)$, имеющая одну и ту же с точкой m_n ортогональную проекцию x_n на γ. Пусть $\dim Z = k$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ — координаты точки x в пространстве $\gamma - m_0$. Тогда сферы $\partial S(z_n, \| z_n - m_0 \|)$ и $\partial S(z_0, \rho)$ в окрестности точки m_0 можно описать соответственно функциями

$$g_n(x) = -\sqrt{\| z_n - m_0 \|^2 - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i^2} + \| z_n - m_0 \|,$$

$$g(x) = -\sqrt{\rho^2 - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i^2} + \rho.$$

По формуле Тейлора

$$g_n(x) = -\frac{2\|x\|^2}{\|z_n - m_0\|} + \omega_n(x), \quad g(x) = -\frac{2\|x\|^2}{\rho} + \omega(x),$$

где $\|\omega_n(x)\| \leqslant C\|x\|^3$, $\|\omega(x)\| \leqslant C\|x\|^3$. Нетрудно видеть, что константу C можно выбрать не зависящей от n. Оценим

$$|g_n(x) - g(x)| \leqslant \left| \frac{2}{\|z_n - m_0\|} - \frac{2}{\rho} \right| \|x\|^2 + C\|x\|^3 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\rho^2}\|z_n - z_0\|\,\|x\|^2 + 2C\|x\|^3.$$

Отсюда и в силу построения y_n и m_n

$$\|y_n - m_n\| \leqslant |g_n(x_n) - g(x_n)| \leqslant 2\rho^{-2}\|z_n - z_0\|\,\|x_n\|^2 +$$

$$+ 2C\|x\|^3 \leqslant 2\rho^{-2}[\|z_n - z_0\| + 2C\|m_n - m_0\|]\,\|m_n - m_0\|^2.$$

Таким образом, существует последовательность $C_n \to 0$ такая, что $\|y_n - m_n\| \leqslant C_n r_n^2$, где $r_n = \|m_n - m_0\|$. При достаточно большом n получаем противоречие:

$$h(0{,}5(m_n + m_0), M) \geqslant \rho - \sqrt{\rho^2 - 0{,}25 r_n^2 (1 + C_n)^2} - C_n r_n^2 > \varkappa r_n^2.$$

2. Существуют последовательности $z_n \to z_0$, $z_n \in l$ и m_n, сходящиеся к некоторой точке $m_* \neq m_0$, такие, что $m_n \in \partial M$, $\|z_n - m_n\| = h(z_n, M)$. В этом случае $m_* \in S(z_0, \rho)$ и, значит, $S(z_0, \rho)$ касается M в двух различных точках, что противоречит лемме 1.

Следствие 1. *Пусть множество M удовлетворяет условию почти выпуклости с константой $\varkappa$. Тогда для любой точки $m \in \partial M$ существует шар Σ_m радиуса $1/(8\varkappa)$, который касается M в точке m.*

Доказательство. Пусть $m_0 \in \partial M$. Тогда существует последовательность $z_n \bar{\in} M$, сходящаяся к точке m_0. Рассмотрим последовательность $m_n \in \partial M$ такую, что $\|z_n - m_n\| = h(z_n, M)$. В силу теоремы 1 для достаточно больших n существует последовательность шаров Σ_{m_n} с центрами в некоторых точках y_n и радиуса $1/(8\varkappa)$, которые касаются множества M в точках m_n. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность y_n сходящаяся и y_0 — ее предел. Нетрудно видеть, что шар $S(y_0, 1/(8\varkappa))$ касается множества M в точке m_0.

Отметим, что для компактных множеств M имеет место утверждение с точностью до константы, обратное теореме 1.

