УДК 517.5

В. И. Рукасов

Оценки отклонений интерполяционных тригонометрических полиномов с равноотстоящими узлами на классах непрерывных периодических функций многих переменных

Обозначим через $H_\omega^{(N)}$ класс непрерывных, 2π-периодических по каждой из переменных функций $f(t) = f(t_1, \ldots, t_N)$, которые удовлетворяют условию

$$|f(t) - f(t')| = |f(t_1, \ldots, t_N) - f(t'_1, \ldots, t'_N)| \leqslant \sum_{i=1}^{N} \omega_i(|t_i - t'_i|), \tag{1}$$

где $\omega_i(z_i)$, $i = \overline{1, N}$, — произвольные фиксированные модули непрерывности.

Пусть

$$S_n^*(f; x) = S^*_{n_1,\ldots,n_N}(f; x_1, \ldots, x_N) = \frac{2^N}{\prod\limits_{i=1}^{N}(2n_i+1)} \sum_{k_1=-n_1}^{n_1} \cdots \sum_{k_N=-n_N}^{n_N} f(x_1^{(k_1)}, \ldots$$

$$\ldots, x_N^{(k_N)}) \cdot \prod_{i=1}^{N} D_{n_i}(x_i - x_i^{(k_i)}) \overset{\text{def}}{=} \frac{2^N}{\prod\limits_{i=1}^{N}(2n_i+1)} \sum_{\substack{k_i=-n_i \\ i=\overline{1,N}}}^{n_i} f(x^{(k)}) D_n(x - x^{(k)}) \tag{2}$$

— тригонометрический интерполяционный полином порядка $n = (n_1, n_2, \ldots$ $\ldots, n_N)$, $n_i = 1, 2, \ldots$, $i = \overline{1, N}$, функции $f(t)$ в системе равноотстоящих узлов

$$x^{(k)} = (x_1^{(k_1)}, \ldots, x_i^{(k_i)}, \ldots, x_N^{(k_N)}), \quad x_i^{(k_i)} = \frac{2\pi k_i}{2n_i+1} = k_i h_{n_i},$$

$$k_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \; h_{n_i} = h_i = \frac{2\pi}{2n_i+1}, \; i = \overline{1, N}, \quad D_{n_i} = \frac{\sin\left(n_i + \frac{1}{2}\right) z_i}{2 \sin \frac{z_i}{2}} \tag{3}$$

— ядро Дирихле порядка n_i.

В данной статье мы рассматриваем поведение величины

$$\varepsilon_n^{(N)}(\omega, x) = \varepsilon_n^{(N)} = \sup_{f \in H_\omega^{(N)}} |f(x) - S_n^*(f; x)| \tag{4}$$

при условии, что координаты n_i вектора n неограниченно возрастают. Находим для этой величины асимптотические равенства, дающие полное решение задачи Колмогорова—Никольского (см. [1]), заключающееся в нахождении явного вида функции $\varphi(n) = \varphi(n, \omega, x)$ такой, что $\varepsilon_n^{(N)} = \varphi(n, \omega, x) + o[\varphi(n, \omega, x)]$.

При $N = 1$ эта задача была решена в [2], а при $N = 2$ — в [3].

Для произвольного N задача Колмогорова—Никольского на классах $H_\omega^{(N)}$ впервые была решена в работах [4, 5] в случае приближения частными суммами Фурье $S_n(f; x)$, интерполяционными аналогами которых являются полиномы $S_n^*(f; x)$.

Введенные в этих работах определения важных понятий, специфических для многомерного случая, доказанную в них лемму 1, а также предложенный метод построения экстремальной функции мы использовали при решении поставленной задачи.

Основной результат настоящей статьи составляет такая теорема.

Теорема 1. *При произвольном возрастании натуральных чисел* $n_1, n_2, \ldots, n_N$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$\varepsilon_n^{(N)} = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{g(m)\in J_N^m} \frac{2^{N-m-1}}{\pi^{N-m}} \min_{i\in C_{g(m)}} \{\omega_i(h_i)\} \prod_{i\in C_{g(m)}} \left|\sin\left(n_i+\frac{1}{2}\right)x_i\right| \ln n_i +$$

$$+ O\left(\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{g(m)\in J_N^m} \min_{i\in C_{g(m)}} \left\{\omega_i\left(\frac{1}{n_i}\right)\right\} \prod_{i\in C_{g(m)}} \left|\sin\left(n_i+\frac{1}{2}\right)x_i\right| \times\right.$$

$$\left.\times \sum_{\nu\in C_{g(m)}} \prod_{\substack{i\in C_{g(m)}\\ i\neq\nu}} \ln n_i + \sum_{i=1}^{N} \omega_i(\bar{x}_i)\right), \tag{5}$$

где J_N^m — *множество всевозможных* m-*мерных векторов* $g(m) = (g_1(m), \ldots, g_m(m))$, *координаты которых есть целые числа, удовлетворяющие неравенствам* $1 \leqslant g_1(m) < g_2(m) < \ldots < g_m(m) \leqslant N$, *а* $C_{g(m)}$ — *множество всех натуральных чисел, не превышающих* N *и отличных от координат вектора* $g(m)$, $\bar{x}_i = \min|x_i - x_i^{(k_i)}|$.

Если известен взаимный порядок стремления к нулю величин $\omega_i(h_i)$, то в этом случае равенство (5) значительно упрощается.

Теорема 1[1]. *Если при* $n_i \to \infty$, $i = \overline{1, N}$, *выполняются неравенства*

$$\omega_i(h_i) \leqslant \omega_{i+1}(h_{i+1}),\ i = \overline{1, N-1}, \tag{6}$$

то

$$\varepsilon_n^{(N)} = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{2^{N-m-1}}{\pi^{N-m}} \min_{i\neq\overline{1,m}} \{\omega_i(h_i)\} \prod_{i=m+1}^{N} \left|\sin\left(n_i+\frac{1}{2}\right)x_i\right| \ln n_i +$$

$$+ O\left(\sum_{m=0}^{N-1} \min_{i\neq\overline{1,m}} \left\{\omega_i\left(\frac{1}{n_i}\right)\right\} \prod_{i=m+1}^{N} \left|\sin\left(n_i+\frac{1}{2}\right)x_i\right| \sum_{\nu=m+1}^{N} \prod_{\substack{i=m+1\\ i\neq\nu}}^{N} \ln n_i + \sum_{i=1}^{N} \omega_i(\bar{x}_i)\right). \tag{7}$$

Простейшая экстремальная задача. Пусть фиксированная точка $x^{(k)} = (x_1^{(k_1)}, \ldots, x_i^{(k_i)}, \ldots, x_N^{(k_N)})$ N-мерного евклидового пространства R^N является одним из узлов системы (3). Отправляясь от нее, построим прямоугольник $P_k = [t : x_i^{(k_i)} \leqslant t_i \leqslant x_i^{(k_i+1)}]$, где $x_i^{(k_i+1)} = x_i^{(k_i)} + h_i$, $i = \overline{1, N}$. Ясно, что все вершины этого прямоугольника также являются узлами системы (3).

Пусть далее $H_\omega^{(N)}(P_k)$ — класс функций $f(t)$, которые в прямоугольнике P_k удовлетворяют условию (1).

Следуя [4], обозначим через $\Delta_{\rho_i}(f; t)$ частное приращение функции $f(t)$ в точке t, когда i-я координата точки t получает приращение $\rho_i(t_i) - t_i$, т. е.

$$\Delta_{\rho_i}(f; t) = f(t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_N) - f(t_1, \ldots, t_{i-1}, \rho_i(t_i), t_{i+1}, \ldots, t_N),\ i = \overline{1, N}.$$

Разумеется, предполагаем, что приращение аргумента не выводит точку из прямоугольника P_k.

Величина $\Delta_{\rho_i}(f; t)$ является функцией от t, поэтому имеют смысл выражения

$$\Delta_{\rho_l, \rho_i}(f; t) = \Delta_{\rho_l}(\Delta_{\rho_i}(f; t)), \quad i, l = \overline{1, N}, \ i \neq l.$$

Аналогично можно ввести величины

$$\Delta_{\rho_r, \rho_l, \rho_i}(f; t) = \Delta_{\rho_r}\Delta_{\rho_l, \rho_i}(f; t); t), \quad i, l, r = \overline{1, N}, \ l \neq i = r$$

и $\Delta_{\{\rho\}}(f; t) = \Delta_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N}(f; t)$.

