УДК 512.552.12

О. В. Домша, Б. В. Забавський (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

2-ПРОСТІ ОБЛАСТІ ОРЕ СТАБІЛЬНОГО РАНГУ 1

It is known that the simple Bezout domain is a domain of elementary divisors if and only if it is 2-simple domain. We prove that, over the 2-simple Ore domain of stable rank 1, an arbitrary matrix that is not a divizor of zero is equivalent to a canonical diagonal matrix.

Известно, что простая область Безу является областью элементарных делителей тогда и только тогда, когда она 2-простая. В работе доказано, что над 2-простой областью Орэ стабильного ранга 1 произвольная матрица, не являющаяся делителем нуля, эквивалентна канонической диагональной матрице.

Задача про діагоналізацію матриць над кільцями є класичною. Її прототипом є теорема Гаусса про еквівалентність матриці над полем діагональній матриці з одиницями та нулями на головній діагоналі. Перші результати такого типу щодо цілих чисел були отримані в 1861 р. Г. Смітом [1]. Він довів, що кожна матриця з цілочисловими елементами шляхом елементарних перетворень рядків і стовпців зводиться до діагонального вигляду, до того ж кожен діагональний елемент є дільником наступного. Пізніше теорему Сміта було поширено на різні класи кілець. Так, Діксон [2], Веддербарн [3], ван дