УДК 517.5

А. С. Сердюк (Ін-т математики НАН України, Київ),
Т. А. Степанюк (Східноєвроп. нац. ун-т ім. Л. Українки, Луцьк)

ПОРЯДКОВІ ОЦІНКИ НАЙКРАЩИХ НАБЛИЖЕНЬ ТА НАБЛИЖЕНЬ СУМАМИ ФУР'Є В РІВНОМІРНІЙ МЕТРИЦІ КЛАСІВ ЗГОРТОК ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ НЕВЕЛИКОЇ ГЛАДКОСТІ

We obtain the exact order estimates of the best uniform approximations and uniform approximations by Fourier sums for the classes of convolutions of periodic functions from the unit balls of the spaces $L_p,\ 1 \le p < \infty$, with generating kernel Ψ_β for which the absolute values of Fourier coefficients $\psi(k)$ are such that $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, and the product $\psi(n)n^{1/p}$ cannot tend to zero faster than power functions.

Получены точные по порядку оценки наилучших равномерных приближений и равномерных приближений суммами Фурье классов сверток периодических функций, принадлежащих единичным шарам пространств L_p, $1 < p < \infty$, с производящим ядром Ψ_β, модули $\psi(k)$ коэффициентов Фурье которого таковы, что $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, а произведение $\psi(n)n^{1/p}$ не может стремиться к нулю быстрее степенных функций.

Позначимо через C простір 2π-періодичних неперервних функцій, в якому норму задано за допомогою рівності

$$\|f\|_C := \max_t \big|f(t)\big|;$$

L_p, $1 \le p \le \infty$, — простір 2π-періодичних сумовних функцій f зі скінченною нормою $\|f\|_p$, де

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_t \big|f(t)\big|, & p = \infty. \end{cases}$$

Нехай f — функція із L_1, ряд Фур'є якої має вигляд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Нехай, далі, $\psi(k)$ — довільна фіксована послідовність дійсних чисел і β — фіксоване дійсне число. Тоді якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції φ, то цю функцію називають (див., наприклад, [1, с. 132]) (ψ, β)-похідною функції f і позначають через f_β^ψ. Множину функцій f, у яких існує (ψ, β)-похідна, позначають через L_β^ψ.

Покладемо

$$B_p^0 := \Big\{ \varphi \in L_p \colon \|\varphi\|_p \le 1,\ \varphi \perp 1 \Big\}, \quad 1 \le p \le \infty.$$

Якщо $f \in L^{\psi}_{\beta}$ і водночас $f^{\psi}_{\beta} \in B^0_p$, то кажуть, що функція f належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}$. Позначимо також $C^{\psi}_{\beta} = C \cap L^{\psi}_{\beta}$, $C^{\psi}_{\beta,p} = C \cap L^{\psi}_{\beta,p}$.

Будемо розглядати послідовності $\psi(k)$ такі, що $\psi(k)k^{1/p}$ монотонно не зростає і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} < \infty, \qquad 1 < p < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Тоді з урахуванням леми 12.6.6 монографії [2, с. 193] та твердження 3.8.3 монографії [1, с. 139] функції f з множини $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p \le \infty$, для всіх $x \in \mathbb{R}$ зображуються за допомогою згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{\beta}(x-t)\varphi(t)dt, \quad \varphi \in B^0_p, \tag{1}$$

де

$$\Psi_{\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad \beta \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

і при цьому майже скрізь $\varphi = f^{\psi}_{\beta}$.

При $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, ядра $\Psi_{\beta}(t)$ вигляду (2) є ядрами Вейля – Надя $B_{r,\beta}(t)$,

$$B_{r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad \beta \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

а класи функцій f, що зображуються у вигляді

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} B_{r,\beta}(x-t)\varphi(t)dt, \quad \varphi \in B^0_p, \tag{4}$$

є відомими класами Вейля – Надя $W^r_{\beta,p}$, $1 < p < \infty$. Зрозуміло, що при $r > \dfrac{1}{p}$, $1 < p \le \infty$, для довільних $\beta \in \mathbb{R}$ має місце включення $W^r_{\beta,p} \subset C$.

Позначимо через $\mathfrak{M}$ множину всіх опуклих донизу, неперервних функцій $\psi(t)$, $t \ge 1$, таких, що $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0$. Будемо вважати, що послідовність $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, яка задає клас $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p \le \infty$, є звуженням на множину натуральних чисел функцій $\psi(t)$ із $\mathfrak{M}$.

Услід за О. І. Степанцем (див., наприклад, [1, с. 160]) за допомогою характеристики $\mu(\psi;t)$ функцій $\psi \in \mathfrak{M}$ вигляду

$$\mu(t) = \mu(\psi;t) := \frac{t}{\eta(t) - t}, \tag{5}$$

де $\eta(t) = \eta(\psi;t) := \psi^{-1}(\psi(t)/2)$, ψ^{-1} — обернена до ψ функція, з множини $\mathfrak{M}$ виділимо такі підмножини:

$$\mathfrak{M}_0 = \left\{\psi \in \mathfrak{M} \colon \exists K > 0 \ \forall t \ge 1 \ 0 < \mu(\psi;t) \le K < \infty\right\}, \tag{6}$$

$$\mathfrak{M}_C = \left\{\psi \in \mathfrak{M} \colon \exists K_1, K_2 > 0 \ \forall t \ge 1 \ K_1 \le \mu(\psi;t) \le K_2 < \infty\right\}, \tag{7}$$

$$\mathfrak{M}_\infty^+ = \big\{\psi \in \mathfrak{M}\colon \mu(\psi;t) \uparrow \infty\big\}.$$

В (6) і (7) K, K_1, K_2, взагалі кажучи, можуть залежати від ψ. Очевидно, що $\mathfrak{M}_C \subset \mathfrak{M}_0$. Зауважимо, що природними представниками множини $\mathfrak{M}_C$ є функції $\psi(t) = t^{-r}$, $r > 0$, множини $\mathfrak{M}_0 \setminus \mathfrak{M}_C$ — функції $\psi(t) = \ln^{-\varepsilon}(t+1)$, $\varepsilon > 0$, а множини $\mathfrak{M}_\infty^+$ — функції $e^{-\alpha t^r}$, $r > 0$, $\alpha > 0$.

