УДК 519.21

**К. В. Ральченко, Г. М. Шевченко** (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

# НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДРОБОВИМ БРОУНІВСЬКИМ РУХОМ РОЗВ'ЯЗКАМИ ВИПАДКОВИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ*

We prove the general theorem on the convergence of solutions of stochastic differential equations. As a corollary, we obtain a result on the convergence of solutions of stochastic differential equations with absolutely continuous processes to a solution of an equation with the fractional Brownian motion.

Доказана общая теорема о сходимости решений стохастических дифференциальных уравнений. Как следствие, получен результат о сходимости решений стохастических дифференциальных уравнений с абсолютно непрерывными процессами к решению уравнения броуновским движением.

**Вступ.** Броунівський рух упродовж довгого часу був і залишається популярною моделлю випадковості при дослідженні процесів у природознавстві, на фінансових ринках тощо. Суттєвим обмеженням у застосуванні броунівського руху є те, що він має незалежні прирости, і, таким чином, випадковий шум, породжуваний ним, є „білим", тобто некорельованим. Проте багато процесів у природознавстві, комп'ютерних мережах, на фінансових ринках тощо мають властивість довгострокової залежності, тобто кореляції випадкового шуму у таких процесах спадають у часі повільно. Для моделювання таких процесів використовується дробовий броунівський рух.

Стохастичним диференціальним рівнянням із дробовим броунівським рухом присвячено багато статей, і однією з причин цього є те, що інтеграл відносно дробового броунівського руху можна визначати різними способами. Один зі способів — це потраєкторне визначення. Уперше його було запропоновано у [1], де стохастичний інтеграл визначався як інтеграл Юнга, пізніше у [2] розглядалася побудова стохастичного інтеграла за допомогою так званих „шершавих траєкторій" для довільних $H$. Для потраєкторних стохастичних диференціальних рівнянь із дробовим броунівським рухом існування та єдиність розв'язків було доведено у статтях [3, 4] у випадку довгострокової залежності ($H > 1/2$), [2, 5] у випадку $H > 1/4$ (див. також [6]). Інший спосіб — квадратичне інтегрування за допомогою теорії просторів, породжуваних ядрами. Уперше таку конструкцію інтеграла було розглянуто у [7], пізніше — [8, 9]. Стохастичні диференціальні рівняння із таким інтегралом розглядались у [7]. Для загальної потраєкторної конструкції стохастичного інтеграла, запропонованої у [10], стохастичні диференціальні рівняння вивчались у [11]. Нарешті, рівняння з інтегралом Скорохода розглядалися у [12, 13]. Більш докладний огляд літератури з цієї тематики можна знайти у [14].

У багатьох випадках аналіз рівнянь із дробовим броунівським рухом виявляється досить складним, тому виникає потреба в наближеному розв'язуванні таких рівнянь. Питання апроксимації дробового броунівського руху включає в себе питання моделювання, яке розглядалося багатьма авторами. Для нас, однак, більш цікавим є апроксимації такими процесами, які дозволяють простіший аналіз з точки зору бажаних, насамперед фінансових, застосувань. Одним із найпростіших методів є метод дискретизації часу в стохастичному диференціальному рівнянні, (див. [7, 15, 16]). Апроксимації дробового броунівського руху за допомогою семімартингалів вивчалися у [17].

* Підтримано програмою „Marie Curie Actions", грант № PIRSES-GA-2008-230804.

У даній статті ми продовжуємо дослідження питань, започатковане у [18], а саме, наближення дробового броунівського руху абсолютно неперервними процесами. На жаль, результати, отримані у [18], стосуються лише збіжності самого дробового броунівського руху та стохастичних інтегралів за дробовим броунівським рухом від досить гладеньких процесів, тому ці результати не вдається застосувати для доведення збіжності розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь. У даній статті ми доводимо для апроксимацій більш сильну збіжність, ніж у [18]. Як наслідок, одержуємо результат про збіжність розв'язків відповідних стохастичних диференціальних рівнянь.

Статтю побудовано таким чином. У п. 1 наведено необхідні означення та формулювання. У п. 2 встановлено результат про збіжність апроксимацій дробового броунівського руху абсолютно неперервними процесами. У п. 3 доведено загальну теорему про збіжність розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь і, як наслідок, отримано збіжність для апроксимацій, побудованих у п. 2.

**1. Означення.** ***1.1. Елементи дробового числення.*** У цьому пункті розглядається побудова потраєкторного інтеграла.

Нехай $f \in L^1(a, b)$ та $\alpha > 0$. Ліво- та правосторонній інтеграли Рімана – Ліувілля від функції $f$ порядку $\alpha$ є визначеними майже для всіх $x \in (a, b)$ за допомогою формул (означення 2.1 [19])

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) \ := \ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - y)^{\alpha - 1} f(y)\, dy,$$

$$I_{b-}^{\alpha} f(x) \ := \ \frac{(-1)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (y - x)^{\alpha - 1} f(y)\, dy$$

відповідно, де $(-1)^{-\alpha} = e^{-i\pi\alpha}$, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty r^{\alpha-1} e^{-r}\, dr$ — гамма-функція Ейлера.

Образи простору $L^p(a, b)$ під дією операторів $I_{a+}^{\alpha}$, $I_{b-}^{\alpha}$ позначаються відповідно $I_{\alpha+}^{\alpha}(L^p)$ та $I_{b-}^{\alpha}(L^p)$.

