УДК 517.36

А. А. Мартынюк, Ю. А. Мартынюк-Черниенко (Ин-т механики НАН Украины, Киев)

АНАЛИЗ МНОЖЕСТВА ТРАЕКТОРИЙ НЕЧЕТКИХ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

The paper presents a new approach to the investigation of the first-order fuzzy initial-value problem. We use different versions of the comparison principle to establish conditions for the existence of solutions of a set of differential equations.

Викладено новий підхід до дослідження нечіткої початкової задачі. При цьому використано деякі варіанти принципу порівняння для отримання умов існування розв'язків множини диференціальних рівнянь.

Введение. В этой статье рассматривается нечеткая модель уравнений возмущенного движения реальной системы с неточными значениями параметров. В результате регуляризации получено семейство нечетких уравнений, для которого установлены условия существования решений, получена оценка расстояния между двумя семействами решений, указаны условия существования последовательных приближений, исследована непрерывная зависимость семейства решений от начальных данных, найдены условия глобального существования решений, установлены условия существования ε-приближения решений и приведена одна общая теорема об устойчивости стационарного решения семейства регуляризованных уравнений.

1. Обозначения и определения (см. [1, 2] и приведенную там библиографию). Пространство $\mathbb{E}^n$ состоит из отображений $u\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) u полунепрерывно сверху по Бэру;

2) существует $x_0 \in \mathbb{R}^n$ такое, что $u(x_0) = 1$;

3) u является нечетко выпуклым, т. е.

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min(u(x), u(y))$$

при любом значении $\lambda \in [0,1]$;

4) замыкание множества $\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) > 0\}$ является компактным подмножеством в $\mathbb{R}^n$.

Пара $(\mathbb{E}^n, d)$ является полным метрическим пространством. Здесь $d(u,v) = \sup\left\{d_H([u]^\beta, [v]^\beta) : \beta \in [0,1]\right\}$ при всех $u,\, v \in \mathbb{E}^n$, $d_H(\cdot)$ — расстояние Хаусдорфа между множествами.

Метрика d удовлетворяет следующим условиям:

1) $d[cu, cv] = |c| d[u,v]$;

2) $d[u+w, v+w] = d[u,v]$;

3) $d[u+w, v+w'] \leq d[u,v] + d[w,w']$

при всех $c > 0$ и $u,\, v,\, w,\, w' \in \mathbb{E}^n$.

Некоторые другие сведения из многозначного анализа имеются в монографиях [1, 2], которые используются в данной статье.

2. Существование решений регуляризованного уравнения. Пусть уравнения возмущенного движения некоторой реальной системы (или процесса) представлены в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \alpha), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{E}^n$, $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{E}^n \times \mathfrak{I}, \mathbb{E}^n)$, $\alpha \in \mathfrak{I}$ — параметр неточности, $\mathfrak{I}$ — компактное множество в $\mathbb{R}^d$.

Наряду с уравнением (1) будем рассматривать семейство дифференциальных уравнений [3]

$$\frac{du}{dt} = f_\varkappa(t,u), \qquad u(t_0) = u_0, \tag{2}$$

где $f_\varkappa(t,u) = f_M(t,u)\varkappa + (1-\varkappa) f_m(t,u)$ и $f_M(t,\cdot) = \overline{\text{co}} \bigcup\limits_{\alpha\in\mathfrak{I}} f(t,\cdot,\alpha)$, $f_m(t,\cdot) = \overline{\text{co}} \bigcap\limits_{\alpha\in\mathfrak{I}} f(t,\cdot,\alpha)$.

Предположим, что $f_\varkappa \in C(I \times \mathbb{E}^n, \mathbb{E}^n)$, $I = [t_0, t_0 + a]$, $t_0 \geq 0$, $a > 0$, $\varkappa \in [0,1]$. Заметим, что отображения $u_\varkappa \colon I \to \mathbb{E}^n$ являются решениями начальной задачи (2), если они слабо непрерывны и удовлетворяют интегральному уравнению

$$u_\varkappa(t) = u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f_\varkappa(s, u_\varkappa(s))ds \tag{3}$$

при всех $t \in I$ и любом $\varkappa \in [0,1]$. Нечеткое уравнение (2) будем называть регуляризованным уравнением системы (1). Заметим также, что для любого $u_\varkappa(t)$, удовлетворяющего уравнению (3),

$$\text{diam}[u_\varkappa(t)]^\beta \geq \text{diam}[u_{\varkappa 0}]^\beta, \qquad \beta \in [0,1],$$

при любом $\varkappa \in [0,1]$, т. е. диаметр множества любого β-уровня является неубывающим. Для начальной задачи (2) имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) *при любом* $\varkappa \in [0,1]$ *семейство* $f_\varkappa(t,u)$ *принадлежит* $C(I \times \mathbb{E}^n, \mathbb{E}^n)$;

2) *существуют постоянные* $L_\varkappa$, $\varkappa \in [0,1]$, *для которых*

$$d[f_\varkappa(t,u), f_\varkappa(t,v)] \leq L_\varkappa d[u,v]$$

при всех $t \in I$, u, $v \in \mathbb{E}^n$.

Тогда семейство уравнений (2) *имеет единственное решение на* I *при любом* $\varkappa \in [0,1]$.

Доказательство. На пространстве $C(I, \mathbb{E}^n)$ всех непрерывных функций $u_\varkappa(t)$ определим метрику

$$H(u,v) = \sup_I d[u(t), v(t)] e^{-\lambda t}$$

при всех u, $v \in \mathbb{E}^n$ и $\lambda = 2 \max L_\varkappa$, $\varkappa \in [0,1]$. Из того, что пара $(\mathbb{E}^n, d)$ является полным метрическим пространством, следует, что $(C(I, \mathbb{E}^n), H)$ также полно.