В частности, если $t = x^{(k)}$ и $\rho_i\ (x_i^{(k_l)}) = x_i^{(k_l+1)}$, $i = \overline{1, N}$, то $\Delta_{\rho_i}(f; t) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_{k_i}(f; x^{(k)})$ и $\Delta_{\{\rho\}}(f; t) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_{\{k\}}(f; x^{(k)})$.

Применяя лемму 1 из работы [4] в случае, когда $t = x^{(k)}$, а $\rho_i(x_i^{(k_l)}) = x_i^{(k_l+1)}$, и используя введенные обозначения, имеем:

$$|\Delta_{\{k\}}(f; x^{(k)})| \leqslant 2^{N-1} \min_i \|\Delta_{k_i}(f; x^{(k)})\|_C. \tag{8}$$

Далее, при каждом фиксированном векторе k обозначим через J_N^m, $m \leqslant N$ множество всевозможных m-мерных векторов $j(m) = (j_1(m), \ldots, j_m(m))$, координаты которых — целые числа, удовлетворяющие неравенствам $1 \leqslant j_1(m) < j_2(m) < \ldots < j_m(m) \leqslant N$, а через $F_N^m(f)$ — множество всех значений $f(x_{j(m)})$ функции $f(t)$ в вершинах прямоугольника P_h, где $x_{j(m)}$ — такая вершина P_h, у которой координаты x_i с номерами $i = j_\mu(m)$, $\mu = \overline{1, m}$, равны $x_i^{(k_l+1)}$, а остальные равны $x_i^{(k_l)}$.

По определению положим $x_{j(0)} = x^{(k)}$. Если вектор $j(m)$ пробегает все множество J_N^m, то значения $f(x_{j(m)})$ функции $f(t)$ пробегают все множество $F_N^m(f)$. Число элементов множества J_N^m, а значит, и $F_N^m(f)$ равно C_N^m. Число же элементов множества $\bigcup_{m=0}^{N} J_N^m$, а следовательно, и множества $\bigcup_{m=0}^{N} F_N^m(f)$ равно 2^N. Таким образом, множество $\bigcup_m F_N^m(f)$ содержит значения $f(x_{j(m)})$ функции $f(t)$ во всех вершинах прямоугольника P_h.

Координаты вершины $x_{j(m)}$ с номерами $j_1(m), \ldots, j_\mu(m), \ldots, j_m(m)$ имеют соответственно номера узлов $k_{j_1(m)} + 1, \ldots, k_{j_\mu(m)} + 1, \ldots, k_{j_m(m)} + 1$. Положим $k_{j_\mu(m)} = l_\mu$, $\mu = \overline{1, m}$. Тогда эти координаты соответственно можно записать в виде $x_{j_1(m)}^{(l_1+1)}, \ldots, x_{j_\mu(m)}^{(l_\mu+1)}, \ldots, x_{j_m(m)}^{(l_m+1)}$.

Ядра $D_{n_l}(x_i - x_i^{(k_l)})$, когда $i = j_\mu(m)$, $\mu = \overline{1, m}$, имеют порядок $n_{j_\mu(m)}$. Положим $n_{j_\mu(m)} = r_\mu$, $\mu = \overline{1, m}$, и указанные ядра запишем в виде $D_{r_\mu}(x_{j_\mu(m)} - x_{j_\mu(m)}^{(l_\mu+1)})$, $\mu = \overline{1, m}$.

Отметим, что при изучении величины $\varepsilon_n^{(N)}(\omega, x)$ аналогично одномерному случаю (см. [2, 6]) можно считать, что $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N)$ удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant x_i \leqslant h_i/2, \ i = \overline{1, N}. \tag{9}$$

При этом, как показано в работе [2] при каждом фиксированном x_i значения функции $D_{n_i}(x_i - x_i^{(k_l)})$, $i = \overline{1, N}$, убывают при возрастании величин $|k_i|$ и

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} D_{n_l}(x_i - x_i^{(k_l)}) &= (-1)^{k_l+1}, \qquad k_i = 1, 2, \ldots, n_i, \\ \operatorname{sign} D_{n_i}(x_i - x_i^{(k_l)}) &= (-1)^{k_l}, \qquad k_i = 0, -1, -2, \ldots, -n_i. \end{aligned} \tag{10}$$

