УДК 517.938

В. Л. Кулик

Обратимость теоремы о расщепляемости линейных расширений динамических систем на торе

Из работ [1, 2], известно, что экспоненциальной отделимости решений системы линейных дифференциальных уравнений с почти периодическими или квазипериодическими коэффициентами, вообще говоря, не достаточно для того, чтобы линейным преобразованием переменных с почти периодической или квазипериодической матрицей преобразования расщепить исходную систему на подсистемы меньшего порядка. В работе [3] были приведены достаточные условия такой расщепляемости.

В предлагаемой статье приведено утверждение, которое является обращением теоремы 2 из [2].

В дальнейшем будем использовать такие обозначения: $C^q(\tau_m)$ — пространство функций $f(\varphi)$ скалярных, векторных или матричных, заданных на m-мерном торе τ_m, т. е. 2π-периодических по φ_j, $j=\overline{1, m}$, и непрерывно дифференцируемых по всем φ_j до порядка q включительно; $C^\circ(\tau_m)$ — пространство непрерывных функций, заданных на τ_m 6; $\langle\cdot,\cdot\rangle$—скалярное произведение в n-мерном евклидовом пространстве R^n, $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$; $\dot{x}=dx/dt$; E_r — r-мерная единичная матрица; $*$ — знак транспонирования.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\varphi}=a(\varphi),\quad \dot{x}=A(\varphi)x, \tag{1}$$

где $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $a(\varphi)$, $A(\varphi)\in C^q(\tau_m)$, $q\geqslant 1$.

Наряду с системой (1) будем рассматривать соответствующую систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=A(\varphi_t(\varphi))x, \tag{2}$$

где $\varphi_t(\varphi)$ — решение системы $\dot{\varphi}=a(\varphi)$ с начальным условием $\varphi_0(\varphi)=\varphi$.

Рассмотрим вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть имеется n-мерная симметричная матричная функция $S(\varphi)\in C^q(\tau_m)$, $q\geqslant 0$, удовлетворяющая условию положительной определенности, т. е.*

$$\min_{\|x=1\|}\langle S(\varphi)x, x\rangle \geqslant \gamma = \text{const}>0 \tag{3}$$

при всех $\varphi\in\tau_m$. Тогда существует невырожденная матричная функция $T(\varphi)\in C^q(\tau_m)$ такая, что

$$T^*(\varphi)S(\varphi)T(\varphi)\equiv E_n \tag{4}$$

при всех $\varphi\in\tau_m$.

Доказательство. Это утверждение хорошо известно в случае, когда матрица S постоянная [4]. Нам остается лишь следовать доказательству из [4] в случае переменной матричной функции $S(\varphi)\in C^q(\tau_m)$, $q\geqslant 0$. С этой целью распишем квадратичную форму $\langle Sx, x\rangle$

$$\langle S(\varphi)x, x\rangle = s_{11}(\varphi)x_1^2+\left(\sum_{i+2}^{n}s_{1i}(\varphi)x_i\right)x_1+\ldots+s_{nn}(\varphi)x_n^2.$$

Из оценки (3) следует, что $s_{11}(\varphi) \geqslant \gamma > 0$. Это позволяет записать квадратичную форму $\langle Sx, x\rangle$ в виде

$$\langle S(\varphi) x, x\rangle = s_{11}(\varphi)\left(x_1 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{s_{1i}(\varphi)}{s_{11}(\varphi)} x_i\right)\right)^2 + \bar{s}_{22}(\varphi) x_2^2 +$$

$$+ \left(\sum_{i=3}^{n} \bar{s}_{2i}(\varphi) x_i\right) x_2 + \cdots + \bar{s}_{nn}(\varphi) x_n^2.$$

Таким образом, после невырожденной замены переменных

$$z_1 = \sqrt{s_{11}(\varphi)}\, x_1 + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n} \frac{s_{1i}(\varphi)}{\sqrt{s_{11}(\varphi)}} x_i,\ z_i = x_i, \qquad i = \overline{2, n},$$

