УДК 517.983

В. А. Мозель (Отд-е гидроакустики Морского гидрофиз. ин-та НАН Украины, Одесса)

БАНАХОВА АЛГЕБРА, ПОРОЖДЕННАЯ КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПОЛИКЕРНОПЕРАТОРОВ БЕРГМАНА, НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И КОНЕЧНОЙ ГРУППОЙ СДВИГОВ

We study the Banach algebra generated by a finite number of the Bergman polykernel operators with continuous coefficients, which is extended by weighted shift operators forming a finite group. With the use of an isometric transformation, we represent every operator from this algebra as a matrix operator formed by a finite number of mutually complemented projectors with coefficients that are Toeplitz matrix-functions of a finite order. On the basis of properties of the Bergman polykernel operators, we obtain an effective criterion for the operators from considered algebra to be Fredholm operators.

Вивчається банахова алгебра, породжена скінченним числом полікернооператорів Бергмана з неперервними коефіцієнтами, яка розширена операторами зваженого зсуву, що утворюють скінченну групу. За допомогою ізометричного перетворення оператори алгебри зображуються у вигляді матричного оператора, утвореного скінченним числом взаємно доповняльних проекторів із коефіцієнтами, котрі є теплицевими матрицями-функціями скінченного порядку. Завдяки властивостям полікерноператорів Бергмана нам одержано ефективний критерій фредгольмовості операторів розглянутої алгебри.

Введение. Пусть D — единичный круг комплексной плоскости. В пространстве $L_p(D)$, $p > 1$, введем поликерноператоры Бергмана [1],

$$(K_m\varphi)(z) = \iint\limits_D K_m(z, \bar{\zeta})\,\varphi(\zeta)\,dD_\zeta, \quad m = 1, 2, \ldots, n,$$

где $K_m(z, \bar{\zeta})$ — поликернфункция. В предлагаемой работе изучается банахова алгебра $\mathfrak{B} = \mathrm{alg}(\mathfrak{A}, W_G)$, которая является расширением алгебры $\mathfrak{A}$ операторов вида

$$A = a_0(z)I + a_1(z)K_1 + \ldots + a_n(z)K_n + L \in \mathfrak{A}, \tag{1}$$

где $a_0(z), \ldots, a_n(z) \in C(\bar{D})$, L — компактный оператор, с помощью изометрических операторов взвешенного сдвига

$$(W\varphi)(z) = (W_g\varphi)(z) = \left|g'(z)\right|^{2/p}\varphi\big(g(z)\big).$$

Здесь $g \in G$ есть образующий элемент конечной циклической группы дробно-линейных преобразований единичного круга в себя, т. е. эллиптическое дробно-линейное преобразование конечного порядка.

Операторы алгебры $\mathfrak{B}$ имеют вид

$$B = A_1W + A_2W^2 + \ldots + A_kW^k + \tilde{L}, \quad W^{k+1} = I,$$

где $A_j \in \mathfrak{A}$ вида (1), $\tilde{L}$ — компактный оператор.

Поликерноператоры были введены в [1]. Фредгольмовость и индекс одного класса таких операторов описаны в [2]. Случай карлемановского сдвига второго порядка рассмотрен в [3]. В работе [4] (§ 32) при $p = 2$ описана C^*-алгебра операторов, содержащая алгебру $\mathfrak{A}$. В последнее время появились работы, описывающие C^*-алгебры, порожденные конечным числом поликерн- и антиполикерноператоров Бергмана и широким классом кусочно-непрерывных коэффициентов (только при $p = 2$) [5, 6]. В работе [7] описана C^* -алгебра (снова $p = 2$), порожденная оператором Бергмана, непрерывными коэффициентами и сдвигом Карлемана второго порядка. Однако перенести эти результаты на случай $p \neq 2$ пока что не удается. В этом направлении отметим работу [8], в которой для всех $p > 1$ получен критерий фредгольмовости двумерных сингулярных операторов типа Михлина, Кальдерона – Зигмунда с непрерывными коэффициентами и карлемановским сдвигом конечного порядка, но не описана алгебра, порожденная такими операторами. В частности, в ней не содержится результат о поликерноператорах Бергмана. В настоящей работе построна алгебра символов и указан эффективный критерий фредгольмовости операторов описываемой алгебры.