Пусть $u_\varkappa$ принадлежит $C(I, \mathbb{E}^n)$ при всех $\varkappa \in [0,1]$ и оператор $Tu_\varkappa$ определен соотношением

$$Tu_\varkappa(t) = u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f_\varkappa(s, u_\varkappa(s))ds, \qquad \varkappa \in [0,1].$$

Очевидно, что $Tu_\varkappa \in C(I, \mathbb{E}^n)$ и

$$d[Tu_\varkappa(t), Tv_\varkappa(t)] = d\left[u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f_\varkappa(s, u_\varkappa(s))ds, u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f_\varkappa(s, v_\varkappa(s))ds\right] =$$

$$= d\left[\int\limits_{t_0}^{t} f_\varkappa(s, u_\varkappa(s))ds, \int\limits_{t_0}^{t} f_\varkappa(s, v_\varkappa(s))ds\right] \leq$$

$$\leq \int\limits_{t_0}^{t} d[f_\varkappa(s, u_\varkappa(s))ds, f_\varkappa(s, v_\varkappa(s))ds] < \max_\varkappa L_\varkappa \int\limits_{t_0}^{t} d[u_\varkappa(s), v_\varkappa(s)]ds, \qquad t \in I,$$

при любом значении $\varkappa \in [0,1]$. Поскольку $d[u,v] = H(u,v)e^{\lambda t}$,

$$e^{-\lambda t} d[Tu_\varkappa(t), Tv_\varkappa(t)] < \max_\varkappa L_\varkappa e^{-\lambda t} H[u_\varkappa, v_\varkappa] \int\limits_{t_0}^{t} e^{\lambda s} ds \leq \frac{\max\limits_\varkappa L_\varkappa}{\lambda} H[u_\varkappa, v_\varkappa]. \tag{4}$$

Вследствие выбора λ из неравенства (4) следует, что

$$H[Tu_\varkappa, Tv_\varkappa] < \frac{1}{2} H[u_\varkappa, v_\varkappa].$$

Это значит, что оператор $Tu_\varkappa$ — сжимающий, и поэтому существует неподвижная точка оператора $Tu_\varkappa$ такая, что $u_\varkappa(t)$ является решением семейства уравнений (2) при любом $\varkappa \in [0,1]$.

Далее понадобится следующая лемма.

Лемма 1 [4]. *Пусть отображение $F\colon I \to \mathbb{E}^n$ непрерывно дифференцируемое на компактном интервале $I \subset \mathbb{R}$. Тогда*

$$d(F(b), F(a)) \leq (b-a) \sup_{t \in I} d(F'(t), \hat{\theta}), \tag{5}$$

где $\hat{\theta}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus 0. \end{cases}$

Неравенство (5) следует из того, что

$$d(F(b), F(a)) = d\left(\int F', \hat{\theta}\right) \leq \int d(F', \hat{\theta}) \leq (b-a) \sup_{t \in I} d(F'(t), \hat{\theta}).$$

В метрическом пространстве $C(I, \mathbb{E}^n)$ будем применять метрику $H^*[u,v] = \sup\limits_I d[u(t), v(t)]$, где u, $v \in C(I, \mathbb{E}^n)$. Для каждого $u_\varkappa \in C(I, \mathbb{E}^n)$ определим отображение

$$Tu_\varkappa = u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f_\varkappa(s, u_\varkappa(s))ds, \qquad \varkappa \in [0,1].$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) *при любом* $\varkappa \in [0,1]$ $f_\varkappa(t,u)$ *принадлежит* $C(I \times \mathbb{E}^n, \mathbb{E}^n)$;

2) *существуют постоянные* $M_\varkappa > 0$, $\varkappa \in [0,1]$, *такие, что*

$$d[f_\varkappa(t,u), \hat{\theta}] \le M_\varkappa$$

при всех $t \in I$ *и* $u \in \mathbb{E}^n$.

Тогда семейство уравнений (2) *имеет решение* $u_\varkappa(t)$ *на* I *при любом* $\varkappa \in [0,1]$.

Доказательство. В метрическом пространстве $C(I,\mathbb{E}^n)$ будем рассматривать ограниченное множество B. Множество $TB = \big\{Tu_\varkappa : u_\varkappa \in B, \varkappa \in [0,1]\big\}$ будет ограничено, если оно эквинепрерывно и при любом $t \in I$ множество $[TB](t) = \big\{[Tu_\varkappa](t) : t \in I, \varkappa \in [0,1]\big\}$ является ограниченным подмножеством пространства $\mathbb{E}^n$.

Согласно лемме 1, для значений $t_1 < t_2 \in I$ и $u_\varkappa \in B$ справедлива оценка

$$d[Tu_\varkappa(t_1), Tu_\varkappa(t_2)] \le |t_2 - t_1| \max_I d[f(t, u_\varkappa(t)), \hat{\theta}] \le |t_2 - t_1| M_\varkappa < |t_2 - t_1| \overline{M}, \tag{6}$$

где $\overline{M} = \max\limits_{\varkappa} M_\varkappa$. Отсюда следует эквинепрерывность TB.

Для любого фиксированного $t \in I$ имеет место оценка

$$d[Tu_\varkappa(t), Tu_\varkappa(t_1)] < |t - t_1| \overline{M} \tag{7}$$

при любом $t_1 \in I$ и $u_\varkappa \in B$, $\varkappa \in [0,1]$. Из неравенства (7) следует, что множество $\{[Tu_\varkappa](t) : u_\varkappa \in B, \varkappa \in [0,1]\}$ ограничено в пространстве $\mathbb{E}^n$. Согласно теореме Асколи, множество TB является относительно компактным подмножеством пространства $C(I,\mathbb{E}^n)$.

Далее в метрическом пространстве $(C(I,\mathbb{E}^n), H^*)$ рассмотрим шар $B^* = \{u_\varkappa \in C(I,\mathbb{E}^n) : H^*(u_\varkappa, \hat{\theta}) < a\overline{M}, \varkappa \in [0,1]\}$. Очевидно, что $TB \subset B^*$, так как $u_\varkappa \in C(I,\mathbb{E}^n)$, $\varkappa \in [0,1]$ и $d[Tu_\varkappa(t), Tu_\varkappa(t_0)] = d[Tu_\varkappa(t), \hat{\theta}] \le |t - t_0| M_\varkappa < a\overline{M}$ при любом $\varkappa \in [0,1]$. Пусть $\hat{\theta}(t) = \hat{0}$ при $t \in I$, где $\hat{\theta}(t) : I \to \mathbb{E}^n$. Тогда

$$H^*[Tu_\varkappa, T\hat{0}] = \sup_I d[(Tu_\varkappa)(t), (T\hat{0})(t)] \le |t - t_0| M_\varkappa < a\overline{M}.$$

Поскольку отображение T компактно, согласно теореме Шаудера о неподвижной точке, отображение T имеет неподвижную точку, являющуюся решением $u_\varkappa(t)$ семейства уравнений (2) при любом $\varkappa \in [0,1]$.