коэффициенты которой принадлежат $C^q(\tau_m)$, квадратичная форма $\langle Sx, x\rangle$ принимает вид

$$\langle ST_1Z, T_1Z\rangle = z_1^2 + \bar{s}_{22}(\varphi) z_2^2 + \left(\sum_{i=3}^{n} \bar{s}_{2i}(\varphi) z_i\right) z_2 + \ldots + \bar{s}_{nn}(\varphi) z_n^2.$$

Поскольку эта квадратичная форма остается по-прежнему определенно положительной, то $\bar{s}_{22}(\varphi) > 0$.

Продолжая аналогичные рассуждения убеждаемся в том, что при невырожденной замене переменных $x = T(\varphi)\, y \equiv T_1(\varphi) \ldots T_{n-1}(\varphi)\, y$ квадратичная форма $\langle S(\varphi) x, x\rangle$ приводится к сумме квадратов, т. е. имеет место тождество (4).

Лемма 2. *Пусть n-мерная симметричная матричная функция*

$$S(\varphi) = \begin{pmatrix} S_{11}(\varphi) & S_{12}(\varphi) \\ S_{21}(\varphi) & S_{22}(\varphi)\end{pmatrix}, \quad S_{12}^* = S_{21}, \quad S_{ii}^* = S_{ii}, \qquad i = 1, 2,$$

принадлежит пространству $C^q(\tau_m)$, $q \geqslant 0$ *и для квадратных блоков* S_{11} *и* S_{22} *соответственно r-мерного и (n — r)-мерного выполняются условия* $\langle S_{11}(\varphi) x_1, x_1\rangle \leqslant -\gamma \| x_1\|^2$, $\langle S_{22}(\varphi) x_2, x_2\rangle \geqslant \gamma \| x_2\|^2$, $\gamma = \mathrm{const} > 0$, *при всех* $\varphi \in \tau_m$, $x_1 \in R^r$, $x_2 \in R^{n-r}$. *Тогда существует невырожденная n-мерная матричная функция* $T(\varphi) \in C^q(\tau_m)$, *удовлетворяющая тождеству*

$$T^*(\varphi) S(\varphi) T(\varphi) = \mathrm{diag}\{-E_r, E_{n-r}\} \tag{5}$$

при всех $\varphi \in \tau_m$.

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму $\langle S(\varphi) x, x\rangle = \langle S_{11}(\varphi) x_1, x_1\rangle + 2\langle S_{12}(\varphi) x_2, x_1\rangle + \langle S_{22}(\varphi) x_2, x_2\rangle$. Учитывая лемму 1, невырожденной заменой переменных $x_1 = \bar{T}(\varphi)\, y_1$, $x_2 = \bar{\bar{T}}(\varphi)\, y_2$, $\bar{T}(\varphi), \bar{\bar{T}}(\varphi) \in C^q(\tau_m)$, приведем форму к виду $-\langle y_1, y_1\rangle + 2\langle \bar{T}^*(\varphi) S_{12}(\varphi) \bar{\bar{T}}(\varphi)\, y_2, y_1\rangle + \langle y_2, y_2\rangle = -\langle y_1, y_1\rangle - \langle M_{12}^*(\varphi) y_1, M_{12}^*(\varphi) y_1\rangle + \langle y_2 + M_{12}^*(\varphi) y_1, y_2 + M_{12}^*(\varphi) y_1\rangle = -\langle (E_r + M_{12}(\varphi) M_{12}^*(\varphi)) y_1, y_1\rangle + \langle z_2, z_2\rangle$, $M_{12} = \bar{T}^* S_{12} \bar{\bar{T}}$, где $z_2 = y_2 + M_{12}^*(\varphi) y_1$. Поскольку имеет место оценка

$$\langle (E_r + M_{12}(\varphi) M_{12}^*(\varphi)) y_1, y_1\rangle = \| y_1\|^2 + \| M_{12}^*(\varphi) y_1\|^2 \geqslant \| y_1\|^2,$$

