УДК 517.956

С. А. Алдашев (Актюб. ун-т, Актобе, Казахстан)

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И ПУАНКАРЕ В МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

We find a many-dimensional domain in which the Dirichlet and Poincaré problems for the wave equation are uniquely solvable.

Знайдено багатовимірну область, у якій однозначно розв'язні задачі Діріхле та Пуанкаре для хвильового рівняння.

В [1] было показано, что на плоскости одна из фундаментальных задач математической физики — изучение поведения колеблющейся струны — некорректна случае, когда краевые условия заданы на всей границе области. Как отмечено в [2, 3], задача Дирихле некорректна не только для волнового уравнения, но и для общих гиперболических уравнений. В [4] показано, что решение задачи Дирихле существует в прямоугольных областях. В дальнейшем эта задача исследовалась методами функционального анализа [5], применение которых в приложениях затруднено.

В пространстве [6, 7] получены теоремы единственности решения задачи Дирихле для строго гиперболических уравнений.

В [8 – 10] изучены задачи Дирихле и Пуанкаре для многомерного волнового уравнения, где показана корректность этих задач, существенно зависящая от высоты рассматриваемой цилиндрической области.

В данной работе найдена многомерная область внутри характеристического конуса, в которой однозначны разрешимы задачи Дирихле и Пуанкаре для волнового уравнения.

Пусть D — конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$, ограниченная при $t > 0$ конической поверхностью $\Gamma\colon t = \varphi(r)$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\varphi(r) \in \in C^1([0,1]) \cap C^2((0,1))$, $|\varphi'(r)| < 1$, $\varphi'(r) \neq 0$ и плоскостью $t = 0$, где $r = |x|$ — длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$. Обозначим через S множество $\{t = 0,\ 0 < r < 1\}$ точек из E_m.

В области D рассмотрим многомерное волновое уравнение

$$\Delta_x u - u_{tt} = 0, \tag{1}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m,\ m \geq 2$.

В качестве многомерных задач Дирихле и Пуанкаре для уравнения (1) рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Найти в области D решение уравнения (1) из класса $C(\bar{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_S = \tau(x), \qquad u\,|_\Gamma = \sigma(x), \tag{2}$$

или

$$u_t|_S = \nu(x), \qquad u|_\Gamma = \sigma(x). \tag{3}$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m$, t к сферическим $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, \ldots, m-1$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$, $W_2^l(S)$, $l = 0, 1, \ldots,$ — пространства Соболева.

Имеет место следующая лемма [11].

Лемма 1. *Пусть функция $f(r,\theta)$ принадлежит $W_2^l(S)$. Если $l \geq m-1$, то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. *Для того чтобы функция $f(r,\theta)$ принадлежала $W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда* (3) *удовлетворяли неравенствам*

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \quad c_1,\, c_2 = \text{const}\,.$$

Через $\bar{\tau}_n^k(r)$, $\bar{\nu}_n^k(r)$, $\bar{\sigma}_n^k(r)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (4) соответственно функций $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, $\sigma(r,\theta)$.

Пусть $\tau(r,\theta) = r^3\tau^*(r,\theta)$, $\nu(r,\theta) = r^3\nu^*(r,\theta)$, $\sigma(r,\theta) = r^3\sigma^*(r,\theta)$, $\tau^*(r,\theta)$, $\nu^*(r,\theta)$, $\sigma^*(r,\theta) \in W_2^l(S)$, $l > \dfrac{3m}{2} + 4$, при этом $\tau^*(1,\theta) = \sigma^*(1,\theta)$.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Задача* 1 *однозначно разрешима.*

Доказательство. Сначала рассмотрим задачу (1), (2). В сферических координатах уравнения (1) имеет вид [11]

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_{tt} = 0, \tag{5}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),$$

$$g_1 = 1, \quad g_j = (\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Поскольку искомое решение задачи (1), (2) принадлежит классу $C(\bar{D}) \cap C^2(D)$, его можно искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5) и используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [11], получаем

$$\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k - \bar{u}_{ntt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k = 0, \quad \lambda_n = n(n+m-2), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{7}$$

Выполняя замену $\bar{u}_n^k(r,t) = r^{\frac{1-m}{2}} u_n^k(r,t)$ и полагая затем $\xi = \dfrac{r+t}{2}$, $\eta = \dfrac{r-t}{2}$, из (7) находим

$$u_{n\xi\eta}^k + \frac{\big[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n\big]}{4(\xi+\eta)^2} u_n^k = 0. \tag{8}$$

