УДК 517.925.3

А. Е. Родкина

О разрешимости уравнений нейтрального типа в различных функциональных пространствах

С помощью теоремы о неявной функции доказываются локальные теоремы существования решения задачи Коши для уравнения нейтрального типа

$$x'(t) = f(t, x_t, x'_{\tau(t)}),\ t \geqslant 0; \tag{1}$$

$$x(t) = 0,\ x'(t) = 0,\ t \leqslant 0, \tag{2}$$

где $x_t(s) = x(t+s)$, $s \in (-\infty, 0]$, $\tau(t) \leqslant t$, в различных функциональных пространствах. Главным требованием при этом является правосторонняя обратимость оператора $I - f_3'(\cdot, 0, 0)$. Доказаны теоремы единственности решения в случае, когда для f выполнены условия типа условий Осгуда по x_t. Сформулированы условия, при которых двухсторонняя обратимость оператора $I - f_3'(\cdot, 0, 0)$ в некотором смысле необходима для однозначной разрешимости задачи (1), (2). Близкие вопросы исследовались в работах [1, 2].

1. Обозначим через $E_i[0, T]$, $0 < T \leqslant T_0$, $i = 1,2,3$, банаховы пространства функций $x: (-\infty, T] \to R^n$, $x(s) = 0$ при $s \leqslant 0$, с нормой $\| x \|_{E_i[0,T]}$ такие, что для любого $x \in E_i[0, T]$ и $t_1 \leqslant t_2 \leqslant T_0$ $\| x_{t_1} \|_{E_i[0,t_1]} \leqslant \| x_{t_2} \|_{E_i[0,t_2]}$.

Пусть $(Jy)(t) = \int_0^t y(s)\, ds$, $t \in [0, T]$, $y \in E_2[0, T]$ и

I) оператор $J: E_2[0, T] \to E_3[0, T]$ вполне непрерывен;

II) $\| Jy \|_{E_3[0,T]} \leqslant K(T) \| y \|_{E_2[0,T]}$, где $K(T) \to 0$ при $T \to 0$.

Нетрудно убедиться в том, что условия I), II) выполнены для следующих троек пространств:

$$C_T^{1(\alpha)},\ C_T^{\alpha},\ C_T^{\beta},\ 0 \leqslant \alpha < \infty,\ 0 \leqslant \beta < \alpha + 1; \tag{3}$$

$$W_\infty^{1(\alpha)}[0, T],\ L_\infty^{\alpha}[0, T],\ C_T^{\beta},\ 0 \leqslant \alpha < \infty,\ 0 \leqslant \beta < \alpha + 1; \tag{4}$$

$$CH^{\alpha}[0, T],\ H^{\alpha}[0, T],\ H^{\beta}[0, T],\ 0 < \alpha \leqslant 1,\ \alpha \leqslant \beta \leqslant 1; \tag{5}$$

$$W_p^1[0, T],\ L_p[0, T],\ C_T,\ p > 1. \tag{6}$$

Все указанные выше пространства — это пространства некоторых функций $x: (-\infty, T] \to R^n$, $x_0 = 0$. C_T — пространство непрерывных функций с нормой $\| x \|_T = \sup\limits_{s \leqslant T} | x(s) |$, $|\cdot|$ — некоторая норма в R^n, $C_T^{\alpha} = \left\{ x \in C_T : \| x \|_T^{\alpha} = \sup\limits_{s \leqslant T} \left| \dfrac{x(s)}{s^{\alpha}} \right| < \infty \right\}$, $0 \leqslant \alpha < \infty$; $L_\infty^{\alpha}[0, T]$ — пространство ограниченных в существенном функций с нормой $\| x \|_{L_\infty^{\alpha}[0,T]} = \operatorname{vrai\,sup}\limits_{s \leqslant T} \left| \dfrac{x(s)}{s^{\alpha}} \right|$; $W_\infty^{1(\alpha)}[0, T]$ — пространство абсолютно непрерывных функций с нормой $\| x \|_{W_\infty^{1(\alpha)}[0,T]} = \| x' \|_{L_\infty^{\alpha}[0,T]}$; $C_T^{1(\alpha)}$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций с нормой

$$\| x \|_{C_T^{1(\alpha)}} = \| x' \|_T^{\alpha};\ H^{\alpha}[0, T] = \left\{ x \in C_T,\ \| x \|_{H^{\alpha}[0,T]} = \sup_{s,t} \left| \frac{x(t) - x(s)}{(t-s)^{\alpha}} \right| < \infty \right\},$$

$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$; $CH^{\alpha}[0, T]$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций с нормой $\| x \|_{CH^{\alpha}[0,T]} = \| x' \|_{H^{\alpha}[0,T]}$.

