УДК 519.642

В. Д. Диденко

К приближенному решению обобщенной краевой задачи Римана

Пусть $\Gamma = \{\xi : |\xi| = 1\}$ — единичная окружность с центром в начале координат, разбивающая плоскость комплексного переменного z на две области: внутреннюю D^+ и внешнюю D^-.

Обобщенная краевая задача Римана заключается в отыскании кусочно-аналитической функции $\{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$ в плоскости с линией скачков Γ по краевому условию на Γ [1]

$$\varphi^+(\xi) = G_1(\xi)\varphi^-(\xi) + G_2(\xi)\overline{\varphi^-(\xi)} + f(\xi), \quad \xi \in \Gamma. \tag{1}$$

Как известно, к задачам вида (1) сводится проблема жесткости кусочно-регулярных поверхностей, а также различные задачи теории упругости.

Поскольку задача (1), вообще говоря, не разрешима в замкнутой форме, возникает вопрос о ее приближенном решении.

В этом направлении известно лишь несколько результатов (см., напр., [2]), основанных на аппроксимации коэффициентов $G_1(\xi)$, $G_2(\xi)$ рациональными функциями и последующем точном решении задачи (1) с рациональными коэффициентами. В [3] методами коллокации и механических квадратур построены приближенные решения задач, близких к задаче (1).

В предлагаемой статье изучаются вопросы применимости к задаче (1) методов редукции и коллокации в пространствах $H_\omega(\Gamma)$.

Установим оценки погрешностей приближения функций из $H_\omega(\Gamma)$ некоторыми специальными многочленами. Через $H_\omega[0, 2\pi]$ обозначим множество действительных 2π-периодических непрерывных вещественнозначных функций вещественной оси R, для которых конечна величина

$$\|f\|_{H_\omega[0,2\pi]} = \|f\|_{C[0,2\pi]} + \sup_{0<\delta<\pi} \frac{\omega(\delta, f)}{\omega(\delta)}, \tag{2}$$

где $\omega(\delta, f)$ — модуль непрерывности функции $f(s) \in C[0, 2\pi]$, а $\omega(\delta)$ — произвольный модуль непрерывности; $H_\omega^r[0, 2\pi]$ — множество функций $f(s) \in C[0, 2\pi]$, r-я производная которых $f^{(r)}(s) \in H_\omega[0, 2\pi]$.

Через $\mathcal{H}_n$ обозначим множество тригонометрических полиномов $t_n(s)$ степени не выше n вида

$$t_n(s) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos ks + b_k \sin ks. \tag{3}$$

Лемма 1. *Для любого полинома $t_n(s) \in \mathcal{H}_n$ и для любого модуля непрерывности справедливо неравенство*

$$\|t_n(s)\|_{H_\omega[0,2\pi]} \leqslant \left(1 + \frac{2}{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}\right)\|t_n(s)\|_{C[0,2\pi]}.$$

Доказательство. Оценим сверху отношение $\omega(\delta, t_n)/\omega(\delta)$. Для этого рассмотрим два случая: $0 < \delta < n^{-1}$ и $\delta \geqslant n^{-1}$. При $0 < \delta < n^{-1}$ из свойств модулей непрерывности и неравенства Бернштейна [4] получаем

$$\frac{\omega(\delta, t_n)}{\omega(\delta)} \leqslant \frac{\sup\limits_{\substack{0<h<\delta \\ 0<s<\pi}} |t_n(s+h) - t_n(s)|}{\sup\limits_{0<h<\delta} \omega(h)} \leqslant \sup_{\substack{0<h<\delta \\ 0<s<\pi}} \frac{h}{\omega(h)} \left| \frac{t_n(s+h) - t_n(s)}{h} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{n\omega\left(\frac{1}{n}\right)} \| t_n'(s) \|_C \leqslant \frac{2}{\omega\left(\frac{1}{n}\right)} \| t_n(s) \|_C.$$

Если же $\delta \geqslant n^{-1}$, то последнюю оценку легко получить, учитывая неубывание функции $\omega(\delta)$.

Лемма 2. *Пусть $f(s) \in H^1_\omega[0, 2\pi]$ и $t_n^*(s) \in \mathcal{H}_n$ — полином наилучшего равномерного приближения функции $f(s)$. Тогда справедлива оценка*

$$\| f(s) - t_n^*(s) \|_{H_\omega[0,2\pi]} \leqslant E_n(f) + \frac{24}{n\omega\left(\frac{1}{n}\right)} E_n(f'), \tag{4}$$

где $E_n(\varphi)$ — наилучшее равномерное приближение функции $\varphi(s) \in C[0, 2\pi]$.