Крім величини (5) для функцій $\psi \in \mathfrak{M}$ важливу роль відіграє характеристика

$$\alpha(\psi;t) := \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}, \qquad \psi'(t) := \psi'(t+0). \tag{8}$$

В [1, с. 160] було доведено, що необхідною і достатньою умовою належності функції $\psi \in \mathfrak{M}$ до множини $\mathfrak{M}_0$ є умова

$$\alpha(\psi;t) > K > 0 \quad \forall t \geq 1,$$

а необхідною і достатньою умовою того, щоб функція $\psi \in \mathfrak{M}$ належала до множини $\mathfrak{M}_C$, є умова

$$0 < K_1 \leq \alpha(\psi;t) \leq K_2 < \infty \quad \forall t \geq 1.$$

Якщо $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, то (див., наприклад, [3, с. 97]) множини C_β^ψ складаються з нескінченно диференційовних функцій. З іншого боку, як показано в [4, с. 1692], для кожної нескінченно диференційовної 2π-періодичної функції f можна вказати функцію ψ з множини $\mathfrak{M}_\infty^+$ таку, що $f \in C_\beta^\psi$ для довільних $\beta \in \mathbb{R}$.

Для класів $C_{\beta,p}^\psi$ будемо розглядати величини

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^\psi)_C = \sup_{f \in C_{\beta,p}^\psi} \big\|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\big\|_C, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

де $S_{n-1}(f;\cdot)$ — частинні суми Фур'є порядку $n-1$ функції f, а також найкращі рівномірні наближення класів $C_{\beta,p}^\psi$ тригонометричними поліномами порядку не вищого за $n-1$, тобто величини вигляду

$$E_n(C_{\beta,p}^\psi)_C = \sup_{f \in C_{\beta,p}^\psi} \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \big\|f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\big\|_C, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

де $\mathcal{T}_{2n-1}$ — підпростір усіх тригонометричних поліномів t_{n-1} порядку не вищого за $n-1$.

У роботі розв'язується задача про знаходження точних порядкових оцінок для величин $\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^\psi)_C$ і $E_n(C_{\beta,p}^\psi)_C$ при $1 < p < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Для класів Вейля – Надя $W_{\beta,p}^r$, $r > \dfrac{1}{p}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, точні порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n(W_{\beta,p}^r)_C$ і $E_n(W_{\beta,p}^r)_C$ є відомими (див., наприклад, [5, с. 47 – 49]). Крім того, для величин $\mathcal{E}_n(W_{\beta,\infty}^r)_C$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, при $n \to \infty$ встановлено асимптотичні рівності (див., наприклад, [6 – 8]), а для величин найкращих наближень $E_n(W_{\beta,\infty}^r)_C$ при усіх $n \in \mathbb{N}$, знайдено їх точні значення (див. роботи [8 – 13]).

Для класів $C_{\beta,p}^\psi$ при $p = 2$ і $\beta \in \mathbb{R}$ за умови $\sum_{k=1}^\infty \psi^2(k) < \infty$ в роботі [14] доведено рівність

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,2})_C = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^2(k) \right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

У статті [15] у випадку, коли $\psi \in B \cap \Theta_p$, де Θ_p, $1 \leq p < \infty$, — множина незростаючих функцій $\psi(t)$, для яких існує стала $\alpha > \dfrac{1}{p}$ така, що функція $t^{\alpha}\psi(t)$ майже спадає (тобто знайдеться додатна стала K така, що $t_1^{\alpha}\psi(t_1) \leq K t_2^{\alpha}\psi(t_2)$ для будь-яких $t_1 > t_2 \geq 1$), а B — множина незростаючих додатних функцій $\psi(t)$, $t \geq 1$, для кожної з яких можна вказати додатну сталу K таку, що $\dfrac{\psi(t)}{\psi(2t)} \leq K$, $t \geq 1$, показано, що існують додатні величини $K^{(1)}$ і $K^{(2)}$, які можуть залежати лише від ψ і p, такі, що для довільних $1 < p < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$ виконуються співвідношення

$$K^{(2)}\psi(n)n^{1/p} \leq E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \leq \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \leq K^{(1)}\psi(n)n^{1/p}. \tag{9}$$

У випадку $\psi \in \mathfrak{M}^+_{\infty}$ порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$ і $E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$, $1 \leq p < \infty$, знайдено в роботах [3, 16–18].

Мета даної роботи полягає у знаходженні двосторонніх оцінок для величин $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$ та $E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$, у випадку коли функція $g_p(t) = \psi(t)t^{1/p}$ належить до множини $\mathfrak{M}_0$ і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty, \quad 1 < p < \infty, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

При цьому сталі в отриманих оцінках будуть виражені через параметри класів в явному вигляді.

Теорема 1. *Нехай* $\psi(t)t^{1/p} \in \mathfrak{M}_0$ *і* $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty$, $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. *Тоді для довільних* $n \in \mathbb{N}$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$ *мають місце співвідношення*

$$K^{(1)}_{\psi,p} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} \right)^{1/p'} \leq \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \leq K^{(2)}_{\psi,p} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} \right)^{1/p'}, \tag{10}$$

в яких $K^{(1)}_{\psi,p}$ *і* $K^{(2)}_{\psi,p}$ *— додатні величини, що залежать лише від* ψ *і* p.

Доведення. Згідно з інтегральним зображенням (1), за виконання умов теореми для довільної функції $f \in C^{\psi}_{\beta,p}$ в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ справджується рівність

$$f(x) - S_{n-1}(f;x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{\beta,n}(x-t) f^{\psi}_{\beta}(t)dt, \qquad \|f^{\psi}_{\beta}\|_p \leq 1, \quad f^{\psi}_{\beta} \perp 1, \tag{11}$$

де

$$\Psi_{\beta,n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad \beta \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

З (11) і твердження 3.8.1 роботи [1, с. 137] одержуємо

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \leq \frac{1}{\pi} \big\|\Psi_{\beta,n}(\cdot)\big\|_{p'} \|f^{\psi}_{\beta}(\cdot)\|_p \leq \frac{1}{\pi} \big\|\Psi_{\beta,n}(\cdot)\big\|_{p'}, \quad 1 < p < \infty, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{13}$$

При знаходженні оцінки величини $\big\|\Psi_{\beta,n}(\cdot)\big\|_{p'}$ нам знадобиться така лема.