Тогда условия (2) для функций $u_n^k(\xi,\eta)$ с учетом леммы 1 примут вид

$$u_n^k(\xi,\xi) = \tau_n^k(\xi), \qquad u_n^k(\xi,\gamma(\xi)) = \sigma_n^k(\xi), \quad \xi \in \bar{J}, \tag{9}$$

где $\tau_n^k(\xi) = (2\xi)^{\frac{m-1}{2}} \bar{\tau}_n^k(2\xi)$, $\sigma_n^k(\xi) = (\xi + \gamma(\xi))^{\frac{m-1}{2}} \bar{\sigma}_n^k(\xi + \gamma(\xi))$, а функция $\eta = \gamma(\xi)$ является решением уравнения $\eta = \xi - \varphi(\xi+\eta)$. Здесь и ниже J обозначает интервал $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

Функция $\eta = \gamma(\xi)$ имеет следующие свойства: осуществляет топологическое отображение сегмента $\bar{J}$ в себя, оставляя неподвижными его концы, и

$$\gamma'(\xi) = \frac{1-\varphi'(r)}{1+\varphi'(r)} > 0, \qquad \gamma'(\xi) \neq 1, \quad \xi \in \bar{J}. \tag{10}$$

С использованием общего решения уравнения (8) [2] в [12] показано, что решение задачи Коши для уравнения (8) имеет вид

$$u_n^k(\xi,\eta) = \frac{\tau_n^k(\eta)}{2} R(\eta,\eta,;\xi,\eta) + \frac{\tau_n^k(\xi)}{2} R(\xi,\xi,;\xi,\eta) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{\eta}^{\xi} \left[\nu_n^k(\xi_1) R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta) - \tau_n^k(\xi_1) \frac{\partial}{\partial N} R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta) \bigg|_{\xi_1=\eta_1} \right] d\xi_1, \tag{11}$$

где $R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta) = P_\mu \left[\dfrac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta) + 2(\xi_1\eta_1 + \xi\eta)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)} \right]$ — функция Римана уравнения (8) [13], а $P_\mu(z)$ — функция Лежандра, $\mu = \dfrac{n+(m-3)}{2}$,

$$\nu_n^k(\xi_1) = \frac{\partial u_n^k}{\partial N} \bigg|_{\xi_1=\eta_1} = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial N^\perp} \frac{\partial u_n^k}{\partial \eta_1} + \frac{\partial \eta_1}{\partial N^\perp} \frac{\partial u_n^k}{\partial \xi_1} \right) \bigg|_{\xi_1=\eta_1},$$

$N^\perp$ — нормаль к прямой $\xi = \eta$ в точке (ξ_1,η_1), направленная в сторону полуплоскости $\eta \leq \xi$.

Из уравнения (11), учитывая краевое условие (9), при $\eta = \gamma(\xi)$ после дифференцирования по ξ получаем функционально-интегральное уравнение

$$\psi_n^k(\xi) = \nu_n^k(\xi) - \gamma'(\xi)\nu_n^k(\gamma(\xi)), \tag{12}$$

где

$$\psi_n^k(\xi) = g_n^k(\xi) - \int\limits_{\gamma(\xi)}^{\xi} \nu_n^k(\xi_1) \frac{\left[\gamma^2(\xi) - \xi_1^2 + \gamma'(\xi)(\xi^2 - \xi_1^2)\right]}{\xi_1(\xi + \gamma(\xi))^2} P'_\mu(z) d\xi_1,$$

$$g_n^k(\xi) = \frac{d}{d\xi} h_n^k(\xi),$$

$$h_n^k(\xi) = \sqrt{2}\sigma_n^k(\xi) - \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_n^k(\xi) - \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_n^k(\gamma(\xi)) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{\gamma(\xi)}^{\xi} \frac{\tau_n^k(\xi_1)}{\xi_1} \frac{(\xi - \gamma(\xi))}{(\xi + \gamma(\xi))} P'_\mu(z) d\xi_1,$$

$$P_\mu(z) = P_\mu\left[\frac{\xi_1^2 + \xi\gamma(\xi)}{\xi_1(\xi + \gamma(\xi))}\right].$$