2. Пусть $\mathscr{L}(E_2[0, T] \to E_2[0, T])$ — пространство линейных ограниченных операторов $A: E_2[0, T] \to E_2[0, T]$, $\sigma(A)$ — спектр, $r(A)$ — спектральный радиус оператора A, $\operatorname{mes} e$ — лебегова мера множества $e \subset (-\infty, T]$.

Пусть в задаче (1), (2) $D(f) = \{(t, y, z): t \in [0, T_0], \quad y \in E_1[0, t], z \in E_2[0, \tau(t)]\}$, $E_1[0, T]$ непрерывно вложено в $E_3[0, T]$. Положим при $T \in [0, T_0]$, $u \in E_1[0, T]$, $v \in E_2[0, T]$

$$F(T, u, v)(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ v(t) - f(t, u_t, v_{\tau(t)}), & 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{7}$$

Предполагаем, что:

III) функция $f(t, u_t, v_{\tau(t)})$ лежит в $E_2[0, T]$ при $u \in E_1[0, T_0]$, $v \in E_2[0, T_0]$;

IV) $\| f(\cdot, u_{\cdot}, 0) \|_{E_2[0,T]} \to 0$ при $\| u \|_{E_1[0,T]} \to 0$, $T \to 0$;

V) $\| f(\cdot, u_{\cdot}, v_{\tau(\cdot)}) - f(\cdot, w_{\cdot}, v_{\tau(\cdot)}) \|_{E_2[0,T]} \to 0$ при $\| u - w \|_{E_3[0,T]} \to 0$, $u, w \in E_1[0, T]$, $v \in E_2[0, T]$;

VI) оператор F имеет производную Фреше по третьему аргументу $F_3'(T, u, v)$, причем функция

$$(u, v) \to F_3'(T, u, v) \in \mathscr{L}(E_2[0, T] \to E_2[0, T])$$

непрерывна в точке (0, 0) равномерно относительно параметра $T \in (0, T_0]$.

VII) для малых T существуют линейные операторы $A(T)$ такие, что $F_3'(T, 0, 0) \cdot A(T) = I$ и нормы $A(T)$ ограничены в совокупности.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* III)—VII). *Тогда задача (1), (2) при некотором $T > 0$ имеет по крайней мере одно решение $x \in E_1[0, T]$, причем $x' \in E_2[0, T]$.*

Доказательство. Сначала решим уравнение

$$F(T, u, v) = 0 \tag{8}$$

относительно v. Используя III), IV), VI), VII), нетрудно показать, что при малых T, u, w оператор $\Psi(T, u, w) = w - F(T, u, A(T)w)$ имеет единственную неподвижную точку w. Тогда $v = A(T)w = \Phi(T, u)$ — решение уравнения (8), причем для любого достаточно малого $c > 0$ можно подобрать числа a, b так, чтобы $\| \Phi(T, u) \|_{E_2[0,T]} \leqslant c$ при $T \in [0, a]$, $\| u \|_{E_1[0,T]} \leqslant b$. Кроме того, если выполнено V), то $\Phi(T, u)$ непрерывно по u, так как справедлива оценка

$$\| \Phi(T, u_1) - \Phi(T, u_2) \|_{E_2[0,T]} \leqslant d \| F(T, u_1, A(T)\Phi(T, u_1)) - \\ - F(T, u_2, A(T)\Phi(T, u_1)) \|_{E_2[0,T]} \tag{9}$$

при некотором $d > 0$.