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству предыдущей леммы.

Лемма 3. *Пусть $t_n^*(s) \in \mathcal{H}_n$ — полином наилучшего равномерного приближения функции $f(s) \in H^r_{\omega^{(1)}}[0, 2\pi]$, r — целое положительное число, и $\omega^{(2)}(\delta)$ — произвольный модуль непрерывности. Тогда имеет место неравенство*

$$\| f(s) - t_n^*(s) \|_{H_{\omega^{(2)}}[0,2\pi]} \leqslant \frac{d_1}{n^r} \Phi\left(\frac{1}{n}\right) \| f^{(r)} \|_{H_{\omega^{(1)}}[0,2\pi]}, \tag{5}$$

где $\Phi(\delta) = \omega^{(1)}(\delta)/\omega^{(2)}(\delta)$. *Если же $r = 0$ и функция $\Phi(\delta)$ почти не убывает на $[0, 1]$, то неравенство (5) справедливо и в этом случае (здесь и ниже постоянные d_i, $i = 1, 2, \ldots$, не зависят от n).*

Доказательство. Рассмотрим случай 1) $\delta \geqslant n^{-1}$.

$$\frac{\omega(\delta, f - t_n^*)}{\omega^{(2)}(\delta)} \leqslant \frac{2E_n(f)}{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}\right)} \leqslant \frac{2d_2\omega\left(\frac{1}{n}, f\right)}{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}\right)} \leqslant 2d_2\Phi\left(\frac{1}{n}\right) \| f \|_{H_{\omega^{(1)}}[0,2\pi]}.$$

2) $0 < \delta < n^{-1}$. Используя свойства модулей непрерывности [4], получаем

$$\frac{\omega(\delta, f - t_n^*)}{\omega^{(2)}(\delta)} \leqslant \frac{\omega(\delta, f) + \omega(\delta, t_n^*)}{\omega^{(2)}(\delta)} \leqslant \frac{(1 + d_3)\,\omega(\delta, f)}{\omega^{(2)}(\delta)} \leqslant$$

$$\leqslant (1 + d_3) \frac{\omega^{(1)}(\delta)}{\omega^{(2)}(\delta)} \cdot \frac{\omega(\delta, f)}{\omega^{(1)}(\delta)} \leqslant (1 + d_3)\, d_4 \Phi\left(\frac{1}{n}\right) \| f \|_{H_{\omega^{(1)}}[0,2\pi]}.$$

Тем самым неравенство (5) для $r = 0$ полностью доказано. Если же $r > 0$, то следует воспользоваться неравенством (4) и теоремами Джексона [4].

Из лемм 1—3 и неравенства треугольника непосредственно следует такая лемма.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы 3 и $t_n(s) \in \mathcal{H}_n$ — произвольный полином. Тогда $\forall n = 1, 2, \ldots$ справедливы неравенства*

$$\| f(s) - t_n(s) \|_{H_{\omega^{(2)}}[0,2\pi]} \leqslant \frac{d_5}{n^r} \Phi\left(\frac{1}{n}\right) \| f^{(r)} \|_{H_{\omega^{(1)}}[0,2\pi]} +$$

$$+\left(1+\frac{2}{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}\right)}\right)\|f(s)-t_n(s)\|_{C[0,2\pi]}. \qquad (6)$$

Замечание 1. Неравенство (6) доказано в предположении, что $f(s)$—действительные непрерывные 2π-периодические функции. Легко видеть, что оно имеет место и в случае непрерывных комплекснозначных 2π-периодических функций, заданных на R.

Через $H_\omega = H_\omega(\Gamma)$ обозначим множество всех непрерывных (комплекснозначных) функций на единичной окружности Γ, для которых конечна величина (2). Учитывая теперь, что задача аппроксимации таких функций многочленами вида $t_n(\xi)=\sum_{k=-n}^{n} a_k\xi^k$, $\xi=\exp(is)$, эквивалентна задаче аппроксимации 2π-периодических функций на R тригонометрическими полиномами вида (3), получаем, что оценка (6) справедлива и для пространств $H_\omega(\Gamma)$.

Символом P_n всюду в дальнейшем обозначается оператор Лагранжа, т. е. оператор, ставящий в соответствие каждой функции из $H_\omega(\Gamma)$ ее интерполяционный полином

$$(P_nf)(\xi)=\sum_{k=-n}^{n} a_k\xi^k, \quad a_k=\frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n} f(\xi_j)\,\xi_j^{-k},$$

по узлам $\xi_j=\exp\left(\frac{2\pi i}{2n+1}\,j\right)$, $j=\overline{-n,n}$.