Для $0 < \alpha < 1$ від функції $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, ліво- та правостороння похідні Рімана – Ліувілля визначаються таким чином:

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) \ := \ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x - y)^{-\alpha} f(y)\, dy,$$

$$D_{b-}^{\alpha} f(x) \ := \ \frac{(-1)^{1+\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b (y - x)^{-\alpha} f(y)\, dy.$$

У випадку, коли границі $f(a+)$ і $g(b-)$ існують і скінченні, позначимо

$$f_{a+}(x) \ = \ \big(f(x) - f(a+)\big)^{\bullet}_{(a,b)}(x),$$

$$g_{b-}(x) \ = \ \big(g(x) - g(b-)\big)^{\bullet}_{(a,b)}(x).$$

**Означення 1.** *Припустимо, що для функцій $f$, $g$ існують границі $f(a+)$, $g(a+)$, $g(b-)$, а також $f_{a+} \in I_{a+}^{\alpha}(L^p)$, $g_{b-} \in I_{b-}^{1-\alpha}(L^q)$ для деяких $1/p + 1/q \le 1$, $0 \le \alpha \le 1$. Тоді інтеграл Юнга, або узагальнений інтеграл Стільтьєса від функції $f$ за функцією $g$ задається рівністю*

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) \;:=\; (-1)^\alpha \int_a^b D_{a+}^\alpha f_{a+}(x)\, D_{b-}^{1-\alpha} g_{b-}(x)\,dx \;+$$
$$+\; f(a+)\big(g(b-) - g(a+)\big). \tag{1}$$

Це визначення дозволяє інтегрувати функції, що задовольняють умову Гельдера. Нагадаємо, що $C^\lambda[a, b]$ — простір функцій, які задовольняють умову Гельдера з показником $\lambda$:

$$|f(x) - f(y)| \;\le\; C|x - y|^\lambda, \quad x, y \in [a, b].$$

**Твердження 1** (теорема 4.2.1 [1]). *Нехай* $x \in C^\lambda[a, b]$, $g \in C^\mu[a, b]$ з $\lambda + \mu > 1$. *Тоді умови означення* 1 *виконуються з будь-яким* $\alpha \in (1-\mu, \lambda)$ *та* $p = q = \infty$. *Більш того, визначений за* (1) *узагальнений інтеграл Стільтьєса* $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ *збігається з інтегралом Рімана – Стільтьєса*:

$$\mathrm{R} - \mathrm{S}\int_a^b f(x)\,dg(x) \;:=\; \lim_{|\pi|} \sum_i f(x_i^*)\big(g(x_{i+1}) - g(x_i)\big),$$

*де* $\pi = \{a = x_0 \le x_0^* \le x_1 \le \ldots \le x_{n-1} \le x_{n-1}^* \le x_n = b\}$, *а також* $|\pi| = \max_i |x_{i+1} - x_i|$.

***1.2. Дробовий броунівський рух.*** Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ — повний імовірнісний простір.

**Означення 2.** *Дробовим броунівським рухом* (ДБР) *з параметром Хюрста* $H \in (0, 1)$ *називається центрований гауссівський процес* $B^H = \{B_t^H, t \ge 0\}$ *зі стаціонарними приростами та коваріаційною функцією*

$$\mathsf{E}\big(B_t^H B_s^H\big) \;=\; \frac{1}{2}\Big(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}\Big).$$

Неважко бачити, що прирости дробового броунівського руху задовольняють рівність

$$\mathsf{E}\big(B_t^H B_s^H\big)^2 \;=\; |t - s|^{2H},$$

звідки, завдяки тому, що $B^H$ є гауссівським процесом, випливає, що він має неперервну модифікацію згідно з теоремою Колмогорова. Більш того (див., наприклад, [14], гл. 1.16), його траєкторії майже напевно належать до $C^\beta[0, T]$ для всіх $T > 0$, $\beta \in (0, H)$.

Як відомо [20], ДБР $\{B_t^H, t \ge 0\}$ при $H \in (1/2, 1)$ можна подати у вигляді

$$B_t^H \;=\; \int_0^t s^\alpha\, dY_s := t^\alpha Y_t - \alpha \int_0^t s^{\alpha-1} Y_s\, ds,$$
$$Y_t \;=\; C_H \int_0^t s^{-\alpha}\left(\int_s^t (u - s)^{\alpha-1}\, du\right) dW_s, \tag{2}$$

де $\{W_t, t \ge 0\}$ — вінерівський процес, $\alpha = H - 1/2$, а стала

$$C_H = \left( \frac{2H\Gamma\left(\frac{3}{2} - H\right)}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)\Gamma(2 - 2H)} \right)^{1/2} \left(H - \frac{1}{2}\right).$$

***1.3. Простори Бєсова (дробові простори Соболєва).*** Нехай для $b \in (0, 1)$

$$\varphi_f^\beta(t) := |f(t)| + \int_0^t |f(t) - f(s)|\,(t - s)^{-\beta-1}\,ds,$$

і $W_0^\beta = W_0^\beta[0, T]$ — простір вимірних функцій $f\colon [0, T] \to \mathbb{R}$ з нормою

$$\|f\|_{0,\beta} := \sup_{t\in[0,T]} \varphi_f^\beta(t) < \infty.$$

Також нехай $W_1^\beta = W_1^\beta[0, T]$ — простір функцій $f\colon [0, T] \to \mathbb{R}$ з нормою

$$\|f\|_{1,\beta} := \sup_{0\le s<t\le T} \left( \frac{|f(t) - f(s)|}{(t - s)^\beta} + \int_s^t \frac{|f(u) - f(s)|}{(u - s)^{1+\beta}}\,du \right) < \infty,$$

і $W_2^\beta = W_2^\beta[0, T]$ — простір функцій $f\colon [0, T] \to \mathbb{R}$ з нормою

$$\|f\|_{2,\beta} := \int_0^T \frac{|f(s)|}{s^\beta}\,ds + \int_0^T\int_0^s \frac{|f(s) - f(u)|}{(s - u)^{\beta+1}}\,du\,ds < \infty.$$

Зауважимо, що простори $W_i^\beta$, $i = 0, 2$, є банаховими відносно відповідних норм; $\|\cdot\|_{1,\beta}$ є лише напівнормою.

Для будь-якого $0 < \varepsilon < \beta \wedge (1 - \beta)$

$$C^{\beta+\varepsilon}[0, T] \subset W_i^\beta[0, T] \subset C^{\beta-\varepsilon}[0, T], \quad i = 0, 2, \quad C^{\beta+\varepsilon}[0, T] \subset W_2^\beta[0, T].$$

Отже, траєкторії ДБР $B^H$ для майже всіх $\omega \in \Omega$, будь-якого $T > 0$ і будь-якого $0 < \beta < H$ належать $W_1^\beta[0, T]$.

**2. Апроксимація дробового броунівського руху абсолютно неперервними процесами.** Для побудови апроксимацій дробового броунівського руху скористаємося ідеєю, запропонованою у [18].

Зауважимо, що в (2) ми не можемо поміняти порядок інтегрування та записати

$$Y_t = C_H \int_0^t\int_0^u s^{1/2-H}(u - s)^{H-3/2}\,dW_s\,du,$$

оскільки внутрішній інтеграл є розбіжним. Ідея полягає у тому, щоб „відступити" від $u$ у внутрішньому інтегралі. Отже, апроксимації дробового броунівського руху абсолютно неперервними процесами побудуємо так:

$$Y_t^\varepsilon := C_H \int_0^t \left[ \int_0^{\phi_\varepsilon(u)} (u - s)^{\alpha-1} s^{-\alpha}\,dW_s\,du \right] du, \tag{3}$$

$$B_t^{H,\varepsilon} := \int_0^t s^\alpha\,dY_s^\varepsilon. \tag{4}$$

Тут набір дійсних вимірних неспадних функцій $\phi_\varepsilon : [0,T] \to [0,T]$, $\varepsilon \in (0, 1)$, задовольняє умови:

i) $\phi_\varepsilon(0) = 0,\ 0 < \phi_\varepsilon(t) < t,\ t \in (0, T]$,

ii) $|\phi_\varepsilon(t) - \phi_\varepsilon(s)| \le L|t - s|,\ t, s \in (0, T]$,

iii) $f_\varepsilon := \sup_{t\in[0,T]}(t - \phi_\varepsilon(t)) \to 0,\ \varepsilon \to 0+$,

iv) для будь-якого $\varepsilon \in (0, 1)$ $\sup_{t\in[0,T]} \dfrac{t}{\phi_\varepsilon(t)} \le K < +\infty$.

У роботі [18] доведено, що для довільного $\beta \in (0, 1 - H)$ має місце збіжність

$$\left\| B^H - B^{H,\varepsilon} \right\|_{1,\gamma} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \quad \varepsilon \to 0+. \tag{5}$$

Відомо, що для збіжності інтегралів Юнга від функції з $C^\alpha[0,T]$ достатньо збіжності інтеграторів у $W_1^\gamma$ при $\gamma > 1 - \alpha$ (див., наприклад, [3] або лему 1). Оскільки ми досліджуватимемо збіжність інтегралів від функцій із простору $C^\alpha$, де $\alpha < H$, то нам потрібно посилити результат (5).

**Теорема 1.** *Для довільного* $\gamma \in (0, H)$ *має місце збіжність*

$$\left\| B^{H,\varepsilon} - B^H \right\|_{1,\gamma} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

***Доведення.*** За означенням

$$\left\| B^H - B^{H,\varepsilon} \right\|_{1,\gamma} = \sup_{0\le s<t\le T} \Delta_{s,t},$$

де

$$\Delta_{s,t} = \frac{\left| \Delta B_t^{H,\varepsilon} - \Delta B_s^{H,\varepsilon} \right|}{(t-s)^\gamma} + \int_s^t \frac{\left| \Delta B_u^{H,\varepsilon} - \Delta B_s^{H,\varepsilon} \right|}{(u-s)^{1+\gamma}} du,$$

$$\Delta B_t^{H,\varepsilon} := B_t^H - B_t^{H,\varepsilon} = C_H \left( \int_0^{\phi_\varepsilon(t)} s^{-\alpha} \int_s^{\phi_\varepsilon^{-1}(s)} (u-s)^{\alpha-1} u^\alpha \, du\, dW_s + \right.$$

$$\left. + \int_{\phi_\varepsilon(t)}^t s^{-\alpha} \int_s^t (u-s)^{\alpha-1} u^\alpha \, du\, dW_s \right),$$

$\phi^{-1}$ позначає обернену до $\phi$ функцію.

Доведемо, що при $0 < \delta < 2(H - \gamma)$ має місце оцінка

$$\mathsf{E}\left(\Delta B_t^{H,\varepsilon} - \Delta B_s^{H,\varepsilon}\right)^2 \le C'_H |t - s|^{2H-\delta} f_\varepsilon^\delta, \quad t, s \in [0,T], \tag{6}$$

де $C'_H$ — деяка стала.

Припустимо, що $0 \le s < t \le T$. Можливі два випадки.

*Випадок* 1: $t > s > \phi_\varepsilon(t) > \phi_\varepsilon(s)$.