Из сказанного следует, что любое решение задачи

$$x'(t) = \Phi(T, x_T)(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{10}$$

$$x(t) = 0, \quad t \leqslant 0, \tag{2}$$

является решением задачи (1), (2), если $\| x \|_{E_1[0,T]}$, $\| x' \|_{E_2[0,T]}$ и T достаточно малы.

Положим

$$\chi(T, y)(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ \Phi(T, (Jy)_T)(t), & 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Очевидно, что $\chi(T, y) \in E_2[0, T]$, если $y \in E_2[0, T]$. Пусть $\| y \|_{E_2[0,T]} < c$, $T < a$, и настолько мало, что

$$\| \Phi(T, 0) \|_{E_2[0,T]} < c/2, \quad \| \Phi(T, (Jy)_T) - \Phi(T, 0) \|_{E_2[0,T]} < c/2.$$

Тогда оператор $\chi(T, \cdot)$ вполне непрерывен и переводит шар радиуса c с центром в нуле в себя, поэтому имеет неподвижную точку y. Функция $x(t) = (Jy)(t)$ — решение задачи (1), (2). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2.1. Условие VII), в частности, выполнено, если оператор $F_3'(T, 0, 0)$ обратим и его обратный оператор ограничен по норме константой, не зависящей от T. Нетрудно убедиться, что это эквивалентно следующему условию:

VIII) задача $h(t) - f(t, 0, 0)\, h_{\tau(t)} = g(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$; $h(t) = g(t) = 0$, $t \leqslant 0$, однозначно разрешима в $E_2[0, T]$ для любых $g \in E_2[0, T]$, $T \in [0, T_1]$ (T_1 достаточно мало).

З а м е ч а н и е 2.2. Если в теореме 2.1 не требовать выполнения условия VIII), то можно утверждать, что любое решение задачи (10), (2) является решением (1), (2). Если выполнено VIII), то задачи (1), (2) и (10), (2) эквивалентны, причем (10) есть уравнение запаздывающего типа.

З а м е ч а н и е 2.3. Если функция f непрерывно зависит от некоторого параметра μ и в условии VII) оценка равномерна по μ, то из доказательства теоремы 2.1 нетрудно получить непрерывную зависимость решений задачи (1), (2) от параметра μ.

3. В этом пункте обсуждается выполнение условий теоремы 2.1.

Л е м м а 3.1 [2]. *В случае (3) условие VIII) выполнено, если*

$$|f_3'(t, 0, 0)\, h_{\tau(t)}| \leqslant b \| h \|_{\tau(t)}, \quad b \sup_{t \leqslant T} \left| \frac{\tau(t)}{t} \right|^{\alpha} < 1,$$

или

IX) $f_3'(t, 0, 0)\, h_{\tau(t)} = \sum_{i=1}^{N} B_i(t)\, h(\tau_i(t))$, $\tau_i(t) \leqslant \tau(t)$, *где* $B_i(t)$ — *матрицы с непрерывными коэффициентами, причем либо* $B_i(0)$ *одновременно нижне или верхне треугольные, либо* $B_i(0)$ *коммутируют между собой и*

$$\sum_{i=1}^{N} r(B_i(0)) \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \frac{\tau_i(t)}{t} \right|^{\alpha} < 1.$$

З а м е ч а н и е 3.1. Лемма 3.1 остается справедливой с некоторыми естественными изменениями в формулировке для (4) — (6). В случае (4) вместо $\sup_{t \leqslant T} \left| \frac{\tau_i(t)}{t} \right|^{\alpha}$ следует писать $\operatorname{vrai} \sup_{t \leqslant T} \left| \frac{\tau_i(t)}{t} \right|^{\alpha}$, в (5) — $\sup_{s,t} \left| \frac{\tau_i(t) - \tau_i(s)}{t - s} \right|^{\alpha}$, а в (8) — $r_{\tau_i}^{1/p}$, где $r_\tau = \sup_{\operatorname{mes} e > 0} \dfrac{\operatorname{mes} \tau^{-1}(e)}{\operatorname{mes} e}$.

З а м е ч а н и е 3.2. Предположим, что в IX) τ_i устроены специальным образом: $\tau_1(t) = \tau(t)$, $\tau_i(t) = \tau(\tau_{i-1}(t))$, т. е. все функции τ_i — итерации одной и той же функции τ. В этом случае условия IX) могут быть ослаблены: достаточно (и необходимо), чтобы $1 \overline{\in} \sigma_{\text{зап}} = \{\sigma(\varphi(\lambda)) : \lambda \in \sigma_{\text{зап}}(\mathscr{E})\}$, где $\sigma_{\text{зап}}(\mathscr{E})$ — запаздывающий спектр оператора $(\mathscr{E}h)(t) = h(\tau(t))$ в нуле, а $\varphi(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \lambda^i B_i(0)$ [3].

П р и м е р 3.1. Пусть выполнено (3) или (4), $\alpha = 0$, $N = 2$, $B_i(t) = I$, $\tau(t) > 0$ при $t > 0$ и ни в какой окрестности нуля $\tau(t) \not\equiv t$. Тогда $\sigma_{\text{зап}} = \{z + z^2 : |z| \leqslant 1,\ z \in \mathbf{C}\}$, поэтому VIII) имеет место, например, для такой задачи: $h(t) + (1 - \varepsilon)\, h(\tau(t)) + (1 - \varepsilon)\, h(\tau^2(t)) = g(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$; $h_0 = g_0 = 0$; $\varepsilon > 0$.

З а м е ч а н и е 3.3. Разрешимость уравнений, близких к приведенному в VIII), исследовалась в [4].

П р и м е р 3.2. Пусть $B(T)\, h(t) = 1/t \int_0^t h(s)\, ds$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Спектр этого оператора в пространстве $C_T(L_p[0, T])$ совпадает с кругом $\mathscr{D} = \{\zeta : \operatorname{Re} 1/\zeta \geqslant 1\}$ $\left(\mathscr{D} = \left\{\zeta : \operatorname{Re} 1/\zeta \geqslant \frac{p-1}{p}\right\}\right)$ и если ζ лежит внутри $\mathscr{D}$, то $\zeta I - B(T)$ имеет правый обратный $A(T)$ (см. [5]), норма которого ограничена независимо от T. Поэтому VII) выполнено, если $f_3'(\cdot, 0, 0) = \lambda B(T)$ при $\lambda \neq 1$ ($\lambda \neq p/(p-1)$), а VIII) — только при $0 < \lambda < 1$ ($0 < \lambda < p/(p-1)$).

З а м е ч а н и е 3.4. По поводу выполнения условий III)—V) в случае (3) см. в [2], (4) и (6) — в [6], (5) — в [7].

З а м е ч а н и е 3.5. Если рассматривается (6) и

$$f(t, x_t, x'_{\tau(t)}) = \tilde{f}(t, x(g(t, x)), x'(\tau(t))),$$

где $\tilde{f}$ — оператор суперпозиции, то производная F_3' существует, как показано [8], только для линейной по последнему аргументу функции $\tilde{f}$. Однако, если f — интегральный оператор, то это не так.

П р и м е р 3.3. Пусть

$$f(t, u_t, v_t) = \int_0^t \frac{Q[s, u(s), v(s)]}{|t-s|^\lambda} ds, \ t \in [0, T].$$

Здесь $\lambda < 1$, нелинейная по третьему аргументу функция $Q(s, a, b)$ такова, что оператор суперпозиции $Q[s, u(s), v(s)]$ при каждом $u \in C_T$ непрерывно действует из $L_p[0, T]$ в $L_{\frac{p}{1+p-\lambda p}}[0, T]$ и дифференцируем (см. подробные условия в [8]), а линейный типа потенциала оператор $\int_0^t \frac{x(s)\,ds}{|t-s|^\lambda}$ действует из $L_{\frac{p}{1+p-\lambda p}}[0, T]$ в $L_p[0, T]$, непрерывен, но не вполне непрерывен (доказательство этого факта близко к приведенному в [8]). Тогда, как показано в [8], соответствующий оператор F дифференцируем по последнему аргументу как оператор из $L_p[0, T]$ в $L_p[0, T]$, но не является линейным и вполне непрерывным.