Лема 1. *Нехай* $1 < s < \infty$ *і* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *монотонно незростаюча послідовність додатних чисел така, що* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^s k^{s-2} < \infty$. *Тоді для* L_s*-норми функції*

$$h_{\gamma,n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \cos(kx + \gamma), \qquad \gamma \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

виконується нерівність

$$\|h_{\gamma,n}(x)\|_s \leq \xi(s) \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k^s k^{s-2} + a_n^s n^{s-1} \right)^{1/s}, \tag{14}$$

де

$$\xi(s) := \max \left\{ 4\Big(\frac{\pi}{s-1}\Big)^{1/s},\ 14(8\pi)^{1/s} s \right\}. \tag{15}$$

Доведення. Для довільних $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ і $1 < s < \infty$ маємо

$$\|h_{\gamma,n}(x)\|_s^s = \int_{-\pi}^{\pi} |h_{\gamma,n}(x)|^s dx =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{2n} \leq |x| \leq \pi} |h_{\gamma,n}(x)|^s dx + \int\limits_{|x| \leq \frac{\pi}{2n}} |h_{\gamma,n}(x)|^s dx = J_{s,n}^{(1)} + J_{s,n}^{(2)}, \tag{16}$$

де

$$J_{s,n}^{(1)} := \int\limits_{\frac{\pi}{2n} \leq |x| \leq \pi} |h_{\gamma,n}(x)|^s dx,$$

$$J_{s,n}^{(2)} := \int\limits_{|x| \leq \frac{\pi}{2n}} |h_{\gamma,n}(x)|^s dx.$$

Оцінимо величину $J_{s,n}^{(1)}$. Згідно з перетворенням Абеля для довільних $M, N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=M}^{N} a_k \cos(kx + \gamma) =$$

$$= \sum_{k=M}^{N-1} \Delta a_k \sum_{j=0}^{k} \cos(jx + \gamma) - a_M \sum_{j=0}^{M-1} \cos(jx + \gamma) + a_N \sum_{j=0}^{N} \cos(jx + \gamma), \tag{17}$$

де $\Delta a_k := a_k - a_{k+1}$.

Використовуючи формулу

$$\sum_{j=0}^{k} \cos(jx + \gamma) = \cos\left(\frac{k}{2}x + \gamma\right) \sin\frac{(k+1)x}{2} \operatorname{cosec}\frac{x}{2}$$

(див., наприклад, [19, с. 43]) та очевидну нерівність

$$\sin\frac{|x|}{2} \geq \frac{|x|}{\pi}, \quad 0 \leq |x| \leq \pi,$$

отримуємо

$$\left|\sum_{j=0}^{k}\cos(jx+\gamma)\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|} \leq \frac{\pi}{|x|}, \quad 0 < |x| \leq \pi. \tag{18}$$

З умов леми 1 випливає, що $a_k \to 0$ при $k \to \infty$. Тому з (17), (18) і того, що внаслідок монотонності послідовності a_k $\Delta a_k \geq 0$, одержуємо

$$\left|\sum_{k=M}^{\infty} a_k\cos(kx+\gamma)\right| \leq \frac{\pi}{|x|}\sum_{k=M}^{\infty}\Delta a_k + a_M\frac{\pi}{|x|} = a_M\frac{2\pi}{|x|}, \qquad 0 < |x| \leq \pi, \quad M \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

Використавши нерівність (19) при $M = n$, запишемо оцінку

$$J_{s,n}^{(1)} \leq (2\pi a_n)^s \int\limits_{\frac{\pi}{2n}\leq|x|\leq\pi} \frac{1}{|x|^s}dx < \frac{4^s\pi}{s-1}a_n^s n^{s-1}. \tag{20}$$

Оцінимо тепер величину $J_{s,n}^{(2)}$. Для довільних $l, n \in \mathbb{N}$, $l > n$,

$$|h_{\gamma,n}(x)| \leq \sum_{k=n}^{l-1} a_k + \left|\sum_{k=l}^{\infty} a_k\cos(kx+\gamma)\right|. \tag{21}$$

Покладемо

$$A_{n,l} := \sum_{k=n}^{l-1} a_k. \tag{22}$$

Беручи до уваги формули (21), (22) та використовуючи нерівність (19) при $M = l$, отримуємо

$$|h_{\gamma,n}(x)| \leq A_{n,l} + a_l\frac{2\pi}{|x|}, \quad 0 < |x| \leq \pi. \tag{23}$$

Для довільних $l \geq 2n$, $\dfrac{\pi}{l+1} < |x| \leq \dfrac{\pi}{l}$, $l, n \in \mathbb{N}$, внаслідок монотонного незростання послідовності a_k можемо записати

$$\frac{a_l\pi}{|x|} \leq a_l(l+1) = a_l(l-n+n+1) \leq a_l\big(2(l-n)+1\big) \leq 3a_l(l-n) \leq 3\sum_{k=n}^{l-1}a_k = 3A_{n,l}. \tag{24}$$

Об'єднуючи (23) і (24), записуємо

$$|h_{\gamma,n}(x)| \leq 7A_{n,l}, \qquad \frac{\pi}{l+1} < |x| \leq \frac{\pi}{l}, \quad l \geq 2n. \tag{25}$$

Із (25) випливає

$$J_{s,n}^{(2)} = \int\limits_{|x|\le\frac{\pi}{2n}} |h_{\gamma,n}(x)|^s dx = \sum_{l=2n}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{l+1}<|x|\le\frac{\pi}{l}} |h_{\gamma,n}(x)|^s dx \le 2\cdot 7^s \sum_{l=2n}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{l+1}}^{\pi/l} A_{n,l}^s dx \le$$

$$\le 2\pi 7^s \sum_{l=2n}^{\infty} \frac{A_{n,l}^s}{l^2} \le 2\pi 7^s \sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{A_{n,l}^s}{l^2}. \qquad (26)$$

При кожному фіксованому $n \in \mathbb{N}$ позначимо через $\alpha_n(t)$, $t \ge 0$, функцію, що означається таким чином:

$$\alpha_n(t) := \begin{cases} a_k, & k \le t < k+1,\ k \ge n, \\ 0, & 0 \le t < n. \end{cases}$$

При таких позначеннях має місце рівність $A_{n,l} = \int_0^l \alpha_n(t)dt$. Тоді

$$\sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{A_{n,l}^s}{l^2} = \sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{\left(\int_0^l \alpha_n(t)dt\right)^s}{l^2} = \sum_{l=n+1}^{\infty} \int\limits_l^{l+1} \frac{\left(\int_0^l \alpha_n(t)dt\right)^s}{l^2} dx \le$$

$$\le \sum_{l=n+1}^{\infty} \int\limits_l^{l+1} \frac{\left(\int_0^x \alpha_n(t)dt\right)^s}{(x-1)^2} dx = \int\limits_{n+1}^{\infty} \frac{\left(\int_0^x \alpha_n(t)dt\right)^s}{(x-1)^2} dx =$$

$$= \int\limits_{n+1}^{\infty} \frac{\left(\int_0^x \alpha_n(t)dt\right)^s}{x^2} dx + \int\limits_{n+1}^{\infty} \frac{\left(\int_0^x \alpha_n(t)dt\right)^s}{x^2} \frac{2x-1}{(x-1)^2} dx \le$$

$$\le \int\limits_{n+1}^{\infty} \frac{\left(\int_0^x \alpha_n(t)dt\right)^s}{x^2} dx + \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \int\limits_{n+1}^{\infty} \frac{\left(\int_0^x \alpha_n(t)dt\right)^s}{x^2} dx \le 4 \int\limits_{n}^{\infty} \frac{\left(\int_0^x \alpha_n(t)dt\right)^s}{x^2} dx. \quad (27)$$

Для оцінки останнього інтеграла нам буде корисним наступне твердження, встановлене Харді (див., наприклад, [20, с. 40]).