Аналогично, S_n — оператор Фурье,

$$(S_nf)(\xi)=\sum_{k=-n}^{n} a_k\xi^k, \quad a_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\,e^{-iks}ds.$$

Теорема 1. *Пусть $f(\xi)\in H^r_{\omega^{(1)}}(\Gamma)$, причем при $r=0$ функция $\Phi(\delta)$ почти не убывает. Тогда для любого $n=2,3,\ldots$ справедливы оценки*

$$\|f(\xi)-(U_nf)(\xi)\|_{H_{\omega^{(2)}}}\leqslant\frac{d_6}{n^r}\,\Phi\left(\frac{1}{n}\right)\ln n\,\|f^{(r)}(s)\|_{H_{\omega^{(1)}}}, \qquad (7)$$

где $U_n=P_n$ или $U_n=S_n$.

Неравенства (7) получаются из неравенств (6) на основании известных оценок (см., напр., [4]).

Рассмотрим приближенное решение обобщенной краевой задачи Римана.

Метод коллокации. Приближенное решение задачи (1) ищем в виде

$$\begin{aligned}\varphi_n^+(\xi)&=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(a_{1k}+\bar a_{2,-k-1})\,\xi^k+\frac{1}{2}\,a_{1n}\xi^n,\\ \varphi_n^-(\xi)&=\frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{-1}(a_{1k}+\bar a_{2,-k-1})\,\xi^k+\frac{1}{2}\,\bar a_{2n}\xi^{-n-1}.\end{aligned} \qquad (8)$$

Коэффициенты определяем из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_{1k}t_j^k&=G_1(t_j)\sum_{k=-n}^{-1} a_{1k}t_j^k+G_2(t_j)\sum_{k=0}^{n} a_{2k}t_j^{k+1}+f(t_j),\\ \sum_{k=-n}^{-1} a_{2k}t_j^{k+1}&=\overline{G_1(t_j)}\sum_{k=0}^{n} a_{2k}t_j^{k+1}+\overline{G_2(t_j)}\sum_{k=-n}^{-1} a_{1k}t_j^k+\overline{f(t_j)}, \quad j=\overline{-n,n}.\end{aligned} \qquad (9)$$

Метод редукции. Как и выше, приближенное решение нашей задачи ищем в виде (8), однако его коэффициенты $\{a_{1k}, a_{2k}\}$, $k = \overline{-n, n}$, находим из системы

$$a_{1j}\,\mathrm{sign}\,(1+\mathrm{sign}\,j) + \sum_{p=-n}^{-1} A^1_{j-p} a_{1p} + \sum_{p=-n}^{-1} B^1_{j-p} a_{2p} = f^1_j,$$

$$a_{2j}\,\mathrm{sign}\,(1+\mathrm{sign}\,j) + \sum_{p=-n}^{-1} A^2_{j-p} a_{1p} + \sum_{p=-n}^{-1} B^2_{j-p} a_{2p} = f^2_j, \tag{10}$$

где $A^1_j,\ A^2_j,\ B^1_j,\ B^2_j,\ f^1_j,\ f^2_j,\ j = 0, \pm 1, \ldots,$ — коэффициенты Фурье соответственно функций $(|G_2(\xi)|^2 - |G_1(\xi)|^2)\,\overline{G_1^{-1}(\xi)},\ \overline{\xi G_2(\xi)}\,\overline{G_1^{-1}(\xi)},\ -\xi G_2(\xi)\,\overline{G_1^{-1}(\xi)},\ -\overline{G_1^{-1}(\xi)},\ (G_1(\xi)\,\overline{f(\xi)} - G_2(\xi)\,f(\xi))\,\overline{G_1^{-1}(\xi)},\ \xi f(\xi)\,\overline{G_1^{-1}(\xi)}$.

