УДК 512.542

В. Н. Тютянов (Гомел. фил. Междунар. ун-та „МИТСО”, Беларусь),
В. Н. Князина (Гос. учреждение образования „Гомел. инж. ин-т” МЧС Республики Беларусь)

ФАКТОРИЗАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП r-РАЗРЕШИМЫМИ ПОДГРУППАМИ С ЗАДАННЫМИ ВЛОЖЕНИЯМИ

Let $\mathbb{X}$ be a subset of the set of positive integers. A subgroup H of a group G is called $\mathbb{X}$-subnormal in G if there exists a chain of subgroups $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = G$ such that $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{X}$ for all i. We study the solubility and r-solubility of a finite group $G = AB$ with some restrictions imposed on subgroups A and B and on the set $\mathbb{X}$.

Нехай $\mathbb{X}$ — деяка підмножина множини натуральних чисел. Підгрупа H називається $\mathbb{X}$-субнормальною підгрупою групи G, якщо існує ланцюжок підгруп $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = G$ такий, що $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{X}$ для всіх i. У даній роботі встановлено розв'язність і r-розв'язність скінченної групи $G = AB$ з деякими обмеженнями на підгрупи A і B, а також на множину $\mathbb{X}$.

Введение. Будем рассматривать только конечные группы. Пусть $\mathbb{N}$ и $\mathbb{P}$ — множества всех натуральных и всех простых чисел соответственно. Для фиксированных чисел $t \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{P}$ положим

$$\mathbb{P}^t = \{p^k \mid p \in \mathbb{P},\ k \in \{0\} \cup \mathbb{N}, k \leq t\},$$

$$\mathbb{P}^t_r = \{p^k \mid p \in \mathbb{P} \setminus \{r\},\ k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\} \cup \{r^k \mid k \in \{0\} \cup \mathbb{N}, k \leq t\},$$

$$\mathbb{P}^\infty = \{p^k \mid p \in \mathbb{P},\ k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\},$$

$$\mathbb{L} = \{2, 4\} \cup \{2n - 1 | n \in \mathbb{N}\}.$$

Всюду в дальнейшем будем считать, что $\mathbb{X}$ — одно из введенных выше множеств.

Подгруппа H называется $\mathbb{X}$-субнормальной подгруппой группы G, если существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = G$$

такая, что $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{X}$ для всех i, при этом используется обозначение $H\ \mathbb{X}sn\ G$. Данную цепочку будем называть $\mathbb{X}$-субнормальной цепочкой для подгруппы H.

Если $\mathbb{X} = \mathbb{P}$, получаем понятие $\mathbb{P}$-субнормальности, введенное в работе [1], в которой изучены свойства конечных групп с $\mathbb{P}$-субнормальными силовскими подгруппами. В работе [2] описаны группы с $\mathbb{P}$-субнормальными 2-максимальными подгруппами и группы с $\mathbb{P}$-субнормальными примарными циклическими подгруппами.

Если $\mathbb{X} = \mathbb{P}^2$, получаем понятие $\mathbb{P}^2$-субнормальности. В [3] изучались конечные факторизуемые группы $G = AB$ при условии, что A и B $\mathbb{P}^2$-субнормальны в G. В частности, в теореме 1 этой работы, без использования классификации конечных простых групп, установлена разрешимость группы G при условии, что A и B разрешимы.

В данной работе устанавливаются разрешимость и r-разрешимость конечной группы $G = AB$ с $\mathbb{P}^t_r$-, $\mathbb{P}^\infty$- и $\mathbb{L}$-субнормальными разрешимыми или r-разрешимыми подгруппами A и B.

При доказательстве теорем используются результаты Л. С. Казарина [4] и Р. Гуральника [5], полученные на основе классификации конечных простых групп.

Доказаны следующие три теоремы.