За властивістю ізометрії

$$\mathsf{E}\left(\Delta B_t^{H,\varepsilon} - \Delta B_s^{H,\varepsilon}\right)^2 = C_H^2 \left( \int_{\phi_\varepsilon(s)}^{\phi_\varepsilon(t)} u^{-2\alpha} \left( \int_s^{\phi_\varepsilon^{-1}(u)} (v-u)^{\alpha-1} v^\alpha \, dv \right)^2 du + \right.$$

$$+ \int_{\phi_\varepsilon(t)}^{s} u^{-2\alpha} \left( \int_s^t (v-u)^{\alpha-1} v^\alpha \, dv \right)^2 du + \int_s^t u^{-2\alpha} \left( \int_s^t (v-u)^{\alpha-1} v^\alpha \, dv \right)^2 du \Bigg) =:$$

$$:= I_1 + I_2 + I_3 .$$

Оцінимо кожен з трьох інтегралів. Для дробового броунівського руху маємо

$$|t-s|^{2H} = \mathsf{E}\left(B_t^H - B_s^H\right)^2 =$$

$$= C_H^2 \left( \int_s^t u^{-2\alpha} \left[ \int_u^t (v-u)^{\alpha-1} v^\alpha \, dv \right]^2 du + \int_0^t u^{-2\alpha} \left[ \int_u^t (v-u)^{\alpha-1} v^\alpha \, dv \right]^2 du \right).$$

Звідси випливає, що

$$I_3 \le |t-s|^{2H},$$

$$I_1 \le C_H^2 \int_0^s u^{-2\alpha} \left[ \int_s^t (v-u)^{\alpha-1} v^\alpha \, dv \right]^2 du \le |t-s|^{2H},$$

$$I_2 \le C_H^2 \int_0^s u^{-2\alpha} \left[ \int_s^t (v-u)^{\alpha-1} v^\alpha \, dv \right]^2 du \le |t-s|^{2H}.$$

Таким чином,

$$\mathsf{E}\left(\Delta B_t^{H,\varepsilon} - \Delta B_s^{H,\varepsilon}\right)^2 \le 3|t-s|^{2H} \le 3|t-s|^{2H-\delta}\left(t-\phi_\varepsilon(t)\right)^\delta \le$$

$$\le 3|t-s|^{2H-\delta} f_\varepsilon^\delta .$$

Отже, у випадку 1 оцінку (6) доведено.

*Випадок* 2: $t > \phi_\varepsilon(t) > s > \phi_\varepsilon(s)$.

У цьому випадку

$$\mathsf{E}\left(\Delta B_t^{H,\varepsilon} - \Delta B_s^{H,\varepsilon}\right)^2 = C_H^2 \left( \int_{\phi_\varepsilon(s)}^{s} u^{-2\alpha} \left( \int_s^{\phi_\varepsilon^{-1}(u)} (v-u)^{\alpha-1} v^\alpha \, dv \right)^2 du \right. +$$

$$+ \int_s^{\phi_\varepsilon(t)} u^{-2\alpha} \left( \int_u^{\phi_\varepsilon^{-1}(u)} (v-u)^{\alpha-1} v^\alpha \, dv \right)^2 du + \int_{\phi_\varepsilon(t)}^{t} u^{-2\alpha} \left( \int_u^t (v-u)^{\alpha-1} v^\alpha \, dv \right)^2 du \Bigg) =:$$

$$:= J_1 + J_2 + J_3 .$$

Оцінимо кожен з трьох інтегралів:

$$J_1 \le C_H^2 \int_{\phi_\varepsilon(s)}^{s} \left( \frac{\phi_\varepsilon^{-1}(u)}{u} \right)^{2\alpha} \left( \int_s^{\phi_\varepsilon^{-1}(u)} (v-u)^{\alpha-1} v^\alpha \, dv \right)^2 du \le$$

$$\le C_H^2 K^{2\alpha} \alpha^{-2} \int_{\phi_\varepsilon(s)}^{s} \left( (\phi_\varepsilon^{-1}(u) - u)^\alpha - (s-u)^\alpha \right)^2 du \le$$

$$\leq C_H^2 K^{2\alpha}\alpha^{-2}\int_{\phi_\varepsilon(s)}^{s}\left(\phi_\varepsilon^{-1}(s)-u\right)^{2\alpha}du \leq \frac{C_H^2K^{2\alpha}}{\alpha^2(2\alpha+1)}\left(s-\phi_\varepsilon(s)\right)^{2\alpha-1} =$$

$$= C_1(H)\left(s-\phi_\varepsilon(s)\right)^{2H} \leq C_1(H)\left(\phi_\varepsilon(t)-\phi_\varepsilon(s)\right)^{2H-\delta}\left(s-\phi_\varepsilon(s)\right)^{\delta} \leq$$

$$\leq C_2(H)\left|t-s\right|^{2H-\delta}\left(s-\phi_\varepsilon(s)\right)^{\delta},$$

$$J_2 \leq C_3\int_s^{\phi_\varepsilon(t)}\left(\phi_\varepsilon^{-1}(u)-u\right)^{2\alpha}du \leq C_3(H)\int_s^{\phi_\varepsilon(t)}(t-u)^{2\alpha-\delta}\left(\phi_\varepsilon^{-1}(u)-u\right)^{\delta}du \leq$$

$$\leq C_3(H)\int_s^{\phi_\varepsilon(t)}(t-u)^{2\alpha-\delta}du\sup_{t\in[0,T]}\left(t-\phi_\varepsilon(t)\right)^{\delta} \leq C_4(H)\left|t-s\right|^{2H-\delta}f_\varepsilon^{\delta},$$

$$J_3 \leq C_H^2\left(\frac{t}{\phi_\varepsilon(t)}\right)^{2\alpha}\alpha^{-2}\int_{\phi_\varepsilon(t)}^{t}(t-u)^{2\alpha}du \leq C_1(H)\left(t-\phi_\varepsilon(t)\right)^{2H} \leq$$

$$\leq C_1(H)\left|t-s\right|^{2H-\delta}\left(t-\phi_\varepsilon(t)\right)^{\delta}.$$

Таким чином, у випадку 2 оцінку (6) також доведено.