Таким образом, задача (1), (2) локально разрешима, если оператор

$$C(T)h(t) = h(t) - \int_0^t \frac{Q_3'[s, 0, 0]h(s)}{|t-s|^\lambda} ds, \ t \in [0, T],$$

правосторонне обратим при малых T.

4. В этом пункте предполагается, что выполнено VIII). Из замечания 2.2 вытекает, что тогда однозначная разрешимость задачи (10), (2) влечет за собой однозначную разрешимость задачи (1), (2).

Т е о р е м а 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.2 и*

$$\| F(T, u_1, v) - F(T, u_2, v) \|_{E_2[0,T]} \leqslant b \| u_1 - u_2 \|_{E_3[0,T]}. \tag{11}$$

Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима в $E_1[0, T]$ при некотором $T > 0$.

Доказательство легко получить, используя II), (9), (11).

Т е о р е м а 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1, (3) (или (4)) и*

X) $|f(t, u_t, v_{\tau(t)}) - f(t, w_t, v_{\tau(t)})| \leqslant t^\alpha M(t, \| u - w \|_t^\beta)$, *где $M(t, a)$ монотонна, и система $u'(t) \leqslant At^{\alpha-\beta} M(t, u(t))$, $t \geqslant 0$, $u(0) = 0$, не имеет ненулевых неотрицательных неубывающих решений при любом $A > 0$. Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима в $C_T^{1(\alpha)}$ (или $W_\infty^{1(\alpha)}[0, T]$) при некотором $T > 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что имеет место (3), тогда

$$\| Jy \|_T^\beta \leqslant \int_0^T \frac{\| y \|_\tau^\alpha}{\tau^{\beta-\alpha}} d\tau.$$

Если x_1, x_2 — решения задачи (10), (2), то функция $u(t) = \int_0^t \| x_1' - x_2' \|_\tau^\alpha \tau^{\alpha-\beta} d\tau$ удовлетворяет системе из X), поэтому $x_1 \equiv x_2$.

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1, (6) *и* $|f(t, u_t, v_{\tau(t)}) - f(t, w_t, v_{\tau(t)})|^p \leqslant \mathcal{L}(t, (\| u - w \|_t)^p)$, *где* $\mathcal{L}(t, a)$ *монотонна по* a, $\mathcal{L}(\cdot, a)$ *суммируема и неравенство*

$$z(t) \leqslant A \int_0^t \mathcal{L}(s, z(s))\, ds$$

не имеет ненулевых неотрицательных неубывающих решений при любом $A > 0$. *Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима в* $W_p^1[0, T]$ *при некотором* $T > 0$.

Используя оценку (9), доказательство можно провести так же, как в [6].

5. Рассмотрим два уравнения

$$x'(t) = f(t, x_t, x_t') + \varphi(t), \ t \geqslant 0; \tag{1'}$$

$$x'(t) = \Phi_1(t, x_t, \varphi_t), \ t \geqslant 0, \tag{10'}$$

где

XII) $\Phi_1(t, u_t, \varphi_t) \in E_2[0, T]$ при $u \in E_1[0, T]$, $\varphi \in E_2[0, T]$,

и удовлетворяет условию Липшица по последнему аргументу.

Теорема 5.1. *Пусть для* f *выполнены условия III)—VI), для* Φ_1— *XII), IV), V) и*

$$\| f(\cdot, u_\cdot, v_\cdot) - f(\cdot, u_\cdot, w_\cdot) - f_3'(\cdot, 0, 0)(v_\cdot - w_\cdot) \|_{E_2[0,T]} \leqslant \omega(r) \| v - w \|_{E_2[0,T]}, \tag{12}$$

где $\| u \|_{E_1[0,T]}$, $\| v \|_{E_2[0,T]}$, $\| w \|_{E_2[0,T]} \leqslant r$, $\omega(r) \to 0$ *при* $r \to 0$. *Тогда, если задача* (1′), (2) *имеет единственное решение* x *при любом* $\varphi \in E_2[0, T]$ *и* x — *решение задачи* (10′), (2), *то оператор* $F_3'(T, 0, 0)$ *правосторонне обратим при достаточно малых* $T > 0$.