Из (10) следует, что

$$1 - \gamma'(\xi)\gamma'(\gamma(\xi)) \neq 0, \quad \xi \in \bar{J}. \tag{13}$$

В [14] показано, что при выполнении условия (13) функциональное уравнение (12) имеет единственное решение вида

$$\nu_n^k(\xi) = \frac{\psi_n^k(\xi) + \gamma'(\xi)\psi_n^k(\gamma(\xi))}{1 - \gamma'(\xi)\gamma'(\gamma(\xi))} = \mu_n^k(\xi) + \int\limits_{\gamma^2(\xi)}^{\xi} G_n(\xi, \xi_1)\nu_n^k(\xi_1) d\xi_1, \tag{14}$$

где

$$\mu_n^k(\xi) = \frac{g_n^k(\xi) - \gamma'(\xi) g_n^k(\gamma(\xi))}{1 - \gamma'(\xi)\gamma'(\gamma(\xi))}, \qquad \mu_n^k(\xi) = \xi^2 \bar{\mu}_n^k(\xi), \quad \bar{\mu}_n^k(\xi) \in C(\bar{J}),$$

$$G_n(\xi, \xi_1) = \begin{cases} \dfrac{\gamma'(\xi)[\gamma^3(\xi) - \xi_1^2 + \gamma'(\gamma(\xi))(\gamma^2(\xi) - \xi_1^2)]}{[\gamma'(\xi)\gamma'(\gamma(\xi)) - 1][\gamma(\xi) + \gamma^2(\xi)]^2 \xi_1} P'_\mu\left[\dfrac{\xi_1^2 + \gamma^3(\xi)}{\xi_1(\gamma(\xi) + \gamma^2(\xi))}\right], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \gamma^2(\xi) \leq \xi_1 \leq \gamma(\xi), \\ \dfrac{[\gamma^2(\xi) - \xi_1^2 + \gamma'(\xi)(\xi^2 - \xi_1^2)]}{[\gamma'(\xi)\gamma'(\gamma(\xi)) - 1](\xi + \gamma(\xi))^2 \xi_1} P'_\mu\left[\dfrac{\xi_1^2 + \xi\gamma(\xi)}{\xi_1(\xi + \gamma(\xi))}\right], \quad \gamma(\xi) \leq \xi_1 \leq \xi. \end{cases} \tag{15}$$

Поскольку $|P'_\mu(z)| \leq C = \text{const}$ [15], ядро $G_n(\xi, \xi_1)$ (15) допускает оценку

$$|G_n(\xi, \xi_1)| \leq \frac{C_1}{\xi_1}, \quad C_1 = \text{const}. \tag{16}$$

Решение интегрального уравнения (14) будем искать в виде ряда

$$\nu(\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} \nu_l(\xi), \tag{17}$$

$$\nu_0(\xi) = \mu_n^k(\xi), \qquad \nu_l(\xi) = \int\limits_{\gamma^2(\xi)}^{\xi} G_n(\xi,\xi_1)\nu_{l-1}(\xi_1)d\xi_1, \quad l = 1, 2, \ldots .$$

Из (16) получим следующие оценки:

$$|\nu_0(\xi)| \le \xi^2 \max_{\bar{J}} |\bar{\mu}_n^k(\xi)| = m\xi^2, \qquad |\nu_1(\xi)| \le mC_1\xi,$$

$$|\nu_2(\xi)| \le mC_1\frac{\xi}{2}$$

или в общем

$$|\nu_l(\xi)| \le \frac{mC_1}{2^l}.$$

Тогда для ряда (17) будем иметь

$$|\nu(\xi)| \le \sum_{l=0}^{\infty} |\nu_l(\xi)| \le m\xi^2 + mC_1 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} = m\xi^2 + mC_1 \le m(1 + C_1).$$

Таким образом, интегральное уравнение (14) (а также (12)) имеет единственное решение. Следовательно, функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} r^{\frac{1-m}{2}} u_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta) \tag{18}$$

является решением задачи (1), (2), где $u_n^k(r,t)$, $k = \overline{1,k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$, находятся по формуле (11), в которой $\nu_n^k(\xi)$ определяются из (14).