Зауважимо, що, оскільки $\Delta B_t^{H,\varepsilon} - \Delta B_s^{H,\varepsilon}$ має нормальний розподіл, з (6) випливає, що для всіх $p>0$, $\delta\in(0,H-\gamma)$, $s,t\in[0,T]$

$$\mathsf{E}\left(\Delta B_t^{H,\varepsilon}-\Delta B_s^{H,\varepsilon}\right)^p \leq C_{H,p}\left|t-s\right|^{(H-\delta)p}f_\varepsilon^{\delta p}, \qquad (7)$$

де $C_{H,p}$ — деяка стала.

Далі нам знадобиться рівномірний по $t, s$ аналог оцінки (6). З нерівності Ґарсіа – Родеміха – Рамсі (див. [21], теорема 1.4) випливає, що для будь-яких $p>0$, $\alpha>1/p$ виконано нерівність

$$\sup_{t,s\in[0,T]}\frac{\left|\Delta B_t^{H,\varepsilon}-\Delta B_s^{H,\varepsilon}\right|}{\left|t-s\right|^{\alpha-1/p}} \leq C'_{\alpha,p}\xi_{\alpha,p}, \qquad (8)$$

де $C'_{\alpha,p}$ — деяка невипадкова стала,

$$\xi_{\alpha,p} = \left(\int_0^T\int_0^T\frac{\left|\Delta B_x^{H,\varepsilon}-\Delta B_y^{H,\varepsilon}\right|^p}{\left|x-y\right|^{\alpha p+1}}dx\,dy\right)^{1/p}.$$

При $p>1/H$, $\delta\in(0,H-1/p)$, $\alpha\in(1/p,H-\delta)$ маємо

$$\mathsf{E}(\xi_{\alpha,p}^p) = \int_0^T\int_0^T\frac{\mathsf{E}\left(\left|\Delta B_x^{H,\varepsilon}-\Delta B_y^{H,\varepsilon}\right|^p\right)}{\left|x-y\right|^{\alpha p+1}}dx\,dy \leq$$

$$\leq C_{H,p}f_\varepsilon^{\delta p}\int_0^T\int_0^T\left|x-y\right|^{(H-\delta-\alpha)p-1}dx\,dy = C_{H,p,\delta}f_\varepsilon^{\delta p}.$$

Тоді, враховуючи (8) і покладаючи для $\theta\in(\gamma,H)$ $p=2/(H-\theta)$, $\alpha=(\theta+H)/2$, $\delta=(H-\theta)/4$, отримуємо

$$\mathsf{E} \sup_{t,s\in[0,T]} \frac{\left|\Delta B_t^{H,\varepsilon} - \Delta B_s^{H,\varepsilon}\right|^p}{|t-s|^{p\theta}} \le C_{H,\theta}^1 f_\varepsilon^{(H-\theta)p/4}$$

з деякою сталою $C_{H,\theta}^1$.

З останньої оцінки випливає, що для довільних $\theta \in (\gamma, H)$, $\kappa \in (0,1)$ існує стала $C_\kappa$ така, що ймовірність події

$$A_\varepsilon := \Big\{\text{для всіх } s, t \in [0,T] \text{ виконано } \left|\Delta B_t^{H,\varepsilon} - \Delta B_s^{H,\varepsilon}\right| \le$$

$$\le C_\kappa |t-s|^\theta f_\varepsilon^{(H-\theta)/4}\Big\}$$

не менша за $1-\kappa$.

На множині $A_\varepsilon$ для всіх $s, t \in [0,T]$

$$\Delta_{s,t} \le C_\kappa f_\varepsilon^{(H-\theta)/4}\left(|t-s|^{\theta-\gamma} + \int_s^t |u-s|^{\theta-\gamma-1}\,du\right) =$$

$$= C_\kappa f_\varepsilon^{(H-\theta)/4}\left(1+(\theta-\gamma)^{-1}\right)|t-s|^{\theta-\gamma},$$

звідки

$$\left\|B^{H,\varepsilon} - B^H\right\|_{1,\gamma} \le C_\kappa f_\varepsilon^{(H-\theta)/4}\left(1+(\theta-\gamma)^{-1}\right)T^{\theta-\gamma}.$$

Тоді для будь-якого $a > 0$

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0+} \mathsf{P}\left(\left\|B^{H,\varepsilon} - B^H\right\|_{1,\gamma} \ge a\right) \le \kappa,$$

оскільки для достатньо малих $C_\kappa f_\varepsilon^{(H-\theta)/4}\left(1+(\theta-\gamma)^{-1}\right)T^{\theta-\gamma} < a$.

Отже, при $\kappa \to 0+$ одержимо

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \mathsf{P}\left(\left\|B^{H,\varepsilon} - B^H\right\|_{1,\gamma} \ge a\right) = 0.$$

Теорему доведено.

**3. Наближення розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь.** Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння з дробовим броунівським рухом $B_t^H$, $H \in (1/2, 1)$:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,dB_s^H, \quad t \in [0,T]. \tag{9}$$

У статті [3] наведено умови існування та єдиності розв'язку такого рівняння. Має місце такий результат.