3. Оценка расстояния между решениями задачи (2). Поскольку

$$f_m(t,u) \le f_\varkappa(t,u) \le f_M(t,u), \qquad \varkappa \in [0,1],$$

при всех $(t,u) \in I \times \mathbb{E}^n$, представляет интерес установить оценку расстояния между любыми двумя решениями $u_\varkappa(t)$, $v_\varkappa(t)$ задачи (2) в зависимости от начальных условий.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Предположим, что выполняются следующие условия*:

1) *при любом* $\varkappa \in [0,1]$ *семейство* $f_\varkappa$ *принадлежит* $C(I \times \mathbb{E}^n, \mathbb{E}^n)$ *при всех* $(t,u) \in I \times \mathbb{E}^n$;

2) *существует функция* $g(t,w)$, *не убывающая по* w *при каждом* t, $g \in C(I \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, *такая, что*

$$d[f_\varkappa(t,u), f_\varkappa(t,v)] \le g(t, d[u,v])$$

при всех $(t,u,v) \in I \times \mathbb{E}^n$ *и любом значении* $\varkappa \in [0,1]$;

3) *существует максимальное решение* $r(t, t_0, w_0)$ *скалярного уравнения*

$$\frac{dw}{dt} = g(t, w), \qquad w(t_0) = w_0 \geq 0,$$

при всех $t \in I$.

Тогда для любых двух решений $u_\varkappa(t)$ *и* $v_\varkappa(t)$, *порождаемых начальными условиями* (u_0, v_0) : $d[u_0, v_0] \leq w_0$, *расстояние оценивается так:*

$$d[u_\varkappa(t), v_\varkappa(t)] \leq r(t, t_0, w_0) \tag{8}$$

при всех $t \in I$ *и любом* $\varkappa \in [0, 1]$.

Доказательство. Обозначим $d[u_\varkappa(t), v_\varkappa(t)] = m(t)$ при любом $\varkappa \in [0, 1]$. Очевидно, что $m(t_0) = d[u_0, v_0]$. Согласно соотношению (3) получим

$$m(t) = d\left[u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f_\varkappa(s, u_\varkappa(s))ds, v_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f_\varkappa(s, v_\varkappa(s))ds\right] \leq$$

$$\leq d\left[\int\limits_{t_0}^{t} f_\varkappa(s, u_\varkappa(s))ds, \int\limits_{t_0}^{t} f_\varkappa(s, v_\varkappa(s))ds\right] + d[u_0, v_0] \tag{9}$$

при любом значении $\varkappa \in [0, 1]$. Из (9) следует, что

$$m(t) \leq m(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} d[f_\varkappa(s, u_\varkappa(s)), f_\varkappa(s, v_\varkappa(s))]ds \leq$$

$$\leq m(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} g(s, d[u_\varkappa(s), v_\varkappa(s)])ds = m(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} g(s, m(s))ds, \qquad t \in I. \tag{10}$$

Применяя к неравенству (10) теорему 1.6.1 из монографии [5], получаем оценку (8), которая выполняется при любых значениях $\varkappa \in [0, 1]$.

Условие 2 теоремы 3 может быть ослаблено при сохранении ее утверждения.

Теорема 4. *Предположим, что выполняются следующие условия*:

1) *при любом* $\varkappa \in [0, 1]$ *семейство* $f_\varkappa$ *принадлежит* $C(I \times \mathbb{E}^n, \mathbb{E}^n)$ *при всех* $(t, u) \in I \times \mathbb{E}^n$;

2) *существуют функции* $g_\varkappa \in C(I \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *такие, что*

$$\limsup\{[d[u + hf_\varkappa(t, u), v + hf_\varkappa(t, v)]]h^{-1} - d[u, v] : h \to 0^+\} \leq g_\varkappa(t, d[u, v])$$

при всех $\varkappa \in [0, 1]$ *и* $(t, u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}^n$;

3) *на* I *существует максимальное решение* $r_\varkappa(t, t_0, w_0)$ *семейства уравнений сравнения*

$$\frac{dw}{dt} = g_\varkappa(t, w), \qquad w(t_0) = w_0 \geq 0. \tag{11}$$

Тогда для любых двух решений $u_\varkappa(t)$ *и* $v_\varkappa(t)$, *порождаемых начальными условиями* (u_0, v_0) : $d[u_0, v_0] \le w_0$, *расстояние оценивается неравенством*

$$d[u_\varkappa(t), v_\varkappa(t)] \le \overline{r}(t, t_0, w_0)$$

при всех $t \in I$, $\varkappa \in [0,1]$, *где* $\overline{r}(t, t_0, w_0) = \max\limits_{\varkappa} r_\varkappa(t, t_0, w_0)$.

Доказательство. Пусть $m(t) = d[u_\varkappa(t), v_\varkappa(t)]$ при любом $\varkappa \in [0,1]$. Вычислим разность

$$m(t+h) - m(t) = d[u_\varkappa(t+h), v_\varkappa(t+h)] - d[u_\varkappa(t), v_\varkappa(t)] \le$$

$$\le d[u_\varkappa(t+h), u_\varkappa(t) + hf_\varkappa(t, u_\varkappa(t))] + d[v_\varkappa(t) + hf_\varkappa(t, v_\varkappa(t)), v_\varkappa(t+h)] +$$

$$+ d[hf_\varkappa(t, u_\varkappa(t)), hf_\varkappa(t, v_\varkappa(t))] - d[u_\varkappa(t), v_\varkappa(t)], \qquad \varkappa \in [0,1].$$

Отсюда следует, что

$$D^+ m(t) = \limsup\{[m(t+h) - m(t)]h^{-1} : h \to 0^+\} \le$$

$$\le \limsup\{[d[u_\varkappa(t) + hf_\varkappa(t, u_\varkappa(t)), v_\varkappa(t) + hf_\varkappa(t, v_\varkappa(t))]]h^{-1} : h \to 0^+\} -$$

$$- d[u_\varkappa(t), v_\varkappa(t)] + \lim_{h\to 0^+} \sup \left\{ \left[d \left[\frac{u_\varkappa(t+h) - u_\varkappa(t)}{h}, f_\varkappa(t, u_\varkappa(t)) \right] \right] \right\} +$$

$$+ \lim_{h\to 0^+} \sup \left\{ d \left[f_\varkappa(t, v_\varkappa(t)), \frac{v_\varkappa(t+h) - v_\varkappa(t)}{h} \right] \right\} \le$$

$$\le g_\varkappa(t, d[u,v]) = g_\varkappa(t, m(t)), \quad t \in I, \qquad \text{при всех} \quad \varkappa \in [0,1]. \tag{12}$$

Применяя к семейству неравенств (12) теорему 1.6.1 из монографии [5], убеждаемся, что для каждого $\varkappa \in [0,1]$ выполняется оценка

$$d[u_\varkappa(t), v_\varkappa(t)] \le r_\varkappa(t, t_0, w_0)$$

и, следовательно, $d[u_\varkappa(t), v_\varkappa(t)] \le \overline{r}(t, t_0, w_0)$ при всех $t \in I$ и $\varkappa \in [0,1]$.

Теорема 4 доказана.

Из теоремы 4 следует возможность оценки расстояния от любого решения $u_\varkappa(t)$ семейства уравнений (2) до „точки” $\hat\theta \in \mathbb{E}^n$.