Лема 2. *Нехай $g(x)$ — невід'ємна функція, визначена для $x \ge 0$, і $r > 1$, $\sigma < r - 1$. Тоді якщо $g^r(x)x^\sigma$ є інтегровною на $(0,\infty)$, то функція $\left(\frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt\right)^r x^\sigma$ також є інтегровною на $(0,\infty)$ і при цьому виконується нерівність*

$$\int\limits_0^{\infty} \left(\frac{1}{x}\int\limits_0^x g(t)dt\right)^r x^\sigma dx \le \left(\frac{r}{r-\sigma-1}\right)^r \int\limits_0^{\infty} g^r(x)x^\sigma dx. \qquad (28)$$

Застосовуючи нерівність (28) при $g(\cdot) = \alpha_n(\cdot)$, $r = s$, $\sigma = s - 2$, одержуємо

$$\int\limits_n^\infty \frac{\left(\int_0^x \alpha_n(t)dt\right)^s}{x^2} dx \le s^s \int\limits_n^\infty \alpha_n^s(x) x^{s-2} dx = s^s \sum_{l=n}^\infty \int\limits_l^{l+1} a_l^s x^{s-2} dx \le (2s)^s \sum_{l=n}^\infty a_l^s l^{s-2}. \tag{29}$$

Формули (26), (27) і (29) дозволяють записати оцінку

$$J_{s,n}^{(2)} \le 8\pi (14s)^s \sum_{l=n}^\infty a_l^s l^{s-2}. \tag{30}$$

Об'єднуючи (16), (20) і (30), маємо

$$\left\| h_{\gamma,n}(x) \right\|_s^s = J_{s,n}^{(1)} + J_{s,n}^{(2)} \le \max\left\{ \frac{4^s \pi}{s-1}, 8\pi(14s)^s \right\} \left(\sum_{l=n}^\infty a_l^s l^{s-2} + a_n^s n^{s-1} \right), \tag{31}$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad 1 < s < \infty.$$

Із (31) випливає (14).

Лему 1 доведено.

Застосуємо до функції $\Psi_{\beta,n}(t)$ вигляду (12) лему 1, поклавши в її умовах $a_k = \psi(k)$, $\gamma = -\dfrac{\beta\pi}{2}$, $s = p'$. Тоді отримаємо оцінку

$$\|\Psi_{\beta,n}(t)\|_{p'} \le \xi(p') \left(\sum_{k=n}^\infty \psi^{p'}(k) k^{p'-2} + \psi^{p'}(n) n^{p'-1} \right)^{1/p'}, \quad 1 < p < \infty, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \tag{32}$$

де характеристика $\xi(p')$ означена рівністю (15).

Для будь-якої функції $\psi \in \mathfrak{M}$ через $\underline{\alpha}_n(\psi)$ і $\overline{\alpha}_n(\psi)$, $n \in \mathbb{N}$, позначимо величини

$$\underline{\alpha}_n(\psi) := \inf_{t \ge n} \alpha(\psi; t), \tag{33}$$

$$\overline{\alpha}_n(\psi) := \sup_{t \ge n} \alpha(\psi; t), \tag{34}$$

де характеристика $\alpha(\psi; t)$ означена формулою (8). У прийнятих позначеннях має місце таке твердження.

Лема 3. *Нехай $g_p(t) := \psi(t) t^{1/p}$, $\sum_{k=1}^\infty \psi^{p'}(k) k^{p'-2} < \infty$, $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді якщо $g_p \in \mathfrak{M}_0$, то виконується нерівність*

$$\psi^{p'}(n) n^{p'-1} \le \frac{p'}{\underline{\alpha}_n(g_p)} \sum_{k=n}^\infty \psi^{p'}(k) k^{p'-2}, \tag{35}$$

а якщо $g_p \in \mathfrak{M}_C$, то має місце співвідношення

$$\frac{p'}{\overline{\alpha}_n(g_p)} \frac{n\underline{\alpha}_n(g_p)}{p' + n\underline{\alpha}_n(g_p)} \sum_{k=n}^\infty \psi^{p'}(k) k^{p'-2} \le \psi^{p'}(n) n^{p'-1} \le \frac{p'}{\underline{\alpha}_n(g_p)} \sum_{k=n}^\infty \psi^{p'}(k) k^{p'-2}. \tag{36}$$

Доведення. Нехай $g_p \in \mathfrak{M}_0$. Встановимо нерівність (35).

Оскільки $g_p(t)$ монотонно спадає до нуля, то

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{g_p^{p'}(k)}{k} \geq \int_n^{\infty} \frac{g_p^{p'}(t)}{t} dt = \int_n^{\infty} \psi^{p'}(t) t^{p'-2} dt. \tag{37}$$

Застосувавши метод інтегрування частинами до останнього інтеграла із (37), отримаємо

$$\int_n^{\infty} \psi^{p'}(t) t^{p'-2} dt = \frac{-1}{p'-1} \psi^{p'}(n) n^{p'-1} - \frac{p'}{p'-1} \int_n^{\infty} \psi^{p'-1}(t) \psi'(t) t^{p'-1} dt =$$

$$= \frac{-1}{p'-1} \psi^{p'}(n) n^{p'-1} + \frac{p'}{p'-1} \int_n^{\infty} \frac{\psi^{p'}(t) t^{p'-2}}{\alpha(\psi; t)} dt. \tag{38}$$

З (38) випливає

$$\psi^{p'}(n) n^{p'-1} = p' \int_n^{\infty} \frac{\psi^{p'}(t) t^{p'-2}}{\alpha(\psi; t)} dt - (p'-1) \int_n^{\infty} \psi^{p'}(t) t^{p'-2} dt. \tag{39}$$

Покажемо, що

$$\frac{1}{\alpha(\psi; t)} - \frac{1}{\alpha(g_p; t)} = \frac{1}{p}, \qquad t \geq 1, \quad 1 < p < \infty. \tag{40}$$