1. Алгебра поликерноператоров Бергмана без сдвига. 1.1. Вспомогательные сведения. Введем двумерные сингулярные интегральные операторы Михлина, Кальдерона – Зигмунда

$$(Sf)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(\zeta)\,dD\zeta}{(\zeta - z)^2}, \qquad (\overline{S}f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(\zeta)\,dD\zeta}{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2}.$$

В [1] показано, что поликерноператоры выражаются через них следующим образом: $K_m = I - S^m\overline{S}^m$, $m = 1, 2, \ldots, n$.

Легко доказывается следующая лемма.

Лемма 1. *Имеют место соотношения*

$$K_m^2 = K_m, \quad m = 1, 2, \ldots, n,$$

$$K_m K_l = K_l K_m = K_{\min(l,m)}, \quad l, m = 1, 2, \ldots, n.$$

Из леммы 1 вытекает следующая лемма.

Лемма 2. *Для любой непрерывной комплекснозначной функции* $a \in C(\overline{D})$ *оператор* $K_j aI - aK_j$, $j = 1, \ldots, n$, *компактен.*

Это очевидно, если учесть представление $K_j = I - S^j\overline{S}^j$ и компактность операторов $SaI - aS$, $\overline{S}aI - a\overline{S}$.

1.2. Алгебра символов. Оператор (1) представим в несколько ином виде. Имеем

$$A = a_0 I + a_1 K_1 + \ldots + a_n K_n + L = a_0(I - K_n) +$$

$$+ (a_0 + a_n)(K_n - K_{n-1}) + (a_0 + a_n + a_{n-1})(K_{n-1} - K_{n-2}) + \ldots$$

$$\ldots + (a_0 + a_n + \ldots + a_2)(K_2 - K_1) + (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)K_1 + L.$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
P_0 &= I - K_n, & c_0(t) &= a_0(t),\\
P_1 &= K_1, & c_1(t) &= a_0(t) + a_1(t) + \ldots + a_n(t),\\
P_2 &= K_2 - K_1, & c_2(t) &= a_0(t) + a_2(t) + \ldots + a_n(t),\\
&\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots\\
P_{n-1} &= K_{n-1} - K_{n-2}, & c_{n-1}(t) &= a_0(t) + \ldots + a_{n-1}(t) + a_n(t),\\
P_n &= K_n - K_{n-1}, & c_n(t) &= a_0(t) + a_n(t),
\end{aligned} \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что

$$P_0 + P_1 + \ldots + P_n = I$$

Лемма 3. *Имеют место равенства*

$$P_k^2 = P_k; \quad P_k P_l = P_l P_k = 0, \quad k \neq l, \quad k, l = 0, 1, \ldots, n,$$

Теперь оператор A записывается в виде

$$A = c_0 P_0 + c_1 P_1 + \ldots + c_n P_n + L.$$

Описывать алгебру $\hat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ ($\mathfrak{I}$ идеал компактных операторов) будем с помощью локального принципа Аллана – Дугласа [9 – 11]. Центральной коммутативной подалгеброй алгебры $\hat{\mathfrak{A}}$ является алгебра, изоморфная алгебре $C(\bar{D})$. Максимальный идеал x, соответствующий точке $x \in \bar{D}$, состоит из операторов умножения на непрерывные в $\bar{D}$ функции, равные нулю в точке x: $\{a(z)I : a(x) = 0,\ a \in C(\bar{D})\}$. Двусторонним замкнутым идеалом алгебры $\hat{\mathfrak{A}}$, содержащим идеал x, будет идеал J_x:

$$J_x = \{c_0(z) P_0 + c_1(z) P_1 + \ldots + c_n(z) P_n + L : c_0(x) = 0, \ldots, c_n(x) = 0,\ L \in \mathfrak{I}\}.$$

Локальные алгебры $\hat{\mathfrak{A}}_x = \hat{\mathfrak{A}}/J_x$ есть следующие алгебры:

$$\hat{\mathfrak{A}}_x = \{c_0(x) P_0 + c_1(x) P_1 + \ldots + c_n(x) P_n + L : x = \text{const},\ L \in \mathfrak{I}\}.$$

Пусть $\Phi_x : \hat{\mathfrak{A}} \to \hat{\mathfrak{A}}_x$ — канонический гомоморфизм. Локальное описание состоит из двух случаев.