то результат леммы 1 гарантирует приведение квадратичной формы $\langle (E_r + M_{12}(\psi) M_{12}^*(\varphi)) y_1, y_1\rangle$ невырожденной заменой переменных $y_1 = \tilde{T}(\varphi) z_1$ к сумме квадратов. Таким образом, выбирая в качестве матрицы $T(\varphi) \in C^q(\tau_m)$ матрицу

$$T(\varphi) = \begin{pmatrix} \bar{T}(\varphi)\tilde{T}(\varphi) & 0 \\ -\bar{T}(\varphi) M_{12}(\varphi) \tilde{T}(\varphi) & \bar{T}(\varphi)\end{pmatrix},$$

убеждаемся в выполнении тождества (5), что и завершает доказательство леммы 2.

Предположим теперь, что система уравнений (2) э-дихотомична на всей оси R равномерно по φ, т. е. при каждом фиксированном $\varphi \in T_m$ пространство R^n представимо в виде прямой суммы двух подпространств E^+ и E^- размерностей соответственно r и $n-r$ таким образом, что выполняются оценки

$$\begin{gathered} \| \Omega_0^t(\varphi; A) x^+ \| \leqslant K \| \Omega_0^\tau(\varphi; A) x^+ \| \exp\{-\beta(t-\tau)\}, \ \tau \leqslant t, \ x^+ \in E^+, \\ \| \Omega_0^t(\varphi; A) x^- \| \leqslant K \| \Omega_0^\tau(\varphi; A) x^- \| \exp\{\beta(t-\tau)\}, \ t \leqslant \tau, \ x^- \in E^-, \end{gathered} \tag{6}$$

где положительные постоянные K, β не зависят от $\varphi \in \tau_m$, $\Omega_\tau^t(\varphi; A)$ — матрицант системы уравнений (2), $\Omega_\tau^\tau = E_n$. Более того, предположим существование невырожденной n-мерной матричной функции $L(\varphi) \in C^s(\tau_m)$, $s \geqslant 1$, такой, что

$$L^{-1}(\varphi) A(\varphi) L(\varphi) - L^{-1}(\varphi) \frac{\partial L(\varphi)}{\partial \varphi} a(\varphi) = \operatorname{diag}\{A_r^+(\varphi), A_{n-r}^-(\varphi)\} \equiv \bar{A}(\varphi), \tag{7}$$

где A_r^+ и A_{n-r}^- — соответственно r-мерная и $(n-r)$-мерная квадратные матрицы из пространства $C^{\bar{s}}(\tau_m)$, где $\bar{s} = \min\{s, q\}$, причем для матрицантов $\Omega_\tau^t(\varphi; A_r^+)$, $(\Omega_\tau^t(\varphi; A_{n-r}^-)$ выполняются оценки

$$\begin{gathered} \| \Omega_\tau^t(\varphi; A_r^+) \| \leqslant K \exp\{-\beta(t-\tau)\}, \quad \tau \leqslant t, \\ \| \Omega_\tau^t(\varphi; A_{n-r}^-) \| \leqslant K \exp\{\beta(t-\tau)\}, \quad t \leqslant \tau. \end{gathered} \tag{6'}$$

Теорема 1. *Пусть система уравнений* (2) *э-дихотомична на всей оси R равномерно по φ и существует невырожденная матричная функция $L(\varphi) \in C^s(\tau_m)$, $s \geqslant 1$, осуществляющая блочное расщепление (7). Тогда для любой симметричной матричной функции $S(\varphi) \in C^q(\tau_m)$, $q \geqslant 1$, удовлетворяющей оценке*

$$\langle \left(\frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi} a(\varphi) + S(\varphi) A(\varphi) + A^*(\varphi) S(\varphi) \right) x, x \rangle \leqslant -\gamma \| x \|^2, \tag{8}$$

где $\gamma = \mathrm{const} > 0$, $x \in R^n$, существует матричная функция $T(\varphi) \in C^{\min\{q,s\}}(\tau_m)$, осуществляющая тождество (5).