Дійсно, оскільки $\psi(t) = g_p(t) t^{-1/p}$, то

$$\frac{1}{\alpha(\psi; t)} = \frac{t|\psi'(t)|}{\psi(t)} = \frac{-t\left(\dfrac{-1}{p} t^{-1/p-1} g_p(t) + t^{-1/p} g_p'(t)\right)}{g_p(t) t^{-1/p}} = \frac{\dfrac{1}{p} t^{-1/p} g_p(t) + t^{-1/p+1} |g_p'(t)|}{g_p(t) t^{-1/p}} =$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{t|g_p'(t)|}{g_p(t)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\alpha(g_p; t)}.$$

На підставі (39) і (40)

$$\psi^{p'}(n) n^{p'-1} = p' \int_n^{\infty} \psi^{p'}(t) t^{p'-2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\alpha(g_p; t)}\right) dt - (p'-1) \int_n^{\infty} \psi^{p'}(t) t^{p'-2} dt =$$

$$= p' \int_n^{\infty} \psi^{p'}(t) t^{p'-2} \frac{1}{\alpha(g_p; t)} dt. \tag{41}$$

З (33), (37) і (41) випливають співвідношення

$$\psi^{p'}(n) n^{p'-1} \leq \frac{p'}{\underline{\alpha}_n(g_p)} \int_n^{\infty} \psi^{p'}(t) t^{p'-2} dt \leq \frac{p'}{\underline{\alpha}_n(g_p)} \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2}. \tag{42}$$

Нерівність (35) доведено.

Нехай $g_p \in \mathfrak{M}_C$. Оскільки $\mathfrak{M}_C \subset \mathfrak{M}_0$, то друга нерівність в (36) випливає з (35).

Враховуючи (42), маємо

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} \le \psi^{p'}(n)n^{p'-2} + \int\limits_n^{\infty} \psi^{p'}(t)t^{p'-2}dt \le \left(\frac{p'}{\underline{\alpha}_n(g_p)}\frac{1}{n}+1\right)\int\limits_n^{\infty} \psi^{p'}(t)t^{p'-2}dt. \qquad (43)$$

На підставі формул (41) і (43) одержуємо

$$\psi^{p'}(n)n^{p'-1} \ge \frac{p'}{\overline{\alpha}_n(g_p)}\int\limits_n^{\infty} \psi^{p'}(t)t^{p'-2}dt \ge \frac{p'}{\overline{\alpha}_n(g_p)}\left(\frac{p'}{\underline{\alpha}_n(g_p)}\frac{1}{n}+1\right)^{-1}\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}.$$

Тим самим співвідношення (36), а отже і лему 3, доведено.

З нерівностей (13), (32) і (35) отримуємо

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \le \frac{1}{\pi}\xi(p')\Big(1+\frac{p'}{\underline{\alpha}_n(g_p)}\Big)^{1/p'}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p'}. \qquad (44)$$

Оскільки послідовність $\underline{\alpha}_n(g_p)$ монотонно не спадає, то для довільних $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \le K^{(2)}_{\psi,p}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big)^{1/p'}, \quad 1<p<\infty, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \qquad (45)$$

де

$$K^{(2)}_{\psi,p} = \frac{1}{\pi}\xi(p')\left(1+\frac{p'}{\underline{\alpha}_1(g_p)}\right)^{1/p'}.$$

Встановимо оцінку знизу величини $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$. З цією метою розглянемо функцію

$$f^*(t) = f^*(\psi;p;n;t) = \frac{\lambda}{\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p}}\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\cos kt, \qquad (46)$$

де

$$\lambda = \lambda(\psi;p;n) := \frac{1}{\xi(p)}\left(\frac{\underline{\alpha}_n(g_p)}{p'+\underline{\alpha}_n(g_p)}\right)^{1/p}, \quad 1<p<\infty, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \qquad (47)$$

а величини $\xi(p)$ і $\underline{\alpha}_n(g_p)$ означені формулами (15) і (33) відповідно.

З умови $\sum_{k=1}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty$ випливає, що $f^* \in C$. Покажемо, що $\left\|(f^*(t))^{\psi}_{\beta}\right\|_p \le 1$. Оскільки, згідно з умовою теореми 1, $g_p \in \mathfrak{M}_0$, то функція $\psi^{p'-1}(t)t^{p'-2} = g_p^{p'-1}(t)t^{-1/p'}$ монотонно спадає до нуля. Згідно з означенням (ψ,β)-похідної, майже скрізь виконується рівність

$$\big(f^*(t)\big)^{\psi}_{\beta} = \frac{\lambda}{\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p}}\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'-1}(k)k^{p'-2}\cos\Big(kt+\frac{\beta\pi}{2}\Big). \qquad (48)$$

Покладаючи в умовах леми 1 $a_k = \psi^{p'-1}(k)k^{p'-2}$, $\gamma = \dfrac{\beta\pi}{2}$, $s=p$, із (48) і (35) одержуємо

$$\left\|(f^*)_\beta^\psi\right\|_p \le$$

$$\le \frac{\lambda\xi(p)}{\left(\sum_{k=n}^\infty \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p}} \left(\sum_{k=n}^\infty \left(\psi^{p'-1}(k)k^{p'-2}\right)^p k^{p-2} + \psi^{(p'-1)p}(n)n^{(p'-2)p}n^{p-1}\right)^{1/p} =$$

$$= \lambda\xi(p)\left(1+\frac{\psi^{p'}(n)n^{p'-1}}{\sum_{k=n}^\infty \psi^{p'}(k)k^{p'-2}}\right)^{1/p} \le \lambda\xi(p)\left(1+\frac{p'}{\underline{\alpha}_n(g_p)}\right)^{1/p} = 1. \qquad (49)$$

З (49) випливає включення $f^* \in C_{\beta,p}^\psi$.

Оскільки послідовність $\underline{\alpha}_n(g_p)$ монотонно не спадає, то на підставі (47)

$$\lambda \ge \frac{1}{\xi(p)}\left(\frac{\underline{\alpha}_1(g_p)}{p'+\underline{\alpha}_1(g_p)}\right)^{1/p}, \quad n \in \mathbb{N},$$

і для функції f^* має місце оцінка

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^\psi)_C \ge \left|f^*(0) - S_{n-1}(f^*,0)\right| =$$

$$= \frac{\lambda}{\left(\sum_{k=n}^\infty \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p}} \sum_{k=n}^\infty \psi^{p'}(k)k^{p'-2} = \lambda\left(\sum_{k=n}^\infty \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p'} \ge$$

$$\ge K_{\psi,p}^{(1)}\left(\sum_{k=n}^\infty \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p'}, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad (50)$$

де

$$K_{\psi,p}^{(1)} = \frac{1}{\xi(p)}\left(\frac{\underline{\alpha}_1(g_p)}{p'+\underline{\alpha}_1(g_p)}\right)^{1/p}.$$

Об'єднуючи (45), (47) і (50), отримуємо (10).