Случай 1: x — внутренняя точка круга D.

Из свойств поликернфункции [1, с. 217] следует, что во внутренних точках круга каждый оператор K_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, локально эквивалентен компактному оператору. Тогда $\Phi_x(\hat{A}) = c_0(x) I + L,\ L \in \mathfrak{I}$. Символом класса смежности $\hat{A}$ поэтому при сквозном гомоморфизме $\pi' : \hat{\mathfrak{A}} \to \hat{\mathfrak{A}}_x \to \pi'_x(\hat{\mathfrak{A}})$ будет число $c_0(x)$: $\pi'_x(\hat{A}) = c_0(x)$.

Случай 2: x лежит на границе единичного круга.

Имеем $\Phi_x(\hat{A}) = c_0(x) P_0 + c_1(x) P + \ldots + c_n(x) P_n + L,\ L \in \mathfrak{I}$. Пространство $L_p(D)$ распадается в прямую сумму $n+1$ подпространства:

$$L_p(D) = \operatorname{Im} P_0 \oplus \operatorname{Im} P_1 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Im} P_n.$$

В соответствии с этим оператор $c_0(x) P_0 + c_1(x) P_1 + \ldots + c_n(x) P_n + L = A(x)$ принимает вид матрицы размера $(n+1) \times (n+1)$:

$$c_0(x) P_0 + c_1(x) P_1 + \ldots + c_n(x) P_n + L =$$

$$= \begin{pmatrix} P_0 A(x) P_0 & P_0 A(x) P_1 & \cdots & P_0 A(x) P_n \\ P_1 A(x) P_0 & P_1 A(x) P_1 & \cdots & P_1 A(x) P_n \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ P_n A(x) P_0 & P_n A(x) P_1 & \cdots & P_n A(x) P_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_0(x)P_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_1(x)P_1 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n(x)P_n \end{pmatrix} + \tilde{L} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_0(x)I_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_1(x)I_1 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n(x)I_n \end{pmatrix} + \tilde{L}, \qquad (3)$$

где $\tilde{L}$ — компактная операторная матрица, а операторы I_j — единичные операторы в пространствах $L_p(\operatorname{Im} P_j)$.

Итак, символом класса смежности $\hat{A}$ при сквозном гомоморфизме π' : $\hat{\mathfrak{A}} \to \hat{\mathfrak{A}}_x \to \pi'_x(\hat{\mathfrak{A}})$ будет набор $n+1$ числа: $\pi'_x(\hat{A}) = (c_0(x),\, c_1(x), \ldots,\, c_n(x))$.

Поскольку совокупность операторов

$$A_x = \begin{cases} c_0(x)I, & x \in D, \\ c_0(x)P_0 + c_1(x)P_1 + \ldots + c_n(x)P_n & x \in \partial D, \end{cases}$$

является огибающей [12] оператора A, то отображение $\pi' : \hat{\mathfrak{A}} \to \pi'(\hat{\mathfrak{A}})$, действующее по правилу

$$\pi'(\hat{A}) = \left\{\pi'_x(\hat{A}) : x \in \bar{D}\right\},$$

где

$$\pi'_x(\hat{A}) = \begin{cases} c_0(x), & x \in D, \\ (c_0(x),\, c_1(x), \ldots,\, c_n(x)), & x \in \partial D, \end{cases} \qquad (4)$$

с нормой

$$\left\|\pi'(\hat{A})\right\| = \max\left(\sup_{x\in\bar{D}} |c_0(x)|,\ \sup_{x\in\partial D} |c_1(x)|, \ldots,\ \sup_{x\in\partial D} |c_n(x)|\right) \qquad (5)$$

является изометрическим изоморфизмом. В самом деле, согласно є12],

$$\sup_{x\in\bar{D}} \left\|\Phi_x(\hat{A})\right\| = \||A\||,$$

но

$$\left\|\Phi_x(\hat{A})\right\| = \begin{cases} |c_0(x)|, & x \in D, \\ \max(|c_0(x)|, |c_1(x)|, \ldots, |c_n(x)|), & x \in \partial D. \end{cases}$$

В точках внутри D это очевидно, на границе следует из представления (3).