Учитывая это, представим каждую из функций $D_{n_i}(x_i - x_i^{(k_l)})$, $k_i \in [-n_i, n_i]$, в виде суммы двух слагаемых

$$D_{n_i}(x_i - x_i^{(k_i)}) = D_{n_i}^{(1)}(x_i - x_i^{(k_i)}) + D_{n_i}^{(2)}(x_i - x_i^{(k_i)}) \tag{11}$$

таким образом, чтобы выполнялись условия

$$D_{n_i}^{(2)}(x_i - x_i^{(k_i)}) + D_{n_i}^{(1)}(x_i - x_i^{(k_i+1)}) = 0, \tag{12}$$

$$D_{n_i}^{(2)}(x_i - x_i^{(n_i)}) = 0,\ D_{n_i}^{(1)}(x_i - x_i^{(-n_i)}) = 0.$$

Возвращаясь теперь к прямоугольнику P_k определим на нем величину

$$e_k(f;\, x) = \sum_{m=0}^{N} \sum_{j(m)\in J_N^m} f(x_{j(m)}) \prod_{\mu=1}^{m} D_{r_\mu}^{(1)}(x_{j_\mu(m)} - x_{j_\mu(m)}^{(l_\mu+1)}) \prod_{\substack{l=1\\ l\neq j_\mu(m)}}^{N} D_{n_l}^{(2)}(x_l - x_l^{(k_l)}). \tag{13}$$

Положим далее: $e_k(\omega, x) = \sup\limits_{f\in H_\omega^{(N)}(P_k)} e_k(f;\, x)$. Исследование величины $e_k(\omega, x)$ мы называем простейшей экстремальной задачей. В принятых обозначениях имеет место лемма.

Лемма 1. *Каковы бы ни были модули непрерывности* $\omega_i(t_i)$, $i = \overline{1, N}$,

$$e_k(\omega, x) = \frac{1}{2}\min_i \{\omega_i(h_i)\} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{N} \sum_{j(m)\in J_N^m} \left| \prod_{\mu=1}^{m} D_{r_\mu}^{(1)}(x_{j_\mu(m)} - x_{j_\mu(m)}^{(l_\mu+1)}) \prod_{\substack{l=1\\ l\neq j_\mu(m)}}^{N} D_{n_l}^{(2)}(x_l - x_l^{(k_l)}) \right|. \tag{14}$$

Доказательство. Согласно условиям (12) из (13) получаем

$$e_k(f;\, x) = \prod_{i=1}^{N} D_{n_i}^{(2)}(x_i - x_i^{(k_i)}) \Big[f(x_{j(0)}) - \sum_{j(1)\in J_N^1} f(x_{j(1)}) +$$

$$+ \sum_{j(2)\in J_N^2} f(x_{j(2)}) - \ldots + (-1)^N f(x_{j(N)}) \Big]. \tag{15}$$

Легко видеть, что из (15) следует

$$e_k(f;\, x) = \prod_{l=1}^{N} D_{n_l}^{(2)}(x_l - x_l^{(k_l)}) \cdot \Delta_{\{k\}}(f;\, x^{(k)}). \tag{16}$$

Отсюда, используя (8), получаем

$$e_k(f;\, x) \leqslant \left| \prod_{l=1}^{N} D_{n_l}^{(2)}(x_l - x_l^{(k_l)}) \right| 2^{N-1} \min_l \| \Delta_{k_l}(f;\, x) \|_{\mathcal{C}}. \tag{17}$$

Учитывая, что $f \in H_\omega^{(N)}(P_k)$, приходим к неравенству

$$e_k(f;\, x) \leqslant 2^{N-1} \min_i \{\omega_i(h_i)\} \left| \prod_{l=1}^{N} D_{n_l}^{(2)}(x_l - x_l^{(k_l)}) \right|. \tag{18}$$

На основании условий (12) справедливы соотношения

$$|D_{n_l}^{(2)}(x_l - x_l^{(k_l)})| = \frac{|D_{n_l}^{(2)}(x_l - x_l^{(k_l)})| + |D_{n_l}^{(1)}(x_l - x_l^{(k_l+1)})|}{2}, \quad i = \overline{1, N}. \tag{19}$$