Теорему 1 доведено.

***Зауваження* 1.** В ході доведення теореми 1 за виконання її умов було показано, що для довільних $n \in \mathbb{N}$ виконується більш точна, порівняно з (10), оцінка

$$\frac{1}{\xi(p)}\left(\frac{\underline{\alpha}_n(g_p)}{p'+\underline{\alpha}_n(g_p)}\right)^{1/p}\left(\sum_{k=n}^\infty \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p'} \le \mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^\psi)_C \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\xi(p')\left(\frac{p'+\underline{\alpha}_n(g_p)}{\underline{\alpha}_n(g_p)}\right)^{1/p'}\left(\sum_{k=n}^\infty \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p'}, \qquad (51)$$

де $\xi(p),\ 1<p<\infty$, і $\underline{\alpha}_n(g_p)$ — додатні величини, що означаються за допомогою формул (15) і (33) відповідно.

Теорема 2. *Нехай* $\sum_{k=1}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}<\infty$, $\psi(t)=g_p(t)t^{-1/p}$, *де* $g_p\in\mathfrak{M}_0$, $1<p<\infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$ *і*

$$\underline{\alpha}_1(g_p)=\inf_{t\geq 1}\alpha(g_p;t)>\frac{p'}{2}. \tag{52}$$

Тоді для довільних $n\in\mathbb{N}$ *і* $\beta\in\mathbb{R}$ *мають місце співвідношення*

$$K_{\psi,p}^{(3)}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p'}\leq E_n(C_{\beta,p}^{\psi})_C\leq\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^{\psi})_C\leq K_{\psi,p}^{(2)}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p'}, \tag{53}$$

в яких $K_{\psi,p}^{(2)}$, $K_{\psi,p}^{(3)}$ — *додатні величини, що залежать лише від* ψ *і* p.

Доведення. Згідно з теоремою 1, якщо $\psi(t)=g_p(t)t^{-1/p}$, $g_p\in\mathfrak{M}_0$ і $\sum_{k=1}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}<<\infty$, $1<p<\infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, то існує стала $K_{\psi,p}^{(2)}$ така, що при всіх $n\in\mathbb{N}$ і $\beta\in\mathbb{R}$

$$E_n(C_{\beta,p}^{\psi})_C\leq\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^{\psi})_C\leq K_{\psi,p}^{(2)}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p'}. \tag{54}$$

Встановимо оцінку знизу для величин $E_n(C_{\beta,p}^{\psi})_C$. Покладемо

$$\Phi_{p'}(x):=\int_x^{\infty}\psi^{p'}(t)t^{p'-2}dt$$

і

$$A(n)=A(\psi;p;n):=\left[\Phi_{p'}^{-1}\left(\frac{K^*}{n}\Phi_{p'}(n)\right)\right]+1, \tag{55}$$

де $[\alpha]$ — ціла частина дійсного числа α, $\Phi_{p'}^{-1}$ — функція, обернена до $\Phi_{p'}$, а

$$K^*=K^*(\psi;p):=\frac{1}{2}\left(1-\frac{p'}{2\underline{\alpha}_1(g_p)}\right),\qquad 1<p<\infty,\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1. \tag{56}$$

Розглянемо функцію f^* вигляду (46). Як зазначалось раніше (див. (49)), $f^*\in C_{\beta,p}^{\psi}$, $1<p<\infty$. Покажемо, що має місце оцінка

$$E_n(f^*)_C=\inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}}\left\|f^*(\cdot)-t_{n-1}(\cdot)\right\|_C\geq K_{\psi,p}^{(3)}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p'}, \tag{57}$$

де $K_{\psi,p}^{(3)}$ — деяка додатна стала, що може залежати лише від ψ і p.

Розглянемо інтеграл

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\big(f^*(t)-t_{n-1}(t)\big)\big(V_{A(n)}(t)-V_{n-1}(t)\big)dt, \tag{58}$$

де $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$, $V_m(t)$ — ядра Валле Пуссена вигляду

$$V_m(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m-1} \sum_{j=1}^{k} \cos jt, \quad m \in \mathbb{N},$$

а послідовність $A(n)$ означена формулою (55).

За твердженням Д.1.1 з [21, с. 391]

$$I \leq \|f^*(t) - t_{n-1}(t)\|_C \|V_{A(n)}(t) - V_{n-1}(t)\|_1. \tag{59}$$

Встановимо оцінку норми $\|V_{A(n)}(t) - V_{n-1}(t)\|_1$. Відомо, що

$$V_m(t) = 2F_{2m-1}(t) - F_{m-1}(t) \tag{60}$$

(див., наприклад, [5, с. 28]), де $F_k(t)$ — ядра Фейєра порядку k :

$$F_k(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{k+1} \sum_{\nu=0}^{k} \left(\sum_{j=1}^{\nu} \cos jt \right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Оскільки (див., наприклад, [20, с. 148])

$$\|F_k(t)\|_1 = \pi, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{61}$$

то з (60) і (61) отримуємо

$$\|V_m(t)\|_1 \leq 2\|F_{2m-1}(t)\|_1 + \|F_{m-1}(t)\|_1 \leq 3\pi, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Тому

$$\|V_{A(n)}(t) - V_{n-1}(t)\|_1 \leq \|V_{A(n)}(t)\|_1 + \|V_{n-1}(t)\|_1 \leq 6\pi. \tag{62}$$

З (59) і (62) маємо

$$I \leq 6\pi \|f^*(t) - t_{n-1}(t)\|_C. \tag{63}$$

Для ядер $V_m(t)$ виконується рівність (див., наприклад, формулу (1.3.15) роботи [1, с. 31])

$$V_m(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2 \sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(1 - \frac{k}{2m}\right) \cos kt, \quad m \in \mathbb{N},$$

а тому

$$V_{A(n)}(t) - V_{n-1}(t) =$$

$$= \sum_{k=n}^{A(n)} \cos kt + 2 \sum_{k=A(n)+1}^{2A(n)-1} \left(1 - \frac{k}{2A(n)}\right) \cos kt - 2 \sum_{k=n}^{2n-3} \left(1 - \frac{k}{2n-2}\right) \cos kt. \tag{64}$$