Из локального принципа вытекает, что если совокупность классов смежности $\left\{\Phi_x(\hat{A}) : x \in \bar{D}\right\}$ обратима (т. е. в каждой точке $x \in \bar{D}$ обратим класс смежности $\Phi_x(\hat{A})$), то обратим класс смежности $\hat{A}$ и обратный элемент принадлежит той же алгебре, т. е. установлены достаточные условия нетеровости оператора A. Необходимость обратимости классов смежности $\Phi_x(\hat{A})$ в каждой точке $x \in \bar{D}$ для нетеровости оператора A следует из того, что если оператор A фредгольмов, то он локально фредгольмов [10] в каждой точке $x \in \bar{D}$, что и означает обратимость классов смежности $\Phi_x(\hat{A})$ в каждой точке $x \in \bar{D}$. Если эти условия выполнены, т. е. если обратим каждый класс смежности $\Phi_x(\hat{A})$ в каждой точке $x \in \bar{D}$, то во внутренних точках x круга это эквивалентно тому, что $c_0(x) \neq 0$, а в точках $x \in \partial D$ из представления (3) следует, что $c_0(x) \neq 0$, $c_1(x) \neq 0, \ldots, c_n(x) \neq 0$.

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Отображение* (4) *с нормой* (5) *является изометрическим изоморфизмом банаховых алгебр. Оператор* A *алгебры* $\mathfrak{A}$ *вида* (1) *фредгольмов в пространстве* $L_p(D)$, $1 < p < \infty$, *тогда и только тогда, когда в каждой точке* $x \in D$ *выполнено*

$$c_0(x) \neq 0, \quad x \in D,$$

а в каждой точке $x \in \partial D$

$$c_0(x) \neq 0, \quad c_1(x) \neq 0, \ldots, c_n(x) \neq 0, \quad x \in \partial D.$$

2. Алгебра поликерноператоров Бергмана со сдвигами. Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. $W_g K_j W_g^{-1} = K_j + L$, $L \in \mathfrak{I}$.

Оператор A алгебры $\mathfrak{B}$ можно записать в виде

$$B = \left(a_{00} I + a_{01} W + \ldots + a_{0k} W^k\right) I + \left(a_{10} I + a_{11} W + \ldots + a_{1k} W^k\right) K_1 + \ldots$$
$$\ldots + \left(a_{n0} I + a_{n1} W + \ldots + a_{nk} W^k\right) K_n + L. \tag{6}$$

Обозначим (см. (2))

$$\begin{aligned}
c_{0j}(t) &= a_{0j}(t),\\
c_{1j}(t) &= a_{0j}(t) + a_{1j}(t) + \ldots + a_{nj}(t),\\
c_{2j}(t) &= a_{0j}(t) + a_{2j}(t) + \ldots + a_{nj}(t),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c_{n-1,j}(t) &= a_{0j}(t) + a_{n-1,j}(t) + a_{nj}(t),\\
c_{nj}(t) &= a_{0j}(t) + a_{nj}(t),\\
j &= 0, 1, \ldots, k.
\end{aligned}$$

Тогда оператор B вида (6) принимает вид

$$B = \left(c_{00}(z) I + c_{01}(z) W + \ldots + c_{0k}(z) W^k\right) P_0 +$$
$$+ \left(c_{10}(z) I + c_{11}(z) W + \ldots + c_{1k}(z) W^k\right) P_1 + \ldots$$
$$\ldots + \left(c_{n0}(z) I + c_{n1}(z) W + \ldots + c_{nk}(z) W^k\right) P_n + L. \tag{7}$$

Введем теперь изометрическое преобразование $\mathfrak{B} \to R \mathfrak{B} R^{-1}$, где

$$R = \operatorname{diag}(Q, QW, \ldots, QW^k), \qquad R^{-1} = \operatorname{diag}(Q, WQ, \ldots, W^kQ),$$

Q — оператор умножения на характеристическую функцию фундаментальной области D_0 группы G, которая строится следующим образом.