Теорема 1. *Пусть A и B — $\mathbb{L}$-субнормальные подгруппы конечной группы G и $G = AB$. Если A и B разрешимы, то G разрешима.*

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа и $r \in \pi(G) \setminus \{2, 3, 7\}$. Если A и B — $\mathbb{P}^{\infty}$-субнормальные r-разрешимые подгруппы группы G и $G = AB$, то G является r-разрешимой группой.*

Теорема 3. *Пусть G — конечная группа и $r \in \pi(G)$. Если A и B — $\mathbb{P}_2^2$-субнормальные r-разрешимые подгруппы G и $G = AB$, то G является r-разрешимой группой.*

Пример. Простая неабелева группа $PSL_2(7)$ является произведением $\mathbb{P}^3$-субнормальной подгруппы $[Z_7]Z_3$ индекса 2^3 и $\mathbb{P}$-субнормальной симметрической подгруппы S_4. Однако $PSL_2(7)$ не является r-разрешимой для всех $r \in \{2, 3, 7\}$. Поэтому в теореме 1 множество $\mathbb{L}$ не может содержать 2^3, в теореме 2 условие $r \in \pi(G) \setminus \{2, 3, 7\}$ отбросить нельзя, а в теореме 3 условие $\mathbb{P}_2^2$-субнормальности нельзя заменить условием $\mathbb{P}_2^3$-субнормальности.

1. Вспомогательные результаты. Принятые обозначения стандартны, их можно найти в [6]. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка конечной группы G; $\mathrm{Syl}_p(G)$ — множество всех силовских p-подгрупп группы G. Запись $G = [A]B$ означает, что группа G является полупрямым произведением подгрупп A и B с нормальной подгруппой A.

Лемма 1 ([4], теорема 3). *Конечная группа G, представимая в виде произведения двух своих разрешимых подгрупп нечетных индексов, разрешима.*

Лемма 2 ([5], теорема 1). *Пусть G — простая неабелева группа, $H < G$ и $|G : H| = p^a$, где p — простое число. Тогда имеет место одно из следующих утверждений*:

(a) $G \simeq A_n,\ H \simeq A_{n-1},$ *где* $n = p^a$;

(b) $G \simeq PSL_r(q),\ H$ — *параболическая подгруппа в* G,

$$|G : H| = \frac{q^r - 1}{q - 1} = p^a \quad \text{и} \quad r \text{ — простое число};$$

(c) $G \simeq PSL_2(11),\ H \simeq A_5$;

(d) $G \simeq M_{23},\ H \simeq M_{22}$ *или* $G \simeq M_{11},\ H \simeq M_{10}$;

(e) $G \simeq PSU_4(2) \simeq PSp_4(3),\quad H$ — *параболическая подгруппа индекса* 27.

В частности, только группа $PSL_2(7)$ имеет подгруппы двух различных примарных индексов.

Следующие две леммы известны для конечных групп с $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами [1] (леммы 3.1, 4.1). Для групп с $\mathbb{P}^t$-субнормальными подгруппами они доказаны в [3] (леммы 6 и 7). Доказательства для групп с $\mathbb{P}^{\infty}$-, $\mathbb{P}_r^t$- и $\mathbb{L}$-субнормальными подгруппами практически дублируют рассуждения из [3], поэтому мы их не приводим.

Лемма 3. *Пусть A и B — $\mathbb{X}$-субнормальные подгруппы конечной группы $G = AB$. Пусть существует цепочка*

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = G$$

такая, что $|A_i : A_{i-1}| \in \mathbb{X}$ для всех i. Тогда пересечение $A_k \cap B$ является $\mathbb{X}$-субнормальной подгруппой в A_k для всех k.

Лемма 4. *Пусть H — подгруппа конечной группы G, N — нормальная подгруппа в G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если $H \ \mathbb{X}sn\ G$, то $(H \cap N)\ \mathbb{X}sn\ N$ и $HN/N\ \mathbb{X}sn\ G/N$*;
2) *если $N \subseteq H$ и $H/N\ \mathbb{X}sn\ G/N$, то $H\ \mathbb{X}sn\ G$*;
3) *если $H \subseteq K \subseteq G$, $H\ \mathbb{X}sn\ K$, $K\ \mathbb{X}sn\ G$, то $H\ \mathbb{X}sn\ G$*;
4) *если $H\ \mathbb{X}sn\ G$, то $H^g\ \mathbb{X}sn\ G$ для любого $g \in G$.*

Лемма 5. *Если $X \le Y \le G$ и N — субнормальная подгруппа в конечной группе G, то $|Y \cap N : X \cap N|$ делит $|Y : X|$.*

Доказательство. По условию существует цепочка подгрупп

$$G = N_0 \ge N_1 \ge \ldots \ge N_m = N,$$

в которой подгруппа N_{i+1} нормальна в N_i для всех i. Поскольку N_1 — нормальная подгруппа группы G, то $XN \subseteq YN \subseteq G$ и

$$X/X \cap N_1 \simeq XN_1/N_1 \subseteq YN_1/N_1 \simeq Y/Y \cap N_1.$$

По теореме Лагранжа существует натуральное число k такое, что

$$k \cdot \frac{|X|}{|X \cap N_1|} = \frac{|Y|}{|Y \cap N_1|}, \quad k|Y \cap N_1 : X \cap N_1| = |Y : X|.$$

Таким образом, если $N = N_1$ нормальна в G, лемма справедлива. Теперь можно применить индукцию к подгруппам $X \cap N_1 \subseteq Y \cap N_1$ и субнормальной в $Y \cap N_1$ подгруппе $Y \cap N$. По индукции $|Y \cap N : X \cap N|$ делит $|Y \cap N_1 : X \cap N_1|$, поэтому $|Y \cap N : X \cap N|$ делит $|Y : X|$.

Лемма доказана.

2. Доказательство основных результатов. ***Доказательство теоремы* 1.** Пусть A и B — $\mathbb{L}$-субнормальные разрешимые подгруппы группы G и $G = AB$. Докажем, что группа G разрешима. Предположим, что утверждение неверно и группа G — контрпример минимального порядка. Докажем, что в условиях теоремы подгруппы A и B можно считать максимальными подгруппами группы G.

По условию существуют цепочки

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_{n-1} \subset A_n = G, \qquad |A_i : A_{i-1}| \in \mathbb{L}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$B = B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_{m-1} \subset B_m = G, \qquad |B_j : B_{j-1}| \in \mathbb{L}, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Подгруппа A $\mathbb{L}$-субнормальна в A_{n-1}. Поскольку $|A_{n-1}| < |G|$, то по индукции A_{n-1} разрешима и $|G : A_{n-1}| \in \mathbb{L}$. Аналогично, по индукции B_{m-1} разрешима и $|G : B_{m-1}| \in \mathbb{L}$. По тождеству Дедекинда $A_{n-1} = A(A_{n-1} \cap B)$, $B_{m-1} = B(B_{m-1} \cap A)$. Ясно, что $G = A_{n-1}B_{m-1}$ и $|G : A_{n-1}| \in \mathbb{L}$, $|G : B_{m-1}| \in \mathbb{L}$. Поэтому без ущерба для доказательства можно считать подгруппы A и B максимальными в группе G. Из определения $\mathbb{L}$-субнормальности следует, что каждый из индексов подгрупп A и B равен либо 2, либо 4, либо является нечетным числом.

Если индексы подгрупп A и B — нечетные числа, то по лемме 1 группа G разрешима. Если индекс хотя бы одной из подгрупп A или B равен 2 или 4, то G также разрешима.

Теорема 1 доказана.

***Доказательство теоремы* 2.** Пусть A и B — некоторые r-разрешимые $\mathbb{P}^{\infty}$ -субнормальные подгруппы конечной группы $G = AB$, $r \in \pi(G) \setminus \{2, 3, 7\}$. Предположим, что теорема

2 неверна и G — контрпример наименьшего порядка. Как и при доказательстве теоремы 1, можно показать, что подгруппы A и B следует считать максимальными в G. Из определения $\mathbb{P}^{\infty}$-субнормальности вытекает, что $|G : A| = p^l$, $|G : B| = q^s$, где $\{p, q\} \subseteq \pi(G)$.