Теорема 2. *Пусть компактное множество M удовлетворяет условию: существует константа $\sigma > 0$ такая, что если шар $S(z_*, \rho)$, $0 < \rho < \sigma$, касается множества M в некоторой точке m_0, то шар $S(z_*, \|m_0 - z_*\|)$, $\|m_0 - z_*\| = \sigma$, также касается множества M в точке m_0, где z_* — точка на луче l, который содержится в прямой, проходящей через точки z^0 и m_0 с началом в z_0 и не содержит точки m_0. Тогда множество M почти выпукло.*

Доказательство. Предположим, что существуют $m_i \in M$ и $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ (I — конечное множество индексов) такие, что

$$z_0 = \sum_{i \in I} \lambda_i m_i \in M + \frac{1}{\sigma} r^2 S,$$

и $r = \max_{i,j \in I} \|m_i - m_j\| \leqslant \sigma/2$. Это означает, что шар $S(z_0, \rho)$, где $1/\sigma r^2 >$

$<\rho\leqslant r$, касается M в некоторой точке m_0. Пусть $\| m_{i_0} = z_* \| = \min_{i\in I} \| m_i - z_* \|$, где z_* — точка, построенная в условии теоремы. При $r\leqslant\sigma$, учитывая, что $\rho > r^2/\sigma$, получаем

$$\| m_{i_0} - z_m \| \leqslant \sqrt{0{,}25r^2 + (\sigma-\rho)^2} \leqslant \sqrt{\sigma^2 - 2r^2 + r^4/\sigma^2 + r^2/4} < \sigma,$$

т. е. шар $S(z_*, \sigma)$ не может касаться множества M. Таким образом, $\sum_{i\in I} \lambda_j m_i \in M + r^2/\sigma S$, если $r<\sigma/2$. Отсюда ввиду компактности M следует, что M удовлетворяет условию почти выпуклости с некоторой константой $\varkappa$.

Следствие 2. *Пусть ∂M — дважды непрерывно дифференцируемое многообразие размерности $\dim Z - 1$; M — компактное множество. Тогда M почти выпукло.*

Доказательство. Локально ∂M можно представить в виде $\partial M = \{z\in Z : g(z) = 0\}$, где $g(z)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция такая, что $\operatorname{grad} g(z) \neq 0$, $z\in\partial M$. Вектор нормали в точке $m \in \partial M$ имеет вид $\frac{\operatorname{grad} g(m)}{\|\operatorname{grad} g(m)\|}$. Из непрерывности $\frac{d^2}{dz^2} g(z)$ следует существование такого σ, что для всех $\rho\leqslant\sigma$ функция $\varphi(z) = z + \rho\frac{\operatorname{grad} g(z)}{\|\operatorname{grad} g(z)\|}$ обратима в некоторой окрестности множества ∂M.

Это означает, что шар с центром в $\varphi(m)$, где $m\in\partial M$, радиуса ρ касается M в единственной точке m. Отсюда ввиду произвольности ρ и компактности M нетрудно прийти к условию теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть $\beta(z)$ — множество всех точек из M, ближайших к z, M удовлетворяет условию почти выпуклости с константой $\varkappa$ и $\varepsilon \leqslant 1/(16\varkappa)$. Тогда на множестве $M + \varepsilon S$ отображение $\beta(z)$ является однозначным и удовлетворяет условию Липшица с константой $(1 + 16\varepsilon\varkappa)$.*