Доказательство. Пусть x' — производная решения задачи (1′) — (2) при некотором $\varphi \in E_2[0, T_1]$, $T_1 > 0$, тогда $x(t) = \Phi(\varphi_t)$, где $\Phi: E_2[0, t] \to E_2[0, t]$, $0 \leqslant t \leqslant T_1$, — некоторый непрерывный оператор (см. замечание 2.3). Уравнение (1′) перепишем в виде

$$x'(t) = f_3'(t, 0, 0)\, x_t' + \Omega(t, x_t, x_t') + f(t, x_t, 0) + \varphi(t),$$

где $\Omega(t, u_t, v_t) = f(t, u_t, v_t) - f(t, u_t, 0) - f_3'(t, 0, 0)\, v_t$. Тогда нетрудно видеть, что разрешимость уравнения $F_3'(T, 0, 0)\, h = g$ относительно $h \in E_2[0, T]$ вытекает из разрешимости уравнения

$$\Omega(t, (J\Phi\varphi)_t, [\Phi_1(\cdot, (J\Phi\varphi)_\cdot, \varphi_\cdot)]_t) + f(t, (J\Phi\varphi)_t, 0) + \varphi(t) = g(t) \tag{13}$$

относительно $\varphi \in E_2[0, T]$ при любых $g \in E_2[0, T]$, $\| g \|_{E_2[0,T]} \leqslant c$, где c и T достаточно малы.

Для доказательства разрешимости уравнения (13) рассмотрим оператор

$$G_1(g, u, v)(t) = g(t) - \Omega(t, (J\Phi u)_t, [\Phi_1(\cdot, (J\Phi u)_\cdot, v_\cdot)]_t) - f(t, (J\Phi u)_t, 0)$$

при $g, u, v \in E_2[0, T]$. Нетрудно проверить, что при достаточно малых u и v оператор G_1 вполне непрерывен по u и удовлетворяет условию Липшица по v. Поэтому из [9] вытекает, что оператор $G\varphi = G_1(g, \varphi, \varphi)$ является уплотняющим при любом g. Используя непрерывность Φ_1, Φ, f и оценку

$$\| G\varphi \|_{E_2[0,T]} \leqslant \| g \|_{E_2[0,T]} + k \| \varphi \|_{E_2[0,T]} + \| \Phi_1(\cdot, (J\Phi\varphi)_\cdot, 0) \|_{E_2[0,T]} + \\ + \| f(\cdot, (J\Phi\varphi)_\cdot, 0) \|_{E_2[0,T]},$$

легко показать, что оператор G при малых T и g переводит некоторый шар в себя, а поэтому имеет по крайней мере одну неподвижную точку.

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия III)—VI), (11), (12). Тогда задача (1′), (2) имеет единственное решение* x *при любом* $\varphi \in E_2[0, T]$ *и* $x'(t) = \Phi(\varphi_t)$, *где* Φ *удовлетворяет условию Липшица, тогда и только тогда, когда оператор* $F_3'(T, 0, 0)$ *обратим при всех достаточно малых* T *и* $[F_3'(T, 0, 0)]^{-1}$ *ограничены в совокупности.*

Доказательство. Достаточность. Из теорем 2.1 и 4.1 вытекает, что задача (1′), (2) однозначно разрешима и эквивалентна некоторой задаче (10′), (2), где Φ_1 удовлетворяет условию Липшица по x_t и φ_t. Отсюда легко получить выполнение условия Липшица для Φ.

Необходимость. В данных условиях оператор G из теоремы 5.1 (при определении которого теперь вместо $[\Phi_1(\cdot, (J\Phi\varphi).,\varphi.)]_t$ следует писать $(\Phi\varphi)_t$) является сжимающим, поэтому операторы $[F_3^1(T, 0, 0)]^{-1}$ однозначно определены, линейны и их нормы ограничены независимо от T (это вытекает из принципа равномерной ограниченности).