**Твердження 2.** *Нехай* $\{B_t,\ t \ge 0\}$ *— дробовий броунівський рух з параметром Хюрста* $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, *визначений на повному ймовірнісному просторі* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. *Нехай* $X_0$ *є випадковою величиною, а коефіцієнти* $b(t,x)$, $\sigma(t,x)$ *майже напевно задовольняють наступні умови* $(H_b)$, $(H_\sigma)$ *з деяким невипадковим* $\beta > 1-H$ *та сталими* $L_N$, $M_N$, *які можуть залежати від* $\omega$:

$$(H_b): \begin{cases} \text{i)} & \textit{локальна ліпшицевість}: \\ & \textit{для кожного } N > 0 \textit{ існує } L_N > 0 \textit{ таке, що} \\ & |b(t, x) - b(t, y)| \le L_N |x - y| \quad \forall |x|, |y| \le N \quad \forall t \in [0, T], \\ \text{ii)} & \textit{лінійне зростання}: \\ & |b(t, x)| \le L_0(1 + |x|) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t \in [0, T]; \end{cases}$$

$$(H_\sigma): \begin{cases} \text{i)} & \textit{ліпшицевість}: \\ & |b(t, x) - b(t, y)| \le M|x - y|, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall t \in [0, T], \\ \text{ii)} & \textit{локальна гельдеровість}: \\ \text{ii)} & \textit{для кожного } N > 0 \textit{ існує } M_N > 0 \textit{ таке, що} \\ & \left| \frac{\partial}{\partial x}\sigma(t, x) - \frac{\partial}{\partial x}\sigma(t, y) \right| \le M_N |x - y| \quad \forall |x|, |y| \le N \quad \forall t \in [0, T], \\ \text{iii)} & \textit{гельдеровість за часом}: \\ & |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| + \left| \frac{\partial}{\partial x}\sigma(t, x) - \frac{\partial}{\partial x}\sigma(t, y) \right| \le M|t - s|^\beta \\ & \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t \in [0, T]. \end{cases}$$

*Позначимо*

$$\alpha_0 \ := \ \min\left\{\frac{1}{2}, \beta\right\}.$$

*Тоді для довільного* $\alpha \in (1 - H, \alpha_0)$ *існує єдиний розв'язок* $X \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}; W_0^\alpha[0, T])$, *який є розв'язком рівняння* (9), *до того ж, для* $\mathsf{P}$-*майже всіх* $\omega \in \Omega$ *виконується*

$$X(\omega, \cdot\,) \in C^{1-\alpha}[0, T].$$

Розглянемо множину процесів $\{B^{H,\varepsilon}, \varepsilon > 0\}$, які наближають процес $B^H$. Нехай $X^\varepsilon$ — розв'язок рівняння

$$X_t^\varepsilon \ = \ X_0 \ + \ \int_0^t b(s, X_s^\varepsilon)\, ds \ + \ \int_0^t \sigma(s, X_s^\varepsilon)\, dB_s^{H,\varepsilon}, \quad t \in [0, T].$$

**Теорема 2.** *Припустимо, що коефіцієнти рівняння* (9) *задовольняють умови* $(H_b)$, $(H_\sigma)$ *і для деякого* $\gamma \in (1/2, H)$

$$\left\| B^{H,\varepsilon} - B^H \right\|_{1,\gamma} \xrightarrow{\ \mathsf{P}\ } 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

*Тоді*

$$\sup_{t \in [0, T]} \left| X_t - X_t^\varepsilon \right| \xrightarrow{\ \mathsf{P}\ } 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Розглянемо на $W_0^\beta[0, T]$ норму, еквівалентну до $\|\cdot\|_{0,\beta}$:

$$\|f\|_{0,\beta,\lambda} := \sup_{t\in[0,T]} e^{-\lambda t}\varphi_f^{\beta}(t).$$

Для доведення нам будуть потрібні такі леми.

**Лема 1** [3]. *Припустимо, що виконано умову* $(H_\sigma)$, $\beta \in (0, 1/2)$, $f \in W_0^{\beta}[0,T]$, $g \in W_1^{1-\beta}[0,T]$. *Тоді для будь-якого* $\lambda \geq 1$ *справедливі такі твердження*:

1) *існує інтеграл* $G^{(\sigma,g)}(f)(t) := \int_0^t \sigma(\cdot, f(\cdot))\, dg$, $t \in [0,T]$;

2) $G^{(\sigma,g)}(f) \in C^{1-\beta}[0,T] \subset W_0^{\beta}[0,T]$;

3) $\left\|G^{(\sigma,g)}(f)\right\|_{0,\beta,\lambda} \leq C_1 \Lambda_{1-\beta}(g)\lambda^{2\beta-1}\left(1+\|f\|_{0,\beta,\lambda}\right)$, *де* $C_1$ *залежить лише від* $\beta$, $T$ *і* $\sigma$;

4) *для довільних* $f, h \in W_0^{\beta}[0,T]$ *таких, що* $f_T^* \vee h_T^* \leq R$

$$\left\|G^{(\sigma,g)}(f) - G^{(\sigma,g)}(h)\right\|_{0,\beta,\lambda} \leq C_2\lambda^{2\beta-1}\Lambda_{1-\beta}(g)(1+K_f+K_h)\|f-h\|_{0,\beta,\lambda},$$

*де* $K_f = \sup_{r\in[0,T]}\int_0^r \frac{|f_r - f_s|}{(r-s)^{\beta+1}}\, ds$, $C_2$ *залежить лише від* $\beta$, $T$, $R$, $\sigma$.