Пусть сначала $p \neq q$. Если G — простая неабелева группа, то по лемме 2 она изоморфна $PSL_2(7)$. Следовательно, G — r'-группа. Это противоречит тому, что G — минимальный контрпример. Поэтому в группе G имеется собственная минимальная нормальная подгруппа N. В силу леммы 4 условия теоремы наследуются фактор-группами группы G, поэтому $N = N_1 \times \ldots \times N_k$, где N_i — изоморфные простые неабелевы группы и N не является r-разрешимой группой. Поскольку N не r-разрешима, то $N \nsubseteq A$ и $N \nsubseteq B$. Так как A и B максимальны в G, то $G = AN = BN$. Из равенств $|G : A| = p^l$, $|G : B| = q^s$ следует, что $G = AP = BQ$ для $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$. В силу приведенных факторизаций имеем

$$\frac{|A||N|}{|A \cap N|} = \frac{|A||P|}{|A \cap P|} \quad \text{или} \quad \frac{|N|}{|A \cap N|} = \frac{|P|}{|A \cap P|} = p^l.$$

Следовательно, N имеет подгруппу индекса p^l. Точно так же N имеет подгруппу индекса q^s. Отсюда легко заключить, что N_1 имеет подгруппы примарных индексов p^{α} и q^{β}, где $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$. Из леммы 2 следует, что $N_1 \simeq PSL_2(7)$. Поэтому N — r'-группа, что невозможно. Следовательно, $p = q$. Пусть сначала G — простая неабелева группа. Поскольку $|G| = \dfrac{|A||B|}{|A \cap B|}$, то

$$\frac{|B|}{|A \cap B|} = |G : A| = p^l \qquad \text{и} \qquad |B| = p^l |A \cap B|.$$

Точно так же $|A| = p^s |A \cap B|$. Отсюда следует, что $|G : A \cap B| = p^{l+s}$. Таким образом, G содержит подгруппы индексов p^l и p^{l+s}. Последнее невозможно в силу леммы 2.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа в G. Тогда N не является r-разрешимой и $N = N_1 \times \ldots \times N_k$, где N_i — изоморфные простые неабелевы группы. Рассмотрим ряд $A \cap B < A < G$, где $|G : A| = p^l$ и $|A : A \cap B| = p^s$. Тогда $N \cap A \cap B \subseteq N \cap A < N \cap G = N$. По лемме 5 $|N : N \cap A| = p^m$, где $m \geq 1$, и $|N \cap A : N \cap A \cap B| = p^k$, где $k \geq 0$. Если $k > 0$, то $|N : N \cap A \cap B| = p^{m+k} > p^m$ и N содержит две подгруппы различных примарных индексов p^m и p^{m+k}. Поскольку $N = N_1 \times \ldots \times N_k$, то N_1 также имеет две собственные подгруппы различных примарных индексов p^{k_1} и p^{k_2} соответственно. Из леммы 2 следует, что это невозможно. Поэтому $N \cap A \cap B = N \cap A$. Так же можно показать, что $N \cap A \cap B = N \cap B$, а значит, $N \cap A = N \cap B$. Так как $N \cap A$ нормальна в A и $N \cap B$ нормальна в B, то $N \cap A$ нормальна в G. Группа $N \cap A$ r-разрешима, поэтому $N \cap A = 1$ и $G = [N]A$. Из условия $|G : A| = p^l$ следует, что N — p-группа. Это противоречит тому, что N не является r-разрешимой.

Теорема 2 доказана.

***Доказательство теоремы* 3.** Пусть A и B — некоторые r-разрешимые $\mathbb{P}_2^2$ -субнормальные подгруппы конечной группы $G = AB$, $r \in \pi(G)$. Предположим, что теорема 3 неверна и G — контрпример наименьшего порядка. Как и при доказательстве теоремы 1, можно получить, что подгруппы A и B максимальны в G. Из определения $\mathbb{P}_2^2$-субнормальности следует, что $|G : A| = p^l$, $|G : B| = q^s$, где $\{p, q\} \subseteq \pi(G)$.