Теорема 5.3. *Пусть выполнены условия (3) (или(4)), III)—VI), X), (12). Тогда задача (1′), (2) имеет единственное решение при любом* $\varphi \in C_T^\alpha$ $(L_\infty^\alpha[0, T])$ *и эквивалентна некоторой задаче (10′), (2), в которой для* Φ_1 *выполнено IV), V), X), XII), тогда и только тогда, когда* F_3' $(T, 0, 0)$ *обратим в* C_T^α $(L_\infty^\alpha[0, T])$ *при всех достаточно малых* T *и* $[F_3'(T, 0, 0)]^{-1}$ *ограничены в совокупности.*

Доказательство. Достаточность вытекает из теоремы 2.1 и теоремы 4.2. Из теоремы 5.1 следует, что для доказательства необходимости осталось показать, что оператор G имеет единственную неподвижную точку. Предположим, что это не так, тогда найдутся такие φ_1, φ_2, $g \in C_T^\alpha$ (или $L_\infty^\alpha[0, T]$), что $G\varphi_1 = G\varphi_2 = g$, т. е. для $i = 1, 2$

$$\varphi_i(t) = g(t) - \Omega(t, (J\Phi\varphi_i)_t, (\Phi\varphi_i)_t) - f(t, (J\Phi\varphi_i)_t, 0),$$

где оператор Φ определен в теореме 5.1. Тогда

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_t^\alpha \leqslant k\|\Phi\varphi_1 - \Phi\varphi_2\|_t^\alpha + 3M(t, \|J\Phi\varphi_1 - J\Phi\varphi_2\|_t^\beta),$$

$$\|\Phi\varphi_1 - \Phi\varphi_2\|_t^\alpha \leqslant A_1 M(t, \|J\Phi\varphi_1 - J\Phi\varphi_2\|_t^\beta) + K\|\varphi_1 - \varphi_2\|_t^\alpha,$$

(так как $(\Phi\varphi_i)(t) = \Phi_1(t, (J\Phi\varphi_i)_t, (\varphi_i)_t)$), где k можно сделать как угодно малым, рассматривая малые окрестности нуля в C_T^α, C_T^β; A_1, $K > 0$ — некоторые константы. Отсюда при некотором $A_2 > 0$ $\|\Phi\varphi_1 - \Phi\varphi_2\|_t^\alpha \leqslant \leqslant A_2 M(t, \|J\Phi\varphi_1 - J\Phi\varphi_2\|_t^\beta)$. Доказательство завершается так же, как и в теореме 4.2.

Теорема 5.4. *Теорема 5.3 остается справедливой, если вместо (3) выполнено (6), вместо X)—XI), а вместо* C_T^α *всюду писать* $L_p[0, T]$.

Доказательство теоремы 5.4 повторяет доказательство теоремы 5.1 с соответствующими изменениями и ссылкой на теорему 4.3.

1. *Азбелев Н. В.* О нелинейных функционально-дифференциальных уравнениях.— Дифференц. уравнения, 1976, 12, № 11, с. 1923—1932.
2. *Родкина А. Е.* О существовании решений уравнений нейтрального типа. Воронеж, 1980.— 5 с. — Рукопись деп. в ВИНИТИ 14.10.80, № 4394—80 Деп.
3. *Курбатов В. Г.* О спектре операторов с соизмеримыми отклонениями аргументов.— Дифференц. уравнения, 1977, 13, № 10, с. 1770—1775.
4. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений.— Киев: Наук. думка, 1974.— 119 с.
5. *Кожокарь-Гончар М. Т.* О спектре операторов Чезаро.— Мат. исслед., 1972, 7, вып. 4, с. 94—103.
6. *Дядченко Ю. А.* К задаче Коши для уравнений нейтрального типа.— В кн.: Методы решений операторных уравнений. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1978, с. 22—27.
7. *Берколайко М. З.* О непрерывности оператора суперпозиции, действующего в обобщенных пространствах Гельдера.— В кн.: Сб. тр. аспирантов Воронеж. ун-та. Воронеж : Изд-во Воронеж. ун-та, 1970, с. 11—21.
8. *Интегральные операторы* в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский. М. : Наука, 1966.— 499 с.
9. *Родкина А. Е., Садовский Б. Н.* К принципу связности Красносельского—Перова.— Тр. мат. фак. Воронеж. ун-та, 1971, вып. 4, с. 89—103.

Воронежский
инженерно-строительный институт

Поступила в редакцию 12.06.81
после переработки — 23.03.82