Теорема 2. *Пусть функции* $G_1(\xi),\ G_2(\xi),\ f(\xi) \in H^r_{\omega^{(1)}},\ G_1(\xi) \neq 0$ *всюду на* Γ, *функция* $\Phi(\delta)$ *почти не убывает на* $[0, 1]$, *а правые и левые частные индексы матрицы*

$$G(\xi) = \begin{pmatrix} \dfrac{|G_1(\xi)|^2 - |G_2(\xi)|^2}{\overline{G_1(\xi)}} & \dfrac{\overline{\xi G_2(\xi)}}{\overline{G_1(\xi)}} \\ -\dfrac{\xi G_2(\xi)}{\overline{G_1(\xi)}} & \dfrac{1}{\overline{G_1(\xi)}} \end{pmatrix} \tag{11}$$

равны нулю. Кроме того, если модули непрерывности $\omega^{(1)}(\delta),\ \omega^{(2)}(\delta)$ *удовлетворяют условию*

$$\int_0^\pi \frac{\omega^{(i)}(\xi)}{\xi}\,d\xi < +\infty;\quad \int_0^\delta \frac{\omega^{(i)}(\xi)}{\xi}\,d\xi + \delta \int_\delta^\pi \frac{\omega^{(i)}(\xi)}{\xi^2}\,d\xi = O(\omega^{(i)}(\delta)),\qquad i = 1, 2, \tag{12}$$

и $\delta^r \Phi(\delta) \ln \delta \to 0$ *при* $\delta \to +0$, *то при достаточно больших* n *системы линейных алгебраических уравнений (9) и (10) однозначно разрешимы, и приближенные решения* $\varphi^+_n(\xi),\ \varphi^-_n(\xi)$ *с коэффициентами, найденными решением какой-либо из систем (9), (10), сходятся к точному решению* $\varphi^\pm(\xi)$ *задачи (1) со скоростью*

$$\|\varphi^\pm(\xi) - \varphi^\pm_n(\xi)\|_{H_{\omega^{(2)}}} \leqslant \frac{d_8}{n^r}\,\Phi\left(\frac{1}{n}\right) \ln n. \tag{13}$$

Приведем краткое доказательство теоремы 2. Пусть условие (12) выполнено для $\omega^{(1)}(\delta)$. Тогда аналогично [5] показываем, что оператор $T_a = aS - Sa$, где a — оператор умножения на функцию $a(\xi) \in H^r_{\omega^{(1)}}(\Gamma)$, а S — оператор сингулярного интегрирования вдоль Γ, является вполне непрерывным в пространстве $H^r_{\omega^{(1)}}$. Следовательно [5], матрица $G(\xi)$ допускает правую факторизацию $G(\xi) = G_-(\xi)\,G_+(\xi)$, причем $G_\pm(\xi) \in H^r_{\omega^{(1)}}(\Gamma)$. Последнее позволяет использовать результаты [5, 6] для обоснования применимости методов коллокации и редукции в пространстве $H_{2,\omega^{(2)}}(\Gamma)$ к матричной задаче Римана

$$\Phi^+(\xi) = G(\xi)\,\Phi^-(\xi) + g(\xi),\ \xi \in \Gamma, \tag{14}$$

где матрица $G(\xi)$ имеет вид (11), а $g(\xi) = \overline{G_1^{-1}(\xi)}\,\{\overline{G_1(\xi)}\,f(\xi) - \overline{f(\xi)\,G_2(\xi)},\ -\overline{\xi f(\xi)}\}$.

При этом из [5, 7] следует, что приближенные решения $\Phi^\pm_n(\xi)$ задачи (14), построенные по методу коллокации или редукции, сходятся к ее точному решению $\Phi^\pm(\xi)$ в пространстве $H_{2,\omega^{(2)}}$ со скоростью (13). Для завершения доказательства необходимо использовать известную связь между решениями краевой задачи (14) и решениями задачи (1).

Замечание 2. Приближенное решение (8), построенное выше, отличается от приближенных решений близких задач, рассмотренных в [5], что вызвано спецификой задачи (1).

Замечание 3. Предложенный метод приближенного решения обобщенной краевой задачи Римана без особых изменений может быть использован для построения приближенного решения других многоэлементных задач.

1. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.— М. : Наука, 1977.— 448 с.
2. *Юханонов Н. Н.* Об одной обобщенной краевой задаче сопряжения и ее приближенном решении.— Докл. АН ТаджССР, 1978, 21, № 7, с. 18—22.
3. *Кадушин В. П.* Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений с комплексно сопряженными неизвестными. — Изв. вузов. Математика, 1976, № 6, с. 109—113.
4. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М. : Наука, 1977.— 512 с.
5. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений.— М. : Мир, 1979.— 493 с.
6. *Иванов В. В.* Теория приближенных методов и ее приложения к численному решению сингулярных интегральных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1968.— 287 с.
7. *Габдулхаев Б. Г.* Некоторые вопросы теории приближенных методов, IV.— Изв. вузов. Математика, 1971, № 6, с. 15—23.

Одесский
государственный университет

Поступила в редакцию 11.06.81