Пусть l — линия (отрезок прямой), соединяющая неподвижную точку ζ_0 сдвига g, описанного выше (g — образующий элемент конечной циклической группы, т. е. эллиптическое дробно-линейное преобразование конечного порядка $k+1$), с точкой на единичной окружности. Область, ограниченная линиями l, $g(l)$, где $g(l)$ — образ линии l под действием одной итерации сдвига, и является фундаментальной областью группы G.

Имеют место следующие свойства:

$$RaIR^{-1} = \operatorname{diag}\Big\{a(z),\ a\big(g(z)\big),\ a(g^2(z)), \ldots,\ a(g^k(z))\Big\},$$

$$RW^lR^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где единицы стоят на диагоналях с номерами l, $k-l+1$.

Оператор вида (7) преобразуется к матричному оператору с матричными коэффициентами

$$RBR^{-1} = C_0(z)\,RP_0R^{-1} + C_1(z)\,RP_1R^{-1} + \ldots$$

$$\ldots + C_n(z)\,RP_nR^{-1} + RLR^{-1}.$$

Здесь

$$C_i(z) = \begin{pmatrix} c_{i0}(z) & c_{i1}(z) & \cdots & c_{ik}(z) \\ c_{ik}\big(g(z)\big) & c_{i0}\big(g(z)\big) & \cdots & c_{i,k-1}\big(g(z)\big) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1}\big(g^k(z)\big) & c_{i2}\big(g^k(z)\big) & \cdots & c_{i0}\big(g^k(z)\big) \end{pmatrix}.$$

Применим к $R\mathfrak{B}R^{-1}$ алгебре локальный метод Аллана – Дугласа [9 – 11]. Центральной коммутативной подалгеброй алгебры $R\mathfrak{B}R^{-1}$ является алгебра диагональных матриц-функций, т. е. алгебра матриц-функций вида

$$\mathfrak{A} \ni A = \begin{pmatrix} a(z) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a\big(g(z)\big) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a\big(g^k(z)\big) \end{pmatrix}.$$

Максимальным идеалом t этой алгебры является совокупность диагональных матриц-функций, для которых $a(t) = 0,\ a(g(t)) = 0, \ldots,\ a\left(g^k(t)\right) = 0$. Двусторонним замкнутым идеалом этой алгебры, порожденным максимальным идеалом t, является совокупность матриц, все элементы которых обращаются в нуль на G-орбите точки t (т. е. в точках $t,\ g(t), \ldots,\ g^k(t)$). Наконец, локальные алгебры состоят из матриц-функций, все элементы которых постоянны на G-орбите точки t (в каждой точке орбиты они принимают свое значение):

$$\begin{pmatrix} a_{i0}(t) & a_{i1}(t) & \cdots & a_{ik}(t) \\ a_{ik}(g(t)) & a_{i0}(g(t)) & \cdots & a_{i,k-1}(g(t)) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}\left(g^k(t)\right) & a_{i2}\left(g^k(t)\right) & \cdots & a_{i0}\left(g^k(t)\right) \end{pmatrix},$$

$$t = \text{const}.$$

Отметим, что свойства матричных операторов RP_jR^{-1} аналогичны свойствам операторов P_j, данным в лемме 3, т. е., имеет место следующая лемма.

Лемма 5. *Справедливы соотношения*

$$(RP_jR^{-1})^2 = RP_jR^{-1},$$

$$RP_jR^{-1}\, RP_kR^{-1} = 0, \quad j \neq k.$$

Образ оператора RBR^{-1} распадается в прямую сумму

$$\operatorname{Im}(RBR^{-1}) = \bigoplus_{j=0}^{n} \operatorname{Im}(RP_jR^{-1}).$$

Согласно этому разложению, оператор RBR^{-1} представляется в виде

$$RBR^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} RP_0R^{-1}RBR^{-1}RP_0R^{-1} & RP_0R^{-1}RBR^{-1}RP_1R^{-1} & \cdots & RP_0R^{-1}RBR^{-1}RP_nR^{-1} \\ RP_1R^{-1}RBR^{-1}RP_0R^{-1} & RP_1R^{-1}RBR^{-1}RP_1R^{-1} & \cdots & RP_1R^{-1}RBR^{-1}RP_nR^{-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ RP_nR^{-1}RBR^{-1}RP_0R^{-1} & RP_nR^{-1}RBR^{-1}RP_1R^{-1} & \cdots & RP_nR^{-1}RBR^{-1}RP_nR^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_0(t)RP_0R^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_1(t)RP_1R^{-1} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & C_n(t)RP_nR^{-1} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Локальное описание состоит из двух случаев.

Случай 1: t — внутренняя точка круга D.

Во внутренних точках круга каждый оператор $K_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$, локально эквивалентен компактному оператору. Поэтому символом класса $R\hat{B}R^{-1}$ смежности при сквозном гомоморфизме $\pi' : \hat{\mathfrak{B}} \to \hat{\mathfrak{B}}_t \to \pi'_t(\hat{\mathfrak{B}})$ будет матрица $C_0(t)$.

Случай 2: точка t — лежит на границе единичного круга.

В соответствии с представлением (8) символом класса смежности $R\hat{B}R^{-1}$ будет совокупность $n+1$ матрицы (блочно-диагональная матрица):

$$\pi'_t(R\hat{B}R^{-1}) = \operatorname{diag}\big(C_0(t), \ldots, C_n(t)\big).$$

Поскольку совокупность операторов

$$B_t = \begin{cases} C_0(t)\, I, & t \in D, \\ C_0(t)\, P_0 + C_1(t)\, P_1 + \ldots + C_n(t)\, P_n, & t \in \gamma := \partial D, \end{cases}$$

является огибающей [12] оператора RBR^{-1}, отображение $\pi' : \hat{\mathfrak{B}} \to \pi'(\hat{\mathfrak{B}})$, действующее по правилу

$$\pi'(R\hat{B}R^{-1}) = \left\{\pi'_t(R\hat{B}R^{-1}) : t \in \bar{D}\right\},$$

где

$$\pi'_t(R\hat{B}R^{-1}) = \begin{cases} C_0(t), & t \in D, \\ \operatorname{diag}\big(C_0(t),\, C_1(t), \ldots, C_n(t)\big) & t \in \gamma = \partial D, \end{cases} \tag{9}$$

с нормой

$$\left\|\pi'(R\hat{B}R^{-1})\right\| = \max\big(\|C_0(z)\|, \|C_1(z)\|, \ldots, \|C_n(z)\|\big) =$$

$$= \max\left(\sum_{j=0}^{n} \sup_{z\in\bar{D}} \left|c_{0j}(z)\right|, \sum_{j=0}^{n} \sup_{t\in\gamma}\left|c_{1j}(t)\right|, \ldots, \sum_{j=0}^{n} \sup_{t\in\gamma}\left|c_{nj}(t)\right|\right) \tag{10}$$

является изометрическим изоморфизмом банаховых алгебр. В самом деле, согласно [12],

$$\sup_{t\in\bar{D}} \left\| \Phi_t(R\hat{B}R^{-1}) \right\| = \| B \|,$$

но

$$\left\| \Phi_t(R\hat{B}R^{-1}) \right\| = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \left| c_{0j}(z) \right|, & z \in D, \\ \max\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \left| c_{0j}(z)\right|, \sum_{j=0}^{n} \left| c_{1j}(z)\right|, \ldots, \sum_{j=0}^{n}\left| c_{nj}(z)\right|\right), & z \in \partial D. \end{cases}$$

В точках внутри D это очевидно, на границе следует из представления (8).