***Следствие* 1.** *Пусть выполняются следующие условия*:

1) *при любом* $\varkappa \in [0,1]$ *семейство* $f_\varkappa$ *принадлежит* $C(I \times \mathbb{E}^n, \mathbb{E}^n)$;

2) *существует семейство функций* $g^*_\varkappa \in C(I \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *такое, что*

а) $d[f_\varkappa(t,u), \hat\theta] \le g^*_\varkappa(t, d[u, \hat\theta])$ *или*

б) $\limsup\{[d[u + hf_\varkappa(t,u), \hat\theta] - d[u, \hat\theta]]h^{-1} : h \to 0^+\} \le g^*_\varkappa(t, d[u, \hat\theta])$ *при всех* $t \in I$, $\varkappa \in \in [0,1]$.

Тогда если $u_0 : d[u_0, \hat{\theta}] \leq w_0$, *то*

$$d[u_\varkappa(t), \hat{\theta}] \leq \overline{r}(t, t_0, w_0), \qquad t \in I, \tag{13}$$

при всех $\varkappa \in [0,1]$, *где* $\overline{r}(t, t_0, w_0) = \max\limits_{\varkappa} r_\varkappa(t, t_0, w_0)$ *и* $r_\varkappa(t, t_0, w_0)$ — *максимальное решение семейства уравнений сравнения*

$$\frac{dw}{dt} = g^*_\varkappa(t, w), \qquad w(t_0) = w_0 \geq 0.$$

Следствие 2. *Пусть в следствии* 1 $g^*_\varkappa(t, d[u, \hat{\theta}]) = \lambda(t) d[u, \hat{\theta}]$, *где* $\lambda(t) > 0$ *при всех* $t \in I$. *Тогда оценка* (13) *принимает вид*

$$d[u_\varkappa(t), \hat{\theta}] \leq d[u_0, \hat{\theta}] \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \lambda(s) ds \right), \qquad t \in I,$$

при любом $\varkappa \in [0,1]$.

4. Построение последовательных приближений. Рассмотрим задачу (2) при условиях более общих, чем условие Липшица, и укажем условия сходимости последовательных приближений.

Введем обозначение $S(u_0, b) = \{u \in \mathbb{E}^n : d[u, u_0] \leq b\}$ и будем рассматривать семейство $f_\varkappa(t, u)$ в области $\Phi = I \times S(u_0, b)$ при всех $\varkappa \in [0,1]$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. *Предположим, что выполняются следующие условия*:

1) *при всех* $\varkappa \in [0,1]$ *семейство* $f_\varkappa(t, u)$ *принадлежит* $C(\Phi, \mathbb{E}^n)$ *и* $d[f_\varkappa(t, u), \hat{\theta}] \leq M_0(\varkappa)$ *на* Φ;

2) *существуют функция* $g(t, w) \in C(I \times [0, 2b], \mathbb{R})$ *и постоянная* M_1 *такие, что* $0 \leq g(t, w) \leq M_1$ *при всех* $(t, w) \in I \times [0, 2b]$, $g(t, 0) = 0$ *при всех* $t \in I$ *и* $w(t) = 0$ — *единственное решение уравнения*

$$\frac{dw}{dt} = g(t, w), \qquad w(t_0) = 0; \tag{14}$$

3) *при всех* $\varkappa \in [0,1]$ *справедлива оценка*

$$d[f_\varkappa(t, u), f_\varkappa(t, v)] \leq g(t, d[u, v])$$

в области значений $(t, u, v) \in \Phi$.

Тогда последовательные приближения

$$u_{n+1}(t) = u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f_\varkappa(s, u_n(s)) ds, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

существуют на интервале $[t_0, t_0 + \Delta]$, *где* $\Delta = \min\{a, b/M\}$, $M = \max\{\overline{M}_0, M_1\}$, $\overline{M}_0 = \max\limits_{\varkappa} M_0(\varkappa)$, *как непрерывные функции, и их сходимость к единственному решению* $u_\varkappa(t)$ *семейства уравнений* (2) *является равномерной на* $[t_0, t_0 + \Delta]$.

Доказательство. Из соотношения (15) имеем

$$d[u_{n+1}(t), u_0] = d\left[u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f_\varkappa(s, u_n(s))ds, u_0\right] =$$

$$= d\left[\int\limits_{t_0}^{t} f_\varkappa(s, u_n(s))ds, \hat{\theta}\right] \leq \int\limits_{t_0}^{t} d[f_\varkappa(s, u_n(s)), \hat{\theta}]ds \leq$$

$$\leq M_0(\varkappa)(t - t_0) \leq M_0(\varkappa)a \leq b, \tag{16}$$

где $a = (t - t_0)$ при $t_0 \geq 0$. Из (16) следует, что $\{u_n(t)\}$ корректно определены на $[t_0, t_0 + \Delta]$ при любом $\varkappa \in [0, 1]$.

Для уравнения (15) последовательные приближения определим так (см. [1]):

$$w_0(t) = M(t - t_0), \qquad w_{n+1}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} g(s, w_n(s))ds, \qquad t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Нетрудно показать, что

$$0 \leq w_{n+1}(t) \leq w_n(t) \qquad \text{при} \qquad t \in [t_0, t_0 + \Delta].$$

Из того, что $|w_n'(t)| \leq g(t, w_{n-1}(t)) \leq M_1$, по теореме Арцела – Асколи находим, что $\lim_{n\to\infty} w_n(t) = w(t)$ равномерно по $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$, так как последовательность $w_n(t)$ монотонна. Функция $w(t)$ удовлетворяет уравнению (14) и в силу условия 2 теоремы 5 условию $w(t) \geq 0$ при всех $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$.

Из оценки (16) следует, что

$$d[u_1(t), u_0] \leq \int\limits_{t_0}^{t} d[f_\varkappa(s, u_0), \hat{\theta}]ds \leq M(t - t_0) = w_0(t)$$

при всех $\varkappa \in [0, 1]$.

Пусть для некоторого k справедлива оценка

$$d[u_k(t), u_{k-1}(t)] \leq w_{k-1}(t) \qquad \text{на} \qquad [t_0, t_0 + \Delta].$$

Из того, что

$$d[u_{k+1}(t), u_k(t)] \leq \int\limits_{t_0}^{t} d[f_\varkappa(s, u_\varkappa(s)), f_\varkappa(s, u_{k-1}(s))]ds,$$

и в силу монотонности функции $g(t, w)$ относительно w получаем

$$d[u_{k+1}(t), u_k(t)] \leq \int\limits_{t_0}^{t} g(s, d[u_\varkappa(s), u_{k-1}(s)])ds \leq \int\limits_{t_0}^{t} g(s, w_{k-1}(s))ds = w_k(t). \tag{17}$$

Из (17) по индукции находим

$$d[u_{n+1}(t), u_n(t)] \leq w_n(t), \qquad t \in [t_0, t_0 + \Delta],$$

при любом $n = 0, 1, 2, \ldots$ и $\varkappa \in [0, 1]$.