Подставляя эти соотношения в (18), получаем

$$e_k(\omega, x) \leqslant \frac{1}{2}\min\{\omega_i(h_i)\} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{N} \sum_{j(m)\in J_N^m} \left| \prod_{\mu=1}^{m} D_{r_\mu}^{(1)} (x_{j_\mu(m)} - x_{j_\mu(m)}^{(l_\mu+1)}) \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j_\mu(m)}}^{N} D_{n_i}^{(2)} (x_i - x_i^{(k_i)}) \right|. \tag{20}$$

Покажем теперь, что соотношение (20) в действительности является равенством. Для этого достаточно показать, что в классе $H_\omega^{(N)}(P_k)$ найдется функция $f^*(t)$, для которой величина $e_k(f; x)$ совпадает с правой частью соотношения (20).

Положим

$$f_i^+(t_i) = \omega_i (x_i^{(k_i+1)} - t_i) - \frac{1}{2}\omega_i(h_i), \quad t_i \in [x_i^{(k_i)}, x_i^{(k_i+1)}], \quad i = \overline{1, N},$$

$$f_i^-(t_i) = \omega_i (t_i - x_i^{(k_i)}) - \frac{1}{2}\omega_i(h_i), \quad t_i \in [x_i^{(k_i)}, x_i^{(k_i+1)}], \quad i = \overline{1, N}. \tag{21}$$

Легко проверить, что

$$f_i^+(t_i) \in H_\omega^{(N)}(P_k) \text{ и } f_i^-(t_i) \in H_\omega^{(N)}(P_k). \tag{22}$$

Для определенности допустим, что

$$D_{n_i}^{(2)}(x_i - x_i^{(k_i)}) > 0, \quad i = \overline{1, N}, \tag{23}$$

и, используя функции $f_i^+(t_i)$, построим требуемую функцию $f^*(t)$.

Пусть $x_{i,0}$ — нуль функции $f_i^+(t_i)$ $i = \overline{1, N}$. Разобьем прямоугольник P_k на 2^N прямоугольников $P_{j(m)}$, $j(m) \in J_N^m$, $m = \overline{0, N}$,

$$P_{j(m)} = [t \in P_k : x_{j_\mu(m),0} \leqslant t_{j_\mu(m)} \leqslant x_{j_\mu(m)}^{(l_\mu+1)}, \ \mu = \overline{1, m}; \qquad x_i^{(k_i)} \leqslant t_i \leqslant x_{i,0},$$

$$i = \overline{1, N}, \ i \neq j_\mu(m)]. \tag{24}$$

Далее в каждом из этих прямоугольников определим множества $E_{j(m)}^\nu$ следующим образом. Если m — число четное, то

$$E_{j(m)}^\nu = \{t \in P_{j(m)}, \min_{\mu, i} (-f_{j_\mu(m)}^+(t_{j_\mu(m)}), f_i^+(t_i)) = \alpha_{j(m)}^\nu f_\nu^+(t_\nu)\},$$

где $|\alpha_{j(m)}^\nu| = 1$, $\nu = \overline{1, N}$.

Если m — нечетное, то

$$E_{j(m)}^\nu = \{t \in P_{j(m)}, \max_{\mu, i} (f_{j_\mu(m)}^+(t_{j_\mu(m)}), -f_i^+(t_i)) = \alpha_{j(m)}^\nu f_\nu^+(t_\nu)\},$$

где также $|\alpha_{j(m)}^\nu| = 1$, $\nu = \overline{1, N}$.

Ясно, что множества $E_{j(m)}^\nu$ не пустые и имеют внутренние точки. Кроме того, очевидно,

$$\bigcup_\nu E_{j(m)}^\nu = P_{j(m)}, \ \bigcup_m \left(\bigcup_{j(m)} \left(\bigcup_\nu E_{j(m)}^\nu \right) \right) = P_k. \tag{25}$$

Положим

$$f^*(t) = \alpha_{j(m)}^\nu f_\nu^+(t_\nu), \ t \in E_{j(m)}^\nu, \ \nu = \overline{1, N}, \ j(m) \in J_N^m, \ m = \overline{0, N}. \tag{26}$$

Соотношение (26) определяет функцию $f^*(t)$ на всем P_k.