Пусть сначала $p \neq q$. Если G — простая неабелева группа, то по лемме 2 $G \simeq PSL_2(7)$. Так как группа $PSL_2(7)$ не имеет двух $\mathbb{P}_2^2$-субнормальных r-разрешимых подгрупп индексов p^l и q^s, приходим к противоречию.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа в G. Тогда N не является r-разрешимой и $N = N_1 \times \ldots \times N_k$, где N_i — изоморфные простые неабелевы группы. Поскольку N не r-разрешима, то $N \nsubseteq A$ и $N \nsubseteq B$. Из условия максимальности A и B в G следует, что $G = AN = BN$. Так как $|G : A| = p^l$, $|G : B| = q^s$, то $G = AP = BQ$ для $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$. Поэтому

$$\frac{|A||N|}{|A\cap N|} = \frac{|A||P|}{|A\cap P|} \quad \text{или} \quad \frac{|N|}{|A\cap N|} = \frac{|P|}{|A\cap P|} = p^l \quad \text{и} \quad |N : A\cap N| = p^l.$$

Точно так же $|N : B\cap N| = q^s$. Отметим, что по лемме 4 $(A\cap N)$ $\mathbb{P}_2^2 sn$ N и $(B\cap N)$ $\mathbb{P}_2^2 sn$ N. Поскольку $N = N_1 \times \ldots \times N_k$, то $|N_1 : A\cap N_1| = p^\alpha$ и $|N_1 : B\cap N_1| = q^\beta$ для $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$. Из леммы 2 следует, что $N_1 \simeq PSL_2(7)$. По лемме 4 $(A\cap N_1)$ $\mathbb{P}_2^2 sn$ N_1 и $(B\cap N_1)$ $\mathbb{P}_2^2 sn$ N_1. Так как N_1 не является r-разрешимой группой, то $r \in \pi(N_1)$. Однако группа $PSL_2(7)$ не имеет двух $\mathbb{P}_2^2$-субнормальных r-разрешимых подгрупп индексов p^α и q^β. Пришли к противоречию.

Следовательно, $p = q$. Дословно повторяя соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 2, получаем противоречие с тем, что N не является r-разрешимой.

Теорема 3 доказана.

Следствие. *Если A и B — $\mathbb{P}_2^2$- либо $\mathbb{L}$-субнормальные разрешимые подгруппы конечной группы G и $G = AB$, то G разрешима.*

В статье [3] (п. 1 теоремы 1) без использования классификации конечных простых групп установлена разрешимость группы, факторизуемой двумя своими разрешимыми $\mathbb{P}^2$-субнормальными подгруппами. Поскольку классы $\mathbb{P}_2^2$- и $\mathbb{L}$-субнормальных подгрупп строго включает класс $\mathbb{P}^2$-субнормальных подгрупп, данное следствие усиливает полученный в работе [3] результат.

1. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. – 2012. – **53**, №. 1. – С. 59 – 67.
2. *Monakhov V. S., Kniahina V. N.* Finite group with $\mathbb{P}$-subnorml subgroups // Ric. mat. – 2013. – **62**, №. 2. – P. 307 – 323.
3. *Княгина В. Н., Монахов В. С.* Конечные факторизуемые группы с разрешимыми $\mathbb{P}^2$ -субнормальными подгруппами // Сиб. мат. журн. – 2013. – **54**, № 1. – С. 77 – 85.
4. *Казарин Л. С.* Факторизации конечных групп разрешимыми подгруппами // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 7-8. – С. 947 – 950.
5. *Guralnick R. M.* Subgroups of prime power index in a simple group // J. Algebra. – 1983. – **81**. – P. 304 – 311.
6. *Gorenstein D.* Finite groups. – New York: Harper and Row, 1968.

Получено 17.12.13