Враховуючи очевидні рівності

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos mt dt = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \pi, & k = m, \end{cases} \qquad k, m \in \mathbb{N},$$

з формул (46), (58) і (64) одержуємо, що для довільних $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$

$$I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f^*(t) - t_{n-1})\big(V_{A(n)}(t) - V_{n-1}(t)\big)dt =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^*(t)\big(V_{A(n)}(t) - V_{n-1}(t)\big)dt =$$

$$= \frac{\lambda}{\left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\cos kt \times$$

$$\times \left(\sum_{k=n}^{A(n)} \cos kt + 2 \sum_{k=A(n)+1}^{2A(n)-1} \left(1 - \frac{k}{2A(n)}\right) \cos kt - 2 \sum_{k=n}^{2n-3} \left(1 - \frac{k}{2n-2}\right) \cos kt \right) dt =$$

$$= \frac{\pi\lambda}{\left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p}} \left(\sum_{k=n}^{A(n)} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} + 2 \sum_{k=A(n)+1}^{2A(n)-1} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\left(1 - \frac{k}{2A(n)}\right) - \right.$$

$$\left. -2 \sum_{k=n}^{2n-3} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\left(1 - \frac{k}{2n-2}\right)\right) >$$

$$> \frac{\pi\lambda}{\left(\sum\limits_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p}} \left(\sum_{k=n}^{A(n)} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} - 2 \sum_{k=n}^{2n-3} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\left(1 - \frac{k}{2n-2}\right)\right). \qquad (65)$$

Встановимо оцінку зверху для суми $\sum_{k=n}^{2n-3} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big(1 - \dfrac{k}{2n-2}\Big)$. Враховуючи нерівність (35) та спадання функції $\psi^{p'}(t)t^{p'-2}$, маємо

$$2 \sum_{k=n}^{2n-3} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\Big(1 - \frac{k}{2n-2}\Big) \leq \psi^{p'}(n)n^{p'-2} \frac{1}{n-1} \sum_{k=n}^{2n-3} (2n-k-2) =$$

$$= \psi^{p'}(n)n^{p'-2} \frac{n-2}{2} < \frac{1}{2}\psi^{p'}(n)n^{p'-1} < \frac{p'}{2\underline{\alpha}_n(g_p)} \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}. \qquad (66)$$

Беручи до уваги співвідношення (63), (65) і (66), записуємо

$$\|f^*(t) - t_{n-1}(t)\|_C \geq \frac{1}{6\pi} I \geq$$

$$\geq \frac{1}{6\pi} \frac{\pi\lambda}{\left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p}} \left(\sum_{k=n}^{A(n)} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} - \frac{p'}{2\underline{\alpha}_n(g_p)} \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right) >$$

$$> \frac{1}{6} \frac{\lambda}{\left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2}\right)^{1/p}} \left(\left(1 - \frac{p'}{2\underline{\alpha}_n(g_p)}\right) \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} - \sum_{k=A(n)+1}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} \right). \quad (67)$$

Із (55) та монотонного спадання функції $\Phi_{p'}(\cdot)$ випливає, що

$$\Phi_{p'}(A(n)) = \Phi_{p'} \left(\left[\Phi_{p'}^{-1} \left(\frac{K^*}{n} \Phi_{p'}(n) \right) \right] + 1 \right) < \frac{K^*}{n} \Phi_{p'}(n),$$

а тому

$$\sum_{k=A(n)+1}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} \le \int_{A(n)}^{\infty} \psi^{p'}(t) t^{p'-2} dt = \Phi_{p'}(A(n)) < \frac{K^*}{n} \Phi_{p'}(n) \le \frac{K^*}{n} \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2}, \quad (68)$$

при цьому з урахуванням (52) і (56) $0 < K^* < \dfrac{1}{2}$.

Із (67) і (68) з урахуванням монотонного неспадання послідовності $\underline{\alpha}_n(g_p)$ для полінома $t_{n-1}^*(t)$ найкращого рівномірного наближення функції f^* отримуємо оцінку

$$E_n(f^*)_C = \|f^*(t) - t_{n-1}^*(t)\|_C \ge$$

$$\ge \frac{1}{6} \frac{\lambda}{\left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2}\right)^{1/p}} \left(1 - \frac{p'}{2\underline{\alpha}_n(g_p)} - \frac{K^*}{n}\right) \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} \ge$$

$$\ge K_{\psi,p}^{(3)} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} \right)^{1/p'}, \quad (69)$$

де

$$K_{\psi,p}^{(3)} = \frac{1}{12\xi(p)} \left(\frac{\underline{\alpha}_1(g_p)}{p' + \underline{\alpha}_1(g_p)} \right)^{1/p} \left(1 - \frac{p'}{2\underline{\alpha}_1(g_p)} \right). \quad (70)$$

Із (69) випливає справедливість оцінки (57). Об'єднуючи (54) і (57), одержуємо (53).

Теорему 2 доведено.

***Зауваження* 2.** З (51) та ходу доведення теореми 2 випливає, що за виконання умов $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} < \infty$, $\psi(t) = g_p(t) t^{-\frac{1}{p}}$, де $g_p \in \mathfrak{M}_0$, $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, $n \in \mathbb{N}$ і

$$\underline{\alpha}_n(g_p) = \inf_{t \ge n} \alpha(g_p; t) > \frac{p'}{2},$$

для довільного $\beta \in \mathbb{R}$ виконується більш точна, порівняно з (53), оцінка

$$\frac{1}{12\xi(p)} \left(\frac{\underline{\alpha}_n(g_p)}{p' + \underline{\alpha}_n(g_p)} \right)^{1/p} \left(1 - \frac{p'}{2\underline{\alpha}_n(g_p)} \right) \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} \right)^{1/p'} \le$$

$$\le E_n(C_{\beta,p}^{\psi})_C \le \mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^{\psi})_C \le$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\xi(p')\left(\frac{p'+\underline{\alpha}_n(g_p)}{\underline{\alpha}_n(g_p)}\right)^{1/p'}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p'}, \tag{71}$$

де $\xi(p)$, $1<p<\infty$, і $\underline{\alpha}_n(g_p)$ — додатні величини, означені формулами (15) і (33) відповідно.

Далі, як зазвичай прийнято, для послідовностей $A(n)>0$ і $B(n)>0$ під записом $A(n)\asymp B(n)$ будемо розуміти існування сталих $K_1>0$ і $K_2>0$ таких, що $K_1B(n)\leq A(n)\leq \leq K_2B(n)$, $n\in\mathbb{N}$.