Доказательство. Поскольку матрица $L(\varphi) \in C^s(\tau_m)$ осуществляет блочное расщепление (7), а $S(\varphi) \in C^q(\tau_m)$ удовлетворяет оценке (8), то при всех $y \in R^n$ выполняется неравенство

$$\langle \left(\frac{\partial \bar{S}(\varphi)}{\partial \varphi} a(\varphi) + \bar{S}(\varphi) \bar{A}(\varphi) + \bar{A}^*(\varphi) \bar{S}(\varphi) \right) y, y \rangle \leqslant -\gamma_1 \| y \|^2, \tag{8'}$$

где $\bar{S} = L^* S L$, $\gamma_1 = \mathrm{const} > 0$. Действительно, обозначая $\dfrac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi} a(\varphi) = \dot{S}$, оценку (8) запишем так: $\langle L^*(\dot{S} + SA + A^*S) Ly, y \rangle \leqslant -\gamma \| Ly \|^2$ или $\langle (L^*\dot{S}L + \dot{L}^*SL + L^*S\dot{L} - \dot{L}^*SL - L^*S\dot{L} + L^*SLL^{-1}AL + L^*A^*(L^*)^{-1} L^*SL) y, y \rangle \leqslant -\gamma \| L^{-1} \|^{-2} \| y \|^2$. Отсюда следует выполнение неравенства (8'), где $\gamma_1 = \min\limits_{\varphi} \| L^{-1}(\varphi) \|^{-2}$.

Теперь покажем, что матричная функция $\bar{S}(\varphi)$ удовлетворяет условиям леммы 2. Для этого запишем ее в блочном виде

$$\bar{S}(\varphi) = \begin{pmatrix} \bar{S}_{11}(\varphi) & \bar{S}_{12}(\varphi) \\ \bar{S}_{21}(\varphi) & \bar{S}_{22}(\varphi) \end{pmatrix}$$

и покажем, что оценка (8′) обеспечивает выполнение условий (3) для матриц $\bar{S}_{11}$, $\bar{S}_{22}$. Запишем (8′) в виде

$$\frac{d}{dt}\langle \bar{S}(\varphi_t(\varphi))\,\Omega_\tau^t(\varphi;\bar{A})\,y),\ \Omega_\tau^t(\varphi;\bar{A})\,y\rangle \leqslant -\gamma_1\|\Omega_\tau^t(\varphi;\bar{A})\,y\|^2$$

и проинтегрируем обе части от τ до t, $\tau\leqslant t$. Получаем

$$\langle \bar{S}(\varphi_t(\varphi))\,\Omega_\tau^t(\varphi;\bar{A})\,y,\ \Omega_\tau^t(\varphi;\bar{A})\,y\rangle - \langle \bar{S}(\varphi_\tau(\varphi))\,y,\,y\rangle \leqslant$$

$$\leqslant -\gamma_1\int_\tau^t \|\Omega_\tau^\sigma(\varphi;\bar{A})\,y\|^2\,d\sigma. \tag{9}$$

Теперь в оценке (9) положим $y=\operatorname{colon}\{y_1,0\}$, где y_1 — ненулевой r-мерный вектор

$$\langle \bar{S}_{11}(\varphi_t(\varphi))\,\Omega_\tau^t(\varphi;A_r^+)\,y_1,\Omega_\tau^t(\varphi;A_r^+)\,y_1\rangle - \langle \bar{S}_{11}(\varphi_\tau(\varphi))\,y_1 y_1\rangle \leqslant$$

$$\leqslant -\gamma_1\int_\tau^t \|\Omega_\tau^\sigma(\varphi;A_r^+)\,y_1\|^2\,d\sigma.$$