Аналогично тому, как доказывается непрерывность функции, экстремальной в лемме 2 из работы [4], может быть доказано, что $f^*(t)$ является непрерывной на P_k.

С другой стороны, легко проверить, что для любых двух точек t' и t'' из P_k выполняется условие

$$|f^*(t') - f^*(t'')| \leqslant \max_{i=\overline{1,N}} |f_i^+(t_i') - f_i^+(t_i'')|.$$

Следовательно, в силу (22) $f^*(t) \in H_\omega^{(N)}(P_k)$. Далее имеем

$$e_k(f^*; x) = \frac{1}{2}\min_i\{\omega_i(h_i)\}\sum_{m=0}^{N}\sum_{j(m)\in J_N^m}\left|\prod_{\mu=1}^{m} D_{r_\mu}^{(1)}(x_{j_\mu(m)} - x_{j_\mu(m)}^{(l_\mu+1)})\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j_\mu(m)}}^{N} D_{n_i}^{(2)}(x_i - x_i^{(k_i)})\right|. \qquad (27)$$

Соотношения (20) и (27) доказывают справедливость леммы.

Оценки отклонений интерполяционных тригонометрических полиномов с равноотстоящими узлами на классе $H_\omega^{(N)}$. Получим оценку сверху для величины (4). В силу периодичности функций $f(t)$ и линейности оператора $S_n^*(f; x)$

$$\varepsilon_n^{(N)} = \sup_{f\in H_{\omega,x}^N} |S_n^*(f; x)|, \qquad (28)$$

где через $H_{\omega,x}^{(N)}$ обозначено подмножество функций $f(t)$ из класса $H_\omega^{(N)}$, обращающихся в данной точке x в нуль.

Согласно (2) имеем

$$S_n^*(f; x) = \frac{2^N}{\prod_{i=1}^{N}(2n_i+1)}\sum_{m=0}^{N}\sum_{g(m)\in J_N^m}\sum_{\substack{\beta_\mu=-\delta_\mu\\ \mu=\overline{1,m}}}^{0}\sum_{\substack{k_i=1\\ i=\overline{1,N}\\ i\neq g_\mu(m)}}^{n_i} f(x^{(k)})D_n(x - x^{(k)}), \qquad (29)$$

где $\beta_\mu = k_{g_\mu(m)}$, $\delta_\mu = n_{g_\mu(m)}$.

Заменяя в последнем равенстве каждое из ядер $D_{n_i}(x_i - x_i^{(k_i)})$ соответствующей суммой двух слагаемых согласно условиям (12) и затем представляя правую часть (29) посредством величин (13), на основании соотношения (28) и леммы 1 после преобразований получим

$$\varepsilon_n^{(N)} \leqslant \Lambda(n, \omega, x), \qquad (30)$$

где через $\Lambda(n, w, x)$ обозначена правая часть соотношения (5).

Если допустить, что выполнено условие (6) и через $\lambda(n, w, x)$ обозначить правую часть (7), то получаем

$$\varepsilon_n^{(N)} \leqslant \lambda(n, \omega, x). \qquad (31)$$

Экстремальную функцию $f^*(t)$, обращающую (31) (а так как условие (6) не является принципиальным, то и (30)) в равенство, можно построить, следуя методу, предложенному в работах [4, 5].

1. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами.— Киев : Наук. думка, 1981.— 339 с.
2. *Никольский С. М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами.— Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1945, 15, с. 1—76.
3. *Гаврилюк В. Т.* Асимптотические оценки уклонений тригонометрических интерполяционных полиномов с равноотстоящими узлами на классе периодических функций $H^{\omega_1\omega_2}$. — В кн.: Исследования по теории аппроксимации функций. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981, с. 6—12.
4. *Степанец А. И.* Оценки отклонений частных сумм Фурье на классах непрерывных периодических функций многих переменных.— Изв. АН СССР, Сер. мат. 1980, **44**, № 5, с. 1150—1190.
5. *Степанец А. И.* Приближение суммами Фурье непрерывных периодических функций многих переменных.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1977.— 47 с.
6. *Корнейчук Н. П.* Об асимптотической оценке остатка при приближении периодических функций, удовлетворяющих условию Липшица, интерполяционными многочленами с равноотстоящими узлами.— Укр. мат. журн., 1961, **13**, № 1, с. 100—106.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
04.12.81