Обозначим $v(t) = d[u_{n+1}(t), u_n(t)]$ при $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$. Нетрудно получить оценку

$$D^+ v(t) \leq g(t, d[u_n(t), u_{n-1}(t)]) \leq g(t, w_{n-1}(t)). \tag{18}$$

Пусть $n \leq m$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Для расстояния между $u_n' \equiv du_n/dt$ и $u_m' \equiv du_m/dt$ получаем

$$d[u_n'(t), u_m'(t)] = d[f_\varkappa(t, u_{n-1}(t)), f_\varkappa(t, u_{m-1}(t))] \leq d[f_\varkappa(t, u_n(t)), f_\varkappa(t, u_{n-1}(t))] +$$

$$+ d[f_\varkappa(t, u_{n-1}(t)), f_\varkappa(t, u_{m-1}(t))] + d[f_\varkappa(t, u_m(t)), f_\varkappa(t, u_{m-1}(t))] \leq$$

$$\leq g(t, w_{n-1}(t)) + g(t, w_{m-1}(t)) + g(t, d[u_n(t), u_m(t)]) \tag{19}$$

при всех $\varkappa \in [0, 1]$. Из (19) следует, что

$$D^+ v(t) \leq d[u_n'(t), u_m'(t)] \leq g(t, v(t)) + 2g(t, w_{n-1}(t)), \qquad t \in [t_0, t_0 + \Delta].$$

Поскольку $g(t, w)$ — не убывающая по w функция, получаем оценку $w_{m-1} \leq w_{n-1}$ при любом $n \leq m$ ($\{w_n(t)\}$ — убывающая последовательность). Согласно теореме 1.4.1 (см. [6]) получаем

$$v(t) \leq r_n(t), \qquad t \in [t_0, t_0 + \Delta],$$

при любом $n = 0, 1, 2, \ldots$. Здесь $r_n(t)$ — максимальное решение уравнения

$$\frac{dr_n}{dt} = g(t, r_n) + 2g(t, w_{n-1}(t)), \qquad r_n(t_0) = 0. \tag{20}$$

Поскольку при $n \to \infty$ $2g(t, w_{n-1}(t)) \to 0$ равномерно на $[t_0, t_0 + \Delta]$, $r_n(t) \to 0$ равномерно на $[t_0, t_0 + \Delta]$. Отсюда следует, что последовательность $\{u_n(t)\}$ сходится к решению $u_\varkappa(t)$ задачи (2) равномерно по $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$ при любом $\varkappa \in [0, 1]$ и является решением семейства уравнений (2).

Чтобы показать единственность решения задачи (2) при выполнении условий теоремы 5, рассмотрим другое решение $u^0(t)$ задачи (2). Пусть $m(t) = d[u_\varkappa(t), u^0(t)]$ и $m(t_0) = 0$. Из того, что $D^+ m(t) \leq g(t, m(t))$ при $t \in I$ и $m(t) \leq r(t, t_0, 0)$ при всех $t \in I$, следует, что $u_\varkappa(t) = u^0(t)$ при всех $t \in I$ и $\varkappa \in [0, 1]$.

5. О непрерывной зависимости семейства решений задачи (2) от начальных условий. Установим вначале следующий результат.

Лемма 2. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) *при любом* $\varkappa \in [0, 1]$ *семейство* $f_\varkappa$ *принадлежит* $C(I \times \mathbb{E}^n, \mathbb{E}^n)$ *и определено*

$$G_\varkappa(t, r) = \max_{d[u, u_0] \leq r} d[f_\varkappa(t, u), \hat{\theta}];$$

2) *для семейства уравнений*

$$\frac{dw}{dt} = G_{\varkappa}(t, w), \qquad w(t_0) = 0, \tag{21}$$

существует максимальное решение $r^*(t, t_0, 0) = \max\limits_{\varkappa} r_{\varkappa}(t, t_0, 0)$, *где* $r_{\varkappa}(t, t_0, 0)$ — *решение семейства уравнений* (21) *на* I.

Тогда

$$d[u_{\varkappa}(t, t_0, 0), \hat{\theta}] \le r^*(t, t_0, 0)$$

при всех $t \in I$ *и* $\varkappa \in [0, 1]$.

Доказательство. Пусть $m(t) = d[u_{\varkappa}(t, t_0, 0), u_0]$ при всех $t \in I$ и $\varkappa \in [0, 1]$. Согласно следствию 1 имеем

$$D^+ m(t) \le d\left[\frac{du_{\varkappa}(t, t_0, 0)}{dt}, \hat{\theta}\right] = d[f_{\varkappa}(t, u_{\varkappa}(t, t_0, 0)), \hat{\theta}] \le$$

$$\le \max_{d[u, u_0] \le m(t)} d[f_{\varkappa}(t, u), \hat{\theta}] = G_{\varkappa}(t, m(t)).$$

Применяя к задаче (21) теорему 1.4.1 из монографии [6], получаем оценку

$$m(t) \le d[u_{\varkappa}(t, t_0, 0), \hat{\theta}] \le r_{\varkappa}(t, t_0, 0) < r^*(t, t_0, 0)$$

при всех $t \in I$ и $\varkappa \in [0, 1]$.

Теорема 6. *Пусть выполняются условия теоремы* 4 *и, кроме того, семейство решений* $r_{\varkappa}(t, t_0, 0)$ *уравнений* (21) *непрерывно относительно* (t_0, w_0) *при любом* $\varkappa \in [0, 1]$. *Тогда семейство решений* $u_{\varkappa}(t, t_0, u_0)$ *задачи* (2) *непрерывно относительно* (t_0, w_0) *при любом* $\varkappa \in [0, 1]$.

Доказательство. Пусть $u_{\varkappa}(t, t_0, u_0)$ и $v_{\varkappa}(t, t_0, v_0)$ — некоторые решения семейства уравнений (2). Из теоремы 4 следует, что

$$d[u_{\varkappa}(t, t_0, u_0), v_{\varkappa}(t, t_0, v_0)] \le r^*(t, t_0, d[u_0, v_0])$$

при всех $t \in I$ и $\varkappa \in [0, 1]$. Поскольку $\lim_{u_0 \to v_0} r^*(t, t_0, d[u_0, v_0]) = r^*(t, t_0, 0)$ равномерно по $t \in \in I$, согласно предположению $r^*(t, t_0, 0) \equiv 0$, $\lim_{u_0 \to v_0} d[u_{\varkappa}(t, t_0, u_0), v_{\varkappa}(t, t_0, v_0)] = 0$. Отсюда следует, что $u_{\varkappa}(t, t_0, u_0)$ непрерывно относительно u_0 при всех $\varkappa \in [0, 1]$. Непрерывность $u_{\varkappa}(t, t_0, u_0)$ относительно t_0 основывается на лемме 2 и аналогичных рассуждениях для двух семейств решений $u_{\varkappa}(t, t_0, u_0)$ и $v_{\varkappa}(t, \tau_0, v_0)$, где $\tau_0 \ge t_0$, $\varkappa \in [0, 1]$.