Точне означення $\Lambda_{1-\beta}(g)$ можна знайти в [3]. Для доведення теореми 2 нам буде достатньо того, що для $g \in W_1^{1-\beta}[0,T]$ має місце оцінка

$$\Lambda_{1-\beta}(g) \leq C\|g\|_{1,1-\beta}.$$

**Лема 2** [3]. *Нехай* $\beta \in (0, 1/2)$, *виконано умову* $(H_b)$, $f \in W_0^{\beta}[0,T]$. *Тоді для будь-якого* $\lambda \geq 1$ *справедливі такі твердження*:

1) *існує інтеграл Лебега* $F^{(b)}(f)(t) := \int_0^t b(s, f(s))\, ds$, $t \in [0,T]$;

2) $F^{(b)}(f) \in C^{1-\beta}[0,T]$;

3) $\left\|F^{(b)}(f)\right\|_{0,\beta,\lambda} \leq C_3\lambda^{2\beta-1}\left(1+\|f\|_{0,\beta,\lambda}\right)$, *де* $C_3$ *залежить лише від* $\beta$, $T$ *та* $b$;

4) *нехай* $f, h \in W_0^{\beta}[0,T]$ *з* $f_T^* \vee h_T^* \leq R$,
*тоді*

$$\left\|F^{(b)}(f) - F^{(b)}(h)\right\|_{0,\beta,\lambda} \leq C_4\lambda^{\beta-1}\|f-h\|_{0,\beta,\lambda},$$

*де* $C_4$ *залежить від* $\beta$, $T$, $R$, $b$.

***Доведення теореми 2.*** Позначимо $\beta := 1-\gamma$.

Спочатку доведемо, що $K_{X^\varepsilon}$ рівномірно по $\varepsilon$ обмежене за ймовірністю. Очевидно, що

$$K_f \equiv \sup_{r\in[0,T]}\int_0^r \frac{|f_r - f_s|}{(r-s)^{\beta+1}}\, ds \leq C\|f\|_{0,\beta}.$$

З доведення теореми 5.1 [3] випливає, що

$$\left\|X^\varepsilon\right\|_{0,\beta} \leq 2\left(1+|X_0|\right)e^{\lambda_0(\varepsilon)T},$$

де

$$\lambda_0(\varepsilon) \;\le\; \Big(2\Big(C_3 + C_1\,\Lambda_{1-\beta}(B^{H,\varepsilon})\Big)\Big)^{1/2\beta-1}.$$

Оскільки

$$\Lambda_{1-\beta}(B^{H,\varepsilon}) \;\le\; \left\| B^{H,\varepsilon} \right\|_{1,1-\beta}$$

і

$$\left\| B^{H,\varepsilon} - B^H \right\|_{1,1-\beta} \xrightarrow{\;\mathsf{P}\;} 0, \quad \varepsilon \to 0+,$$

то $\Lambda_{1-\beta}(B^{H,\varepsilon})$ обмежене за ймовірністю рівномірно по $\varepsilon$. Звідси $\left\| X^{\varepsilon} \right\|_{0,\beta}$ обмежене за ймовірністю рівномірно по $\varepsilon$, а тому й $K_{X^{\varepsilon}}$ обмежені за ймовірністю рівномірно по $\varepsilon$ та $X_t^{\varepsilon}$ обмежені за ймовірністю рівномірно по $\varepsilon$, $t$.

Зауважимо, що достатньо довести збіжність

$$\mathsf{P}\Big(\sup_t \left| X_t - X_t^{\varepsilon} \right| > \delta,\ \sup_t \left| X_t \right| \le R,\ \sup_t \left| X_t^{\varepsilon} \right| \le R\Big) \to 0, \quad \varepsilon \to 0+,$$

для всіх $\delta > 0$, $R > 0$. Ми одержимо потрібний результат, оскільки $X_t$ та $X_t^{\varepsilon}$ рівномірно обмежені за ймовірністю.

Отже, припустимо, що $X_t$ та $X_t^{\varepsilon}$ обмежені деяким $R > 0$. Маємо

$$X \;=\; X_0 + F^{(b)}(X) + G^{(\sigma, B^H)}(X),$$

$$X^{\varepsilon} \;=\; X_0 + F^{(b)}(X^{\varepsilon}) + G^{(\sigma, B^{H,\varepsilon})}(X^{\varepsilon}),$$

де $F^{(b)}(f)(t) := \int_0^t b\big(s, f(s)\big)\,ds$, $G^{(\sigma,g)}(f)(t) := \int_0^t \sigma\big(\cdot, f(\cdot)\big)\,dg$, $t \in [0, T]$.

Запишемо

$$\left\| X - X^{\varepsilon} \right\|_{0,\beta,\lambda} \;\le\; \left\| F^{(b)}(X) - F^{(b)}(X^{\varepsilon}) \right\|_{0,\beta,\lambda} +$$

$$+ \left\| G^{(\sigma,B^H)}(X) - G^{(\sigma,B^H)}(X^{\varepsilon}) \right\|_{0,\beta,\lambda} + \left\| G^{(\sigma,B^{H,\varepsilon})}(X^{\varepsilon}) \right\|_{0,\beta,\lambda}.$$

Використовуючи леми 1 та 2, оцінюємо

$$\left\| X - X^{\varepsilon} \right\|_{0,\beta,\lambda} \;\le\; C\,\lambda^{2\beta-1}\Big(1 + \left\| B^H \right\|_{1,1-\beta}\Big)\,(1 + K_X + K_{X_{\varepsilon}})\left\| X - X^{\varepsilon} \right\|_{0,\beta,\lambda} +$$

$$+\; C\,\lambda^{2\beta-1}\left\| B^H - B^{H,\varepsilon} \right\|_{1,1-\beta}\Big(1 + \left\| X^{\varepsilon} \right\|_{0,\beta,\lambda}\Big).$$

Якщо

$$\Theta(\lambda,\varepsilon) \;=\; C\,\lambda^{2\beta-1}\Big\{\Big(1 + \left\| B^H \right\|_{1,1-\beta}\Big)\,(1 + K_X + K_{X_{\varepsilon}}) + \left\| X^{\varepsilon} \right\|_{0,\beta,\lambda}\Big\} \;<\; 1/2,$$

то

$$\left\| X - X^{\varepsilon} \right\|_{0,\beta,\lambda} \;\le\; \left\| B^H - B^{H,\varepsilon} \right\|_{1,1-\beta}.$$