Доказательство. Однозначность $\beta(z)$ следует из леммы 1. Пусть $z, y\in M + \varepsilon S$ и, например, $z \overline{\in} M$ (случай, когда обе точки $z, y\in M$, тривиален). На луче, идущем из точки $\beta(z)$ через точку z, возьмем на расстоянии $1/(8\varkappa)$ от $\beta(z)$ точку x. По теореме 1 шар $S(x, 1/(8\varkappa))$ касается множества M в точке $\beta(z)$ и, значит, $\beta(y) \overline{\in} \operatorname{int} S(x, 1/(8\varkappa))$. Пусть l—отрезок, соединяющий точки $\beta(z)$ и $\beta(y)$ и s_x, s_y, s_z — ортогональные проекции на l точек x, y, z соответственно. Из геометрических соображений составим пропорцию $\|\beta(z) - z\|/\|\beta(z) - s_z\| = 1/(8\varkappa\|\beta(z) - s_x\|)$. Отсюда $\|\beta(z) - s_z\| \leqslant 8\varkappa\varepsilon\|\beta(z) - s_x\| \leqslant 4\varkappa\varepsilon\|\beta(z) - \beta(y)\|$. Аналогично $\|\beta(y) - s_y\| \leqslant 4\varkappa\varepsilon\|\beta(z) - \beta(y)\|$. Так как $\|s_z - s_y\| \leqslant \|z-y\|$, то $\|\beta(z) - \beta(y)\| \leqslant 8\varkappa\varepsilon\|\beta(z) - \beta(y)\| + \|z-y\|$. Отсюда, ввиду того, что $16\varepsilon\varkappa\leqslant 1$, получаем $\|\beta(z) - \beta(y)\| \leqslant \|z-y\|/(1-8\varkappa\varepsilon) \leqslant (1+16\varepsilon\varkappa)\|z-y\|$.

Следствие 3. *Пусть множество удовлетворяет условию почти выпуклости с константой x. Тогда для любого $\varepsilon\leqslant 1/(16\varkappa)$ множество $M + \varepsilon S$ удовлетворяет условию почти выпуклости с константой $4\varkappa$.*

Доказательство. Пусть $z_i\in M + \varepsilon S$, $i\in I$, I — конечное множество индексов. Представим $z_i = \beta(z_i) + s_i$, где $s_i\in\varepsilon S$. По теореме 3 $\max_{i,j\in I} \|\beta(z_i) + \beta(z_j)\| \leqslant (1 + 16/(16\varkappa)\varkappa) r = 2r$, где $r = \max_{i,j\in I}\|z_i - z_j\|$. Из условия почти выпуклости следует, что для любых $\lambda_j \geqslant 0$, $\sum_{i\in I}\lambda_i = 1$,

$$\sum_{i\in I}\lambda_i z_i = \sum_{i\in I}\lambda_i\beta(z_i) + \sum_{i\in I}\lambda_i s_i \in M + \varepsilon S + 4\varkappa r^2 S.$$

Введем обозначения $B(\alpha, M) = \partial M + \alpha S$, $W(\alpha, M) = B(\alpha, M)\cap M$, $l_{\alpha,M} : B(\alpha, M) \to \partial S = \{z\in Z : \|z\| = 1\}$ — некоторая непрерывная функция,

$$K(z, \omega, \lambda, l_{\alpha,M}) = \bigcup_{0\leqslant\tau\leqslant\omega} S(z + l_{\alpha,M}(z)\tau, \tau\lambda).$$

Определение 2. *Множество M удовлетворяет условию телесности с положительными константами α, ω, λ и функцией $l_{\alpha,M}$, если для любого $z \in W(\alpha, M)$ $K(z, \omega, \lambda, l_{\alpha,M}) \subset M$.*

Теорема 4. *Пусть замкнутые множества M_j, $j \in J$ (J — произвольное множество индексов), содержатся в некотором компакте K, удовлетворяют условию почти выпуклости с константой $\varkappa$ и существуют константа α и непрерывная функция $l: \overline{\bigcup_{j\in J} B(\alpha, M_j)} \to \partial S$ такие, что множества M_j удовлетворяют условию телесности с указанными в определении 2 константами и функцией $l_{\alpha,M_j}(z) = l(z)$, $z \in B(\alpha, M_j)$. Тогда множество $M = \bigcap_{j\in J} M_j$ почти выпукло.*

Доказательство. Пусть $z_i \in M$ и $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$. В силу почти выпуклости для любого $j \in J$ существует такое $m_j \in M_j$, что $\|\bar{z} - m_j\| \leqslant \varkappa r^2$, где $\bar{z} = \sum_{i\in I} \lambda_i z_i$, $r = \max_{i,j\in I} \|z_i - z_j\|$. Отсюда $\sup_{i,j\in J} \|m_i - m_j\| \leqslant 2\varkappa r^2$. С другой стороны, ввиду равномерной непрерывности функции $l(z)$ можно указать такие $\lambda_0 > 0$, $H \geqslant 0$, не зависящие от z_i и λ_i, что множество $N = \bigcap_{j\in J} K(m_j, \omega, \lambda_0, l_{\alpha,M_j}) \neq \varnothing$ и существует такое $y \in N$, что для любого $j \in J$ $\|y - m_j\| \leqslant H \sup_{i,j\in J} \|m_i - m_j\| \leqslant 2H\varkappa r^2$. Отсюда $\|\bar{z} - y\| \leqslant 3H\varkappa r^2$ и поскольку $N \subset M$, то $\bar{z} \in M + 3H\varkappa r^2$.

В теории дифференциальных игр важную роль играет следующая операция над множествами [5]: $A \overset{*}{-} B = \{z \in Z : z + B \subset A\}$. Из представления $M \overset{*}{-} \varepsilon S = \bigcap_{s\in\varepsilon S} (M + s)$ вытекает следствие.

Следствие 4. *Пусть компактное множество M удовлетворяет условию почти выпуклости и условию телесности с определенными в определении 2 константами и функцией. Тогда существуют константы $\varepsilon_0 > 0$ и $\varkappa_0 \geqslant 0$ такие, что для любого $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ множество $M \overset{*}{-} \varepsilon S$ удовлетворяет условию почти выпуклости с константой $\varkappa_0$.*

Теорема 5. *Пусть множество M удовлетворяет условию почти выпуклости с константой $\varkappa$. Тогда для любых ε, $\delta \leqslant 1/(16\varkappa)$, $\varepsilon \geqslant \delta$, $(M + \varepsilon S) \overset{*}{-} \delta S = M + (\varepsilon - \delta) S$.*

Доказательство. Предположим, что $z \in (M + \varepsilon S) \overset{*}{-} \delta S$, но $z \,\bar{\in}\, M + (\varepsilon - \delta) S$. Пусть $h(z, M) = \lambda$. Тогда $\lambda > \varepsilon - \delta$. По лемме 1 шар $S(z, \lambda)$ касается множества M в некоторой точке $m \in \partial M$. Проведем луч через точки m и z с началом в m и отложим на нем на расстоянии $\lambda + \delta$ от точки m точку y. По теореме 1 шар $S(y, \lambda + \delta)$ касается множества M в точке m. Следовательно, $h(y, M) = \lambda + \delta > \varepsilon$. Поскольку $y \in S(z, \delta)$, то это означает, что $S(z, \delta)$ не принадлежит множеству $M + \varepsilon S$, т. е. $z \,\bar{\in}\, (M + \varepsilon S) \overset{*}{-} \delta S$. Полученное противоречие показывает, что $(M + \varepsilon S) \overset{*}{-} \delta S \subset M + (\varepsilon - \delta) S$. Обратное включение следует из того, что если $z \in M + (\varepsilon - \delta) S$, то $z + \delta S \subset M + (\varepsilon - \delta) S + \delta S = M + \varepsilon S$, т. е. $z \in (M + \varepsilon S) \overset{*}{-} \delta S$.

Замечание. Теорема 5 является обобщением известного результата для выпуклых множеств [5].

1. *Остапенко В. В.* Приближение основных операторов в дифференциальных играх сближения — уклонения. Докл. АН УССР. Сер. А, 1981, № 2, с. 81—84.
2. *Чарин В. С.* Линейные преобразования и выпуклые множества.— Киев : Вища школа, 1978.— 192 с.
3. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ.— М.: Мир, 1973.— 273 с.
4. *Милнор Дж., Уоллес А.* Дифференциальная топология.— М. Мир, 1972.— 277 с.
5. *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры преследования.— Мат. сб. Новая сер., 1980, 112, № 3, с. 307—330.

Институт кибернетики
АН УССР

Поступила в редакцию
09.10.81