Теперь рассмотрим задачу (1), (3), и ее решение также будем искать в виде (6). В этом случае условие (3) принимает вид

$$\left.\frac{\partial u_n^k}{\partial N}\right|_{\xi=\eta} = \nu_n^k(\xi), \qquad u_n^k(\xi,\gamma(\xi)) = \sigma_n^k(\xi), \quad \xi \in \bar{J},$$
$$\nu_n^k(\xi) = \sqrt{2}(2\xi)^{\frac{m-1}{2}} \bar{\nu}_n^k(2\xi), \qquad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{19}$$

Далее, из (11) при $\eta = \gamma(\xi)$ с учетом (19) получаем функционально-интегральное уравнение вида

$$\tau_n^k(\xi) + \tau_n^k(\gamma(\xi)) = g_n^k(\xi) + \int\limits_{\gamma(\xi)}^{\xi} G_n(\xi,\xi_1)\tau_n^k(\xi_1)d\xi_1, \tag{20}$$

где

$$g_n^k(\xi) = 2\sigma_n^k(\xi) - \sqrt{2}\int\limits_{\gamma(\xi)}^{\xi} \nu_n^k(\xi_1) P_\mu \left[\frac{\xi_1^2 + \xi\gamma(\xi)}{\xi_1(\xi + \gamma(\xi))}\right] d\xi_1, \quad g_n^k(\xi) \in C(\bar{J}),$$

$$G_n(\xi,\xi_1)=\frac{\xi-\gamma(\xi)}{\xi_1(\xi+\gamma(\xi))}P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\xi\gamma(\xi)}{\xi_1(\xi+\gamma(\xi))}\right],\quad |G_n(\xi,\xi_1)|\le M.$$

Поскольку интегральный оператор, содержащийся в правой части равенства (20), вполне непрерывен, то, как показано в [14], функциональное уравнение (20) имеет единственное решение.

Следовательно, функция (18) является решением задачи (1), (3), где $u_n^k(r,t)$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\ldots$, определяются из формулы (11), в которой $\tau_n^k(\xi)$ находятся из (20).

Учитывая ограничения на заданные функции $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, $\sigma(r,\theta)$, леммы и формулы [15]

$$\frac{d^m}{dz^m}P_\mu(z)=\frac{\Gamma(\mu+m+1)}{2^m\Gamma(\mu-m+1)}F\left(1+m+\mu,\ m-\mu,\ m+1,\ \frac{1-z}{2}\right),$$

$$\frac{\Gamma(z+\alpha)}{\Gamma(z+\beta)}=z^{\alpha-\beta}\left[1+\frac{1}{2z}(\alpha-\beta)(\alpha-\beta-1)+0(z^{-2})\right],$$

а также оценки [11]

$$|k_n|\le c_1 n^{m-2},\qquad \left|\frac{\partial^q Y_{n,m}^k(\theta)}{\partial\theta_j^q}\right|\le c_2 n^{\frac{m}{2}+q-1},\qquad j=\overline{1,m-1},\quad q=0,1,\ldots,$$

где $F(a,b,c,z)$ — гипергеометрическая функция, $\Gamma(z)$ — гамма-функция, α, β — произвольные действительные числа, как и в [12], можно показать, что полученное решение (11) принадлежит классу $C(\bar D)\cap C^2(D)$.

1. *Hadamard J.* Sur les problemes aux derivees partielles et leur signification physique // Princeton Univ. Bull. – 1902. – **13**. – P. 49 – 52.
2. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 164 с.
3. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнения в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.
4. *Bourgin D. G., Duffin R.* The Dirichlet problem the vibrating string eguation // Bull. Amer. Math. Soc. – 1939. – **45**. – P. 851 – 858.
5. *Fox D. W., Pucci C.* The Dirichlet problem the wave eguation // Ann. mat. pura ed appl. – 1958. – **46**. – P. 155 – 182.
6. *Нахушев А. М.* Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // Дифференц. уравнения. – 1970. – **6**, № 1. – С. 190 – 191.
7. *Dunninger D. R., Zachmanoglou E. C.* The condition for uniqueness of the Diriclet problem for hyperbolic equations in cilindrical domains // J. Math. and Mech. – 1969. – **18**, № 8.
8. *Aldashev S. A.* The well-posedness of the Dirichlet problem in the cylindric domain for the multidimensional wave equation // Math. Probl. Eng. – 2010. – **2010**. – Article ID 653215. – 7 p.
9. *Aldashev S. A.* The well-posedness of the Poincare problem in a cylindrical domain for the higher-dimensional wave equation // J. Math. Sci. – 2011. – **173**, № 2. – P. 150 – 154.
10. *Алдашев С. А.* Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором // Докл. Адыг. (Черкес.) междунар. акад. наук. – 2011. – **13**, № 1. – С. 21 – 29.
11. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
12. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. – Алматы: Гылым, 1994. – 170 с.
13. *Copson E. T.* On the Riemann – Green function // J. Ration. Mech. and Anal. – 1958. – **1**. – P. 324 – 348.
14. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1973. – 294 с.
15. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1974. – Т. 2. – 295 с.

Получено 04.09.13