Із теорем 1 і 2 безпосередньо випливає наступне твердження.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $\sum_{k=1}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}<\infty$, $\psi(t)=g_p(t)t^{-1/p}$, *де* $g_p\in\mathfrak{M}_0$, $1<p<\infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, $n\in\mathbb{N}$ *і* $\beta\in\mathbb{R}$. *Тоді*

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C\asymp\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p'}. \tag{72}$$

Якщо, крім того, виконується умова (52), *то*

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C\asymp\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C\asymp\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p'}. \tag{73}$$

Припустимо, що виконуються умови наслідку 1 і, крім того, $g_p\in\mathfrak{M}_C$. Тоді, як випливає зі співвідношення (36),

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\asymp\psi^{p'}(n)n^{p'-1}.$$

Отже, має місце таке твердження.

***Наслідок* 2.** *Нехай* $\sum_{k=1}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}<\infty$, $\psi(t)=g_p(t)t^{-1/p}$, *де* $g_p\in\mathfrak{M}_C$, $1<p<\infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, $n\in\mathbb{N}$ *і* $\beta\in\mathbb{R}$. *Тоді*

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C\asymp\psi(n)n^{1/p}. \tag{74}$$

Якщо, крім того, виконується умова (52), *то*

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C\asymp\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C\asymp\psi(n)n^{1/p}. \tag{75}$$

Справедливість порядкових оцінок (74) і (75) встановлено в [15].

Зауважимо, що коли $g_p(t)\in\mathfrak{M}_0$ і

$$\lim_{t\to\infty}\alpha(g_p;t)=\infty, \tag{76}$$

то порядкові оцінки (74) і (75) не справджуються, оскільки в цьому випадку виконується оцінка

$$\psi(n)n^{1/p}=o\left(\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p'}\right),\quad n\to\infty,$$

яка є наслідком нерівності (35) і того, що $\underline{\alpha}_n(g_p(t))\to\infty$ при $n\to\infty$.

Прикладом функцій $\psi(t)$, які задовольняють умови наслідку 1 і для яких виконується умова (76), є функції

$$\psi(t) = t^{-1/p}\ln^{-\gamma}(t+K), \qquad \gamma > \frac{1}{p'}, \quad K \geq e^{\gamma p'/2}. \tag{77}$$

Для них

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\ln^{\gamma p'}(k+K)} < \infty$$

і

$$g_p(t) = \ln^{-\gamma}(t+K), \qquad g_p'(t) = -\gamma\ln^{-\gamma-1}(t+K)\frac{1}{t+K},$$

$$\alpha(g_p;t) = \frac{\ln(t+K)}{\gamma}\frac{t+K}{t} > \frac{\ln\left(t+e^{\gamma p'/2}\right)}{\gamma},$$

а тому $\alpha(g_p;t)\to\infty$ при $t\to\infty$ і

$$\underline{\alpha}_1(g_p) > \frac{p'}{2}. \tag{78}$$

Наведемо порядкові оцінки величин $E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$ і $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$ у випадку, коли $\psi(t)$ мають вигляд (77).

***Наслідок* 3.** *Нехай* $\psi(t) = t^{-1/p}\ln^{-\gamma}(t+K)$, $\gamma > \frac{1}{p'}$, $K \geq e^{\frac{\gamma p'}{2}}$, $1<p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $\beta\in\mathbb{R}$ *і* $n\in\mathbb{N}$. *Тоді*

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \asymp \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \asymp \psi(n)n^{1/p}\ln^{1/p'}n, \quad n\geq 2.$$

Доведення. З (43) і (78) одержуємо

$$\int\limits_n^{\infty}\psi^{p'}(t)t^{p'-2}dt \leq \sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2} \leq 3\int\limits_n^{\infty}\psi^{p'}(t)t^{p'-2}dt. \tag{79}$$

Згідно з (73) і (79) для зазначених ψ

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \asymp \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \asymp \left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p'} \asymp \left(\int\limits_n^{\infty}\psi^{p'}(t)t^{p'-2}dt\right)^{1/p'} =$$

$$= \left(\int\limits_n^{\infty}\frac{dt}{t\ln^{\gamma p'}(t+K)}\right)^{1/p'} \asymp \ln^{1/p'-\gamma}n =$$

$$= \psi(n)n^{1/p}\ln^{1/p'}n\frac{\ln^{-\gamma}(n)}{\ln^{-\gamma}(n+K)} \asymp \psi(n)n^{1/p}\ln^{1/p'}n, \quad n\geq 2.$$

Наслідок 3 доведено.

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **40**, Ч. I. – 427 с.
2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – 538 с.
3. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
4. *Степанец А. И., Сердюк А. С., Шидлич А. Л.* Классификация бесконечно дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 12. – С. 1686 – 1708.
5. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic function. – Nova Sci. Publ., Inc., 1993. – 419 p.
6. *Kolmogoroff A.* Zur Grössennordnung des Restgliedes Fourierschen Reihen differenzierbarer Funktionen // Ann. Math. – 1935. – **36**, № 2. – S. 521 – 526.
7. *Пинкевич В. Т.* О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1940. – **4**, № 6. – С. 521 – 528.
8. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207 – 256.
9. *Favard J.* Sur l'approximation des fonctions périodiques par les polynomes trigonométriques // C. r. Acad. sci. – 1936. – **203**. – P. 1122 – 1124.
10. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную s-ю производную $(0 < s < 1)$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1953. – **17**. – С. 135 – 162.
11. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер // Мат. заметки. – 1974. – **16**, № 5. – С. 691 – 701.
12. *Стечкин С. Б.* О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1956. – **20**. – С. 643 – 648.
13. *Сунь Юн-шен.* О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1959. – **23**, № 1. – С. 67 – 92.
14. *Сердюк А. С., Соколенко І. В.* Рівномірні наближення класів $(\psi, \overline{\beta})$-диференційовних функцій лінійними методами // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2011. – **8**, № 1. – С. 181 – 189.
15. *Грабова У. З., Сердюк А. С.* Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів (ψ, β)-диференційовних функцій // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 9. – С. 1186 – 1197.
16. *Романюк В. С.* Дополнения к оценкам приближения суммами Фурье классов бесконечно дифференцируемых функций // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2003. – **46**. – С. 131 – 135.
17. *Сердюк А. С., Степанюк Т. А.* Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів нескінченно диференційовних функцій // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 1. – С. 255 – 282.
18. *Сердюк А. С., Степанюк Т. А.* Оцінки найкращих наближень класів нескінченно диференційовних функцій у рівномірній та інтегральних метриках// Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 9. – С. 1244 – 1256.
19. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматиз, 1962. – 1100 с.
20. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.
21. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.

Одержано 20.03.14