В полученном неравенстве перейдем к пределу при $t\to+\infty$ при этом учтем оценки (6′) и ограниченность функции $\bar{S}_{11}(\varphi_t(\varphi))$

$$-\langle \bar{S}_{11}(\varphi_\tau(\varphi))\,y_1,\,y_1\rangle \leqslant -\gamma_1\int_\tau^\infty \|\Omega_\tau^\sigma(\varphi;A_r^+)\,y_1\|^2\,d\sigma,$$

т. е.

$$\langle \bar{S}_{11}(\varphi)\,y_1,\,y_1\rangle \geqslant \gamma_1\int_0^\infty \|\Omega_0^\sigma(\varphi;A_r^+)\,y_1\|^2\,d\sigma.$$

Отсюда следует, что $\langle \bar{S}_{11}(\varphi)\,y_1,\,y_1\rangle \geqslant \bar{\gamma}_1\|y_1\|^2$, $\bar{\gamma}_1=\text{const}>0$. Аналогично убеждаемся в отрицательной определенности квадратичной формы $\langle \bar{S}_{22}(\varphi)y_2,\,y_2\rangle$. Таким образом, результат леммы 2 завершает доказательство теоремы 1.

Замечание 1. Аналогичный результат будет справедлив, если требовать меньшую гладкость от функций $a(\varphi)$, $A(\varphi)$, $S(\varphi)$. Можно предполагать, что $a(\varphi)\in C_{\mathrm{Lip}}(\tau_m)$, $A(\varphi)\in C^0(\tau_m)$, $S(\varphi)\in C'(\tau_m)$ (см. обозначения из [6]).

Замечание 2. Поскольку существуют э-дихотомичные линейные системы дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами [1], которые не расщепляются квазипериодической заменой переменных, то существуют невырожденные симметричные матричные функции $S(\varphi)\in C^q(\tau_m)$, $q\geqslant 1$ (даже среди тригонометрических полиномов), имеющие r собственных чисел отрицательных и $n-r$ положительных, для которых не существует гладкой матричной функции $T(\varphi)$, осуществляющей тождество (5).

С учетом результатов работы [5]. Сформулируем такую теорему.

Теорема 2. *Пусть n-мерная невырожденная симметричная матричная функция $S(\varphi)\in C^q(\tau_m)$ имеет одно собственное число отрицательное, а остальные — положительные и выполняется неравенство $m<n-1$, где m — количество переменных $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_m$, n — размерность матрицы $S(\varphi)$. Тогда существует n-мерная матричная функция $T(\varphi)$, непрерывно дифференцируемая по всем φ_j до порядка q включительно и, вообще говоря, 4π-периодическая по каждой переменной φ_i такая, что выполняется тождество* $T^*(\varphi)\,S(\varphi)\,T(\varphi)\equiv\operatorname{diag}\{-E_1,E_{n-1}\}$, $E_1=1$, *при всех* φ.

1. *О топологических причинах аномального поведения некоторых* почти периодических систем / Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, В. Я. Лин, О. В. Локуциевский.— В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. Киев : Наук. думка, 1977, с. 54—61.
2. *Бронштейн И. У.* Расширения минимальных групп преобразований.— Кишинев : Штиинца, 1975. —311 с.
3. *Самойленко А. М., Кулик В. Л.* К вопросу о существовании функции Грина задачи об инвариантном торе.— Укр. мат. журн., 1975, 27, № 3, с. 348—359.

4. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры.— М. : Наука, 1970.— 400 с.
5. *Самойленко А. М.* Квазипериодические решения системы линейных алгебраических уравнений с периодическими коэффициентами.— В кн.: Аналитические методы исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1975, с. 5—26.
6. *Самойленко А. М.* Необходимые условия существования инвариантных торов линейного расширения динамических систем на торе.—Дифференц. уравнения, 1980, 16, № 8, с. 1428—1437.
7. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1969.— 244 с.
8. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
26.03.81