Из локального принципа вытекает, что если совокупность классов смежности $\left\{\Phi_t(R\hat{B}R^{-1}) : t \in \bar{D}\right\}$ обратима (т. е. в каждой точке $t \in \bar{D}$ обратим класс смежности $\Phi_t(R\hat{B}R^{-1})$), то обратим класс смежности $R\hat{B}R^{-1}$, а следовательно, $\hat{B}$ и обратный элемент принадлежат той же алгебре, т. е. установлены достаточные условия фредгольмовости оператора B. Необходимость обратимости классов смежности $\Phi_t(R\hat{B}R^{-1})$ в каждой точке $t \in \bar{D}$ для фредгольмовости оператора B следует из того, что если оператор B фредгольмов, то он локально фредгольмов в каждой точке $t \in \bar{D}$, что и означает обратимость классов смежности $\Phi_t(R\hat{B}R^{-1})$ в каждой точке $t \in \bar{D}$. Если эти условия выполнены, т. е. если обратим каждый класс смежности $\Phi_t(R\hat{B}R^{-1})$ в каждой точке $t \in \bar{D}$, то во внутренних точках t круга это эквивалентно тому, что $\det C_0(t) \neq 0$, а в точках $t \in \partial\bar{D}$ из представления (8) следует, что $\det C_0(t) \neq \neq 0$, $\det C_1(t) \neq 0, \ldots, \det C_n(t) \neq 0$.

Отметим, что в точке $t = \zeta_0$ (в неподвижной точке сдвига) символ получается из формулы пункта 1:

$$C_0(t) = C_0(\zeta_0) = \begin{pmatrix} c_{00}(\zeta_0) & c_{01}(\zeta_0) & \ldots & c_{0k}(\zeta_0) \\ c_{0k}(\zeta_0) & c_{00}(\zeta_0) & \cdots & c_{0,k-1}(\zeta_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{01}(\zeta_0) & c_{02}(\zeta_0) & \cdots & c_{00}(\zeta_0) \end{pmatrix}.$$

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Отображение* (9) *с нормой* (10) *является изометрическим изоморфизмом банаховых алгебр. Оператор* B *вида* (7) *фредгольмов в пространстве* $L_p(D)$, $1 < p < \infty$, *тогда и только тогда*, *когда в каждой точке* $t \in D$ *выполнено*

$$\det C_0(t) \neq 0, \quad t \in D,$$

а в каждой точке $t \in \partial\bar{D}$

$$\det C_0(t) \neq 0, \ \det C_1(t) \neq 0, \ldots, \det C_n(t) \neq 0, \quad t \in \partial\bar{D}.$$

1. *Джураев А. Д.* Метод сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1984. – 416 с.
2. *Джангибеков Г.* О нетеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1988. – **300**, № 2. – С. 272 – 276.
3. *Джангибеков Г.* Об алгебре, порожденной поликернооператорами со сдвигом // Докл. АН ТаджССР. – 1991. – **34**, № 7. – С. 399 – 403.
4. *Василевский Н. Л.* Многомерные сингулярные интегральные операторы с разрывными классическими символами: Дисс. … д-ра физ.-мат. наук. – Одесса, 1985. – 297 с.
5. *Loaiza M.* Algebras generated by the Bergman projection and operators of multiplication by piecewise continuous functions // Integral Equat. and Operator Theory. – 2003. – **46**. – P. 215 – 234.
6. *Karlovich Yu. I., Pessoa L.* Algebras generated by Bergman and anti-Bergman projections and by multiplications by piecewise continuous coefficients // Integral Equat. and Operator Theory. – 2005. – **52**. – P. 219 – 270.
7. *Vasilevski N. L., Ramírez Ortega J., Ramírez de Arellano E.* On the Algebra Generated by the Bergman Projection and a Shift Operator. I // Integral Equat. and Operator Theory. – 2001. – **41**. – P. 1 – 18.
8. *Duduchava R., Saginashvili A., Shargorodsky E.* On two-dimensional singular integral operators with conformal Carleman shift // J. Operator Theory. – 1997. – **37**. – P. 263 – 279.
9. *Böttcher A., Silbermann B.* Analysis of Toeplitz operators. – Berlin: Springer, 1990. – 524 p.
10. *Симоненко И. Б.* Новый общий метод исследования линейных опера торных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений. I // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1965. – **29**, № 3. – С. 567 – 586.
11. *Симоненко И. Б.* Новый общий метод исследования линейных опера торных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений. II // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1965. – **29**, № 4. – С. 757 – 782.
12. *Крупник Н. Я.* Точная константа в теореме И. Б. Симоненко об огибающей семейства операторов локального типа // Функцион. анализ и его прил. – 1986. – **20**, вып. 2. – С. 70 – 72.

Получено 22.03.10