6. Условия глобального существования решений задачи (2). Продолжим исследование семейства уравнений (2) и установим условия существования решений при всех $t \ge t_0$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 7. *Предположим, что семейство уравнений* (2) *удовлетворяет следующим условиям*:

1) *при всех* $\varkappa \in [0, 1]$ *отображение* $f_{\varkappa}$ *принадлежит* $C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{E}^n, \mathbb{E}^n)$;

2) *существует семейство функций* $g_\varkappa \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ $(g_\varkappa(t,w)$ — *не убывающие по* w *функции при всех* $t \in \mathbb{R}_+)$ *таких, что*

$$d[f_\varkappa(t,u),\hat{\theta}] \le g^*_\varkappa(t, d[u,\hat{\theta}])$$

при всех $(t,u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{E}^n$ *и* $\varkappa \in [0,1]$;

3) *существует максимальное решение семейства уравнений сравнения*

$$\frac{dw}{dt} = g^*_\varkappa(t,w), \qquad w(t_0) = w_0 \ge 0, \tag{22}$$

при всех $t \ge t_0$.

Тогда если локальное решение $u_\varkappa(t,t_0,u_0)$ *начальной задачи* (2) *существует, то максимальным интервалом его существования при начальных условиях* $u_0 \colon d[u_0,\hat{\theta}] \le w_0$ *является интервал* $[t_0,\infty)$ *при всех* $\varkappa \in [0,1]$.

Доказательство. Пусть семейство решений $u_\varkappa(t,t_0,u_0)$ при $\varkappa \in [0,1]$ имеет начальные значения $u_0 \colon d[u_0,\hat{\theta}] \le w_0$ и существует на интервале $[t_0,b)$, $0 < b < \infty$, где b не может быть увеличено. Для $m(t) = d[u_\varkappa(t,t_0,u_0),\hat{\theta}]$, согласно следствию 1, имеем оценку

$$m(t) \le \overline{r}(t,t_0,w_0) \tag{23}$$

при всех $t_0 \le t < b$. При любых $(t_1,t_2) \in [t_0,b)$, $t_1 < t_2$, для решений $u_\varkappa(t_1)$ и $u_\varkappa(t_2)$ справедлива оценка

$$d[u_\varkappa(t_1),u_\varkappa(t_2)] = d\left[u_0 + \int_{t_0}^{t_1} f_\varkappa(s,u_\varkappa(s))ds, u_0 + \int_{t_0}^{t_2} f_\varkappa(s,u_\varkappa(s))ds\right] =$$

$$= d\left[\int_{t_1}^{t_2} f_\varkappa(s,u_\varkappa(s))ds, \hat{\theta}\right] \le \int_{t_1}^{t_2} d[f_\varkappa(s,u_\varkappa(s)),\hat{\theta}]ds \le \int_{t_1}^{t_2} g^*_\varkappa(s, d[u_\varkappa(s),\hat{\theta}])ds \tag{24}$$

при всех $\varkappa \in [0,1]$. Из оценки (24) и условия 3 теоремы 7 имеем

$$d[u_\varkappa(t_1),u_\varkappa(t_2)] \le \int_{t_1}^{t_2} g^*_\varkappa(s,\overline{r}(s,t_0,w_0))ds = \overline{r}(t_2,t_0,w_0) - \overline{r}(t_1,t_0,w_0) \tag{25}$$

при всех $\varkappa \in [0,1]$.

По предположению $\lim_{t\to b^-} \overline{r}(t,t_0,w_0)$ существует и конечен. Поэтому при $t_1,t_2 \to b^-$ находим, что $\lim_{t\to b^-} u_\varkappa(t,t_0,u_0)$ существует также при любом значении $\varkappa \in [0,1]$. В этом случае $\lim_{t\to b^-} u_\varkappa(t,t_0,u_0) = u_\varkappa(b,t_0,u_0) = u_\varkappa(b)$.

Задачу (2) рассмотрим в виде

$$\frac{du}{dt} = f_\varkappa(t,u), \qquad u(b) = u(b,t_0,u_0). \tag{26}$$

Поскольку по предположению локальное решение $u_\varkappa(t,t_0,u_0)$ существует, решение задачи (26) может быть продолжено за пределы величины b, что противоречит сделанному выше предположению. Следовательно, семейство решений $u_\varkappa(t,t_0,u_0)$ существует при всех $t \ge t_0$, как только $u_0 \colon d[u_0,\hat{\theta}] \le w_0$ и выполняются все условия теоремы 7.

***Замечание* 1.** Теорема 7 остается в силе, если существует хотя бы одно значение $\varkappa^* \in \in [0, 1]$, при котором выполняются все ее условия.

7. О приближенном решении семейства уравнений (1). Множество регуляризованных уравнений (2) является некоторым приближением семейства неточных уравнений (1). Представляет интерес задача о приближенном решении семейства уравнений (1) на основе множества решений семейства уравнений (2).

Далее будем использовать следующее определение (см. [1, 2] и приведенную там библиографию).

Определение 1. *Семейство функций $u_\varkappa(t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{E}^n)$ является ε-приближенным решением множества уравнений* (1), *если при заданном $\varepsilon > 0$ существует $\varkappa^* \in [0, 1]$ такое, что $d[u(t), u_{\varkappa^*}(t)] \le \varepsilon$ при всех $t \ge t_0$.*

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) *при любом $\varkappa \in [0, 1]$ отображение $f_\varkappa$ принадлежит $C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{E}^n, \mathbb{E}^n)$ и при всех $\alpha \in \mathfrak{I}$ отображение f принадлежит $C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{E}^n \times \mathfrak{I}, \mathbb{E}^n)$*;

2) *существует семейство функций $g_\varkappa(t, w) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, не убывающих по w, таких, что*

$$d[f_\varkappa(t, u), f(t, v, \alpha)] \le g_\varkappa(t, d[u, v])$$

при всех $\varkappa \in [0, 1]$ и любом $\alpha \in \mathfrak{I}$;

3) *существует максимальное решение семейства начальных задач*

$$\frac{dw}{dt} = g_\varkappa(t, w), \qquad w(t_0) = w_0 \ge 0, \tag{27}$$

при всех $t \ge t_0$;