Звідси

$$\mathsf{P}\left(\left\| X - X^{\varepsilon} \right\|_{0,\beta,\lambda} > c\right) \le \mathsf{P}\left(\left\| B^{H} - B^{H,\varepsilon} \right\|_{1,1-\beta} > c\right) + \mathsf{P}\big(\Theta(\lambda,\varepsilon) > 1/2\big).$$

Зауважимо, що

$$\sup_{t\in[0,T]} \left| X_t - X_t^{\varepsilon} \right| \le e^{\lambda T} \left\| X - X^{\varepsilon} \right\|_{0,\beta,\lambda},$$

тому для довільного $\delta > 0$

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} \left| X_t - X_t^{\varepsilon} \right| > \delta\right) \le \mathsf{P}\left(\left\| B^{H} - B^{H,\varepsilon} \right\|_{1,1-\beta} > \delta e^{-\lambda T}\right) + \mathsf{P}\big(\Theta(\lambda,\varepsilon) > 1/2\big).$$

Але легко показати, що $\Theta(\lambda,\varepsilon) \to 0$ за ймовірністю при $\lambda \to \infty$ рівномірно по $\varepsilon$.

Теорему доведено.

***Наслідок* 1.** *Якщо коефіцієнти рівняння* (9) *задовольняють умови* $(H_b)$, $H_\sigma$, $B^{H,\varepsilon}$ *визначено за допомогою формул* (3) – (4), *і функції* $\phi_\varepsilon$ *задовольняють умови* i) – iv), *наведені на початку п.* 2, *то має місце збіжність*

$$\sup_{t\in[0,T]} \left| X_t - X_t^{\varepsilon} \right| \xrightarrow{\ \mathsf{P}\ } 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

1. *Zähle M.* Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus I // Probab. Theory Relat. Fields. – 1998. – **111**, № 3. – P. 333 – 372.
2. *Coutin L., Qian Zh.* Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions // Ibid. – 2002. – **122**, № 1. – P. 108 – 140.
3. *Nualart D., Răscanu A.* Differential equations driven by fractional Brownian motion // Collect. Math. – 2002. – **53**, №1. – P. 55 – 81.
4. *Ruzmaikina A. A.* Stieltjes integrals of Hölder continuous functions with applications to fractional Brownian motion // J. Statist. Phys. – 2000. – **100**, № 5 – 6. – P. 1049 – 1069.
5. *Coutin L., Qian Zh.* Stochastic differential equations for fractional Brownian motions // C. r. Acad. sci., Sér. I. Math. – 2000. – **331**, № 1. – P. 75 – 80.
6. *Nourdin I.* A simple theory for the study of SDEs driven by a fractional Brownian motion, in dimension one // Sémin. probab. XLI. Some papers are selected contributions of the seminars in Nancy 2005 and Luminy 2006. (Lect. Notes Math., 1934.) – Berlin: Springer, 2008. – P. 181 – 197.
7. *Lin S. J.* Stochastic analysis of fractional Brownian motions // Stochast. Rep. – 1995. – **55**, № 1 – 2. – P. 121 – 140.
8. *Duncan T. E., Hu Y., Pasik-Duncan B.* Stochastic calculus for fractional Brownian motion. I. Theory // SIAM J. Control Optim. – 2000. – **38**, № 2. – P. 582 – 612.
9. *Alòs E., Mazet O., Nualart D.* Stochastic calculus with respect to Gaussian processes // Ann. Probab. – 2001. – **29**, № 2. – P. 766 – 801.
10. *Russo F., Vallois P.* Forward, backward and symmetric stochastic integration // Probab. Theory Relat. Fields. – 1993. – **97**, № 3. – P. 403 – 421.
11. *León J. A., Tudor C.* Semilinear fractional stochastic differential equations // Bol. Soc. mat. mex., III. – 2002. – **8**, № 2. – P. 205 – 226.
12. *Мішура Ю. С.* Квазілінійні стохастичні диференціальні рівняння з дробово-броунівською компонентою // Теорія імовірностей і мат. статистика. – 2004. – № 68. – С. 95 – 106.
13. *Tindel S., Tudor C. A., Viens F.* Stochastic evolution equations with fractional Brownian motion // Probab. Theory Relat. Fields – 2003. – **127**, № 2. – P. 186 – 204.
14. *Mishura Yu.* Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes // Lect. Notes Math. – Berlin: Springer, 2008. – xviii + 393 p.
15. *Mishura Yu., Shevchenko G.* The rate of convergence for Euler approximations of solutions of stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion // Stochastics. – 2008. – **80**, № 5. – P. 489 – 511.
16. *Nordin I., Neuenkirch A.* Exact rate of convergence of some approximation schemes associated to SDEs driven by a fractional Brownian motion // J. Theor. Probab. – 2007. – **20**, № 4. – P. 871 – 899.

17. *Thao T. H.* An approximate approach to fractional analysis for finance // Nonlinear Anal., Real World and Appl. – 2006. – **7**, № 1. – P. 124 – 132.
18. *Андрощук Т.* Наближення стохастичного інтегралу по дробовому броунівському руху інтегралами по абсолютно неперервним процесам // Теорія імовірностей і мат. статистика. – 2005. – № 73. – С. 11 – 20.
19. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
20. *Norros I., Valkeila E., Virtamo J.* An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions // Bernoulli. – 1999. – **5**, № 4. – P. 571 – 587.
21. *Garsia A. M., Rodemich E.* Monotonicity of certain functionals under rearrangement // Ann. Inst. Fourier. – 1974. – **24**, № 2. – P. 67 – 116.

Одержано 30.09.09,
після доопрацювання — 29.06.10

э