4) *существует хотя бы одно значение $\varkappa^* \in [0, 1]$, при котором $0 < r(t, t_0, w_0) < \varepsilon$ при всех $t \ge t_0$.*

Тогда $u_{\varkappa^*}(t)$ является ε-приближенным решением начальной задачи (1), *как только $d[u_0, v_0] \le \le w_0$.*

Доказательство. Обозначим $m(t) = d[u(t), v(t)]$, где $v(t) = u_\varkappa(t)$ при любом $\varkappa \in [0, 1]$. Учитывая, что

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s), \alpha) ds$$

и

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} f_\varkappa(s, v(s)) ds,$$

получаем, что при всех $\varkappa \in [0, 1]$ справедлива оценка

$$m(t) = d\left[u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s), \alpha) ds, v_0 + \int_{t_0}^{t} f_\varkappa(s, v(s)) ds\right] \le$$

$$\leq d[u_0, v_0] + d\left[\int_{t_0}^{t} f(s, u(s), \alpha)ds, \int_{t_0}^{t} f_\varkappa(s, v(s))ds\right] \leq$$

$$\leq d[u_0, v_0] + \int_{t_0}^{t} d[f(s, u(s), \alpha), f_\varkappa(s, v(s))]ds \leq d[u_0, v_0] +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} g_\varkappa(s, d[u(s), v(s)])ds \leq w_0 + \int_{t_0}^{t} g_\varkappa(s, m(s))ds. \tag{28}$$

Применяя к неравенству (27) теорему 1.6.1 из монографии [5], получаем оценку

$$m(t) \leq r(t, t_0, w_0) \qquad \text{при всех} \qquad t \geq t_0, \tag{29}$$

где $r(t, t_0, w_0)$ — максимальное решение семейства уравнений (27). При выполнении условия 4 теоремы 8 из (29) следует, что $u_{\varkappa^*}(t)$ при $\varkappa^* \in [0, 1]$ является ε-приближенным решением начальной задачи (1).

8. Анализ устойчивости стационарного решения семейства уравнений (2). В работе [3] приведена постановка задачи об устойчивости стационарного решения $\hat{\theta}_0 \in \mathbb{E}^n$ семейства уравнений (2) и указаны условия устойчивости на основе прямого метода Ляпунова. В этом пункте анализ устойчивости предлагается проводить на основе обобщенного принципа сравнения.

Напомним некоторые определения обобщенного принципа сравнения.

Рассматривается семейство уравнений

$$\frac{dw}{dt} = g^*_\varkappa(t, w, w), \qquad w(t_0) = w_0 \geq 0, \tag{30}$$

в котором $g_\varkappa \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ и $g_\varkappa(t, 0, 0) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $\varkappa \in [0, 1]$.

Определение 2. *Тривиальное решение $w = 0$ семейства уравнений* (30) *эквиустойчиво, если для любого $\varepsilon^* \in (0, H)$ и $t_0 \in \mathbb{R}_+$ существует $\delta^* = \delta^*(t_0, \varepsilon^*) > 0$ такое, что*

$$w_\varkappa(t, t_0, w_0) < \varepsilon^* \qquad \textit{при всех} \qquad t \geq t_0$$

и при любых $0 < w_0 < \delta^*$, где $w_\varkappa(t, t_0, w_0)$ — любое решение семейства уравнений (30), *существующее при $t \geq t_0$ и при всех $\varkappa \in [0, 1]$.*

Приведем одно неравенство, которое используется далее.

Лемма 3. *Предположим, что*:

1) *семейство функций $g_\varkappa(t, w, w)$ непрерывно в области значений $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ и $|w| < \infty$*;

2) *при каждом $\varkappa \in [0, 1]$ семейство функций $g_\varkappa(t, w, \xi)$ квазимонотонно и не убывающее по w при каждом (t, ξ) и монотонно не убывающее по ξ при каждом (t, w)*;

3) *максимальное решение $r_\varkappa(t, t_0, w_0)$ семейства уравнений* (30) *существует на интервале $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ при любом $\varkappa \in [0, 1]$*;

4) $m(t)$ — *непрерывная функция, удовлетворяющая интегральному неравенству*

$$m(t) \leq m(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} g_\varkappa(s, m(s), \xi(s))ds \tag{31}$$

при всех $t \in [t_0, t_0 + a]$ *и* $\varkappa \in [0, 1]$.

Тогда

$$m(t) < \overline{r}(t, t_0, w_0) \tag{32}$$

при всех $t \in [t_0, t_0 + a]$, *где* $\overline{r}(t, t_0, w_0) = \max\limits_{\varkappa} r_\varkappa(t, t_0, w_0)$.

Доказательство. Пусть функция $v(t)$ определена при любом значении $\varkappa \in [0, 1]$ так:

$$v(t) = m(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} g_\varkappa(s, m(s), \xi(s))ds.$$

При этом получаем

$$m(t) \leq v(t)$$

и

$$\frac{dv}{dt} = g_\varkappa(t, m(t), \xi(t)). \tag{33}$$

Поскольку семейство функций $g_\varkappa(t, m(t), \xi(t))$ при каждом $\varkappa \in [0, 1]$ удовлетворяет условию 2 леммы 3, имеем

$$\frac{dv}{dt} \leq g_\varkappa(t, v(t), \xi(t)) \tag{34}$$

при всех $t \in [t_0, t_0 + a]$ и $\varkappa \in [0, 1]$. Отсюда, согласно принципу сравнения (см. теорему 1.5.4 из монографии [7]), получаем оценку

$$m(t) \leq r_\varkappa(t, t_0, w_0) < \overline{r}_\varkappa(t, t_0, w_0)$$

при всех $t \in [t_0, t_0 + a]$ и $\varkappa \in [0, 1]$.

Из леммы 3 вытекает такое следствие.

***Следствие* 3.** *Пусть в условиях леммы* 3 *неравенство* (31) *имеет вид*

$$m(t) \leq f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} g_\varkappa(s, m(s), \xi(s))ds$$

при всех $t \in [t_0, t_0 + a]$ *и* $\varkappa \in [0, 1]$, *где* $f(t)$ — *непрерывная функция на* $t \in [t_0, t_0 + a]$. *Тогда неравенство* (32) *принимает вид*

$$m(t) \leq f(t) + r^*(t, t_0, w_0),$$

где $r^*(t, t_0, w_0) = \max\limits_{\varkappa} r^*_\varkappa(t, t_0, w_0)$ *и* $r^*_\varkappa(t, t_0, 0)$ — *максимальное решение семейства уравнений*

$$\frac{dz}{dt} = g_\varkappa(t, f(t) + z, \xi(t)), \quad z(t_0) = 0,$$

существующее на интервале $[t_0, t_0 + a]$ *при любом* $\varkappa \in [0, 1]$.

Приведем простые условия устойчивости стационарного решения $\hat{\theta}_0$ семейства уравнений (2).

Теорема 9. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) *при любом* $\varkappa \in [0,1]$ *отображение* $f_\varkappa$ *принадлежит* $C(\mathbb{R}_+ \times S(\rho), \mathbb{E}^n)$, $S(\rho) = \{u \in \mathbb{E}^n : d[u, \hat{\theta}_0] < \rho\}$, $f_\varkappa(t, \hat{\theta}_0) = \hat{\theta}_0$ *при всех* $t \le t_0$;

2) *существует семейство функций* $g_\varkappa(t, w, w)$, *удовлетворяющих условиям леммы* 3, *таких, что*

$$\lim_{h \to 0^+} \sup\{d[u + hf_\varkappa(t,u), \hat{\theta}_0] - d[u, \hat{\theta}_0]\} \le g_\varkappa(t, d[u, \hat{\theta}_0], \xi(t))$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+$, $u \in S(\rho)$ *и* $\varkappa \in [0,1]$.

Тогда из свойств устойчивости нулевого решения семейства уравнений (30) *следуют соответствующие свойства устойчивости стационарного решения* $\hat{\theta}_0$ *семейства уравнений* (2).

Доказательство. Пусть состояние $w = 0$ семейства уравнений (30) устойчиво. Обозначим $m(t) = d[u(t), \hat{\theta}_0]$ и в силу условия 2 теоремы 9 получим

$$D^+ m(t) \le g_\varkappa(t, m(t), \xi(t)) \tag{35}$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $\varkappa \in [0,1]$. Из неравенства (35) и леммы 3 имеем оценку

$$m(t) \le r_\varkappa(t, t_0, w_0) \tag{36}$$

при всех $t \ge t_0$ и $\varkappa \in [0,1]$.

Пусть задано $\varepsilon^* \in (0, H)$ и $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Поскольку состояние $w = 0$ семейства уравнений (30) устойчиво, для заданного $\varepsilon^* > 0$ существует $\delta^* = \delta^*(\varepsilon^*) > 0$ такое, что из условия $w_0 < \delta^*$ следует $r^*(t, t_0, w_0) < \varepsilon^*$ при всех $t \ge t_0$ и $\varkappa \in [0,1]$. Покажем, что если $d[u_0, \hat{\theta}_0] < \delta^*$, то $d[u_\varkappa(t), \hat{\theta}_0] < \varepsilon$ при всех $t \ge t_0$ и $\varkappa \in [0,1]$. Если это не верно, то должны существовать решение $\widetilde{u}_\varkappa(t) = \widetilde{u}_\varkappa(t, t_0, u_0)$, для которого $d[u_0, \hat{\theta}_0] < \delta^*$, и $t_1 > t_0$ такое, что

$$d[\widetilde{u}_\varkappa(t_1), \hat{\theta}_0] = \varepsilon^* \qquad \text{и} \qquad d[u_\varkappa(t), \hat{\theta}_0] \le \varepsilon < \varepsilon^*$$

при $t_0 \le t < t_1$. Для значений $t \in [t_0, t_1]$ имеем

$$d[u_\varkappa(t), \hat{\theta}_0] \le r_\varkappa(t, t_0, d[u_0, \hat{\theta}_0]) < r^*(t, t_0, d[u_0, \hat{\theta}_0]) < \varepsilon^*.$$

Это противоречит сделанному предположению о существовании $t_1 > t_0$.

Теорема 9 доказана.

Замечание 2. Функция $\xi(t)$ в условии 2 теоремы 9 играет роль корректирующей функции, обеспечивающей „наилучшую” оценку в этом условии.

Замечание 3. Семейство функций $g_\varkappa(t, w, \xi)$ при $\varkappa \in [0,1]$ и замена функции $\xi(t)$ множеством решений $u_\varkappa(t)$ уравнений (2) позволяют рассматривать расширенную систему

$$\frac{du}{dt} = f_\varkappa(t, u(t)), \qquad u(t_0) = u_0,$$

$$w(t) = w(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} g_\varkappa(s, w(s), u(s))ds,$$

где $\varkappa \in [0, 1]$ и $u \in \mathbb{E}^n$, с целью получения условий устойчивости стационарного решения $\hat{\theta}_0$ системы (2) на основе условий устойчивости нулевого решения $(u(t), w(t)) \in \mathbb{E}^n$ относительно части переменных.

9. Заключительные замечания. Проблемам анализа нечетких уравнений посвящено большое количество статей и монографий (см. [1, 2] и приведенную там библиографию). Предложенные подходы к качественному анализу решений или их построению позволяют рассматривать нечеткие модели явлений реального мира. Подход, изложенный в этой работе, основан на процедуре „регуляризации” нечеткого уравнения с неточными параметрами (см. [8]). Его общность и применимость адекватны другим подходам, в которых не используется процедура регуляризации неточного уравнения, но он имеет то преимущество, которое следует из принципа сравнения в общей теории уравнений. Представляет интерес разработка предложенного подхода в контексте с различными определениями производной нечетких функций, которые обсуждаются в статье [9].

1. *Lakshmikantham V., Mohapatra R. N.* Theory of fuzzy differential equations and inclusions. – London: Taylor and Francis, 2003. – 178 p.
2. *Плотников А. В., Скрыпник Н. В.* Дифференциальные уравнения с „четкой” и нечеткой многозначной правой частью. Асимптотические методы. – Одесса: Астропринт, 2009. – 191 с.
3. *Мартынюк А. А., Мартынюк-Черниенко Ю. А.* Устойчивость движения нелинейных систем с нечеткой характеристикой параметров // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 1. – С. 50 – 70.
4. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. – 1990. – № 35. – P. 389 – 396.
5. *Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A. A.* Stability analysis of nonlinear systems. – New York: Marcel Dekker, 1989. – 315 p.
6. *Lakshmikantham V., Leela S.* Differential and integral inequalities. – New York: Acad. Press, 1969. – Vol. 1. – 319 p.
7. *Rama Mohana Roo M.* Ordinary differential equations. Theory and applications. – New Delhi; Madras: Affiliated East-West Press Pvt, Ltd., 1980. – 266 p.
8. *Martynyuk A. A., Martynyuk-Chernienko Yu. A., Sun Zhen Qi.* Uncertain dynamical systems: stability and motion control. – Beijing: Sci. Press, 2011. – 237 p.
9. *Buckley J. J., Feuring T.* Fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. – 2000. – **110**. – P. 43 – 54.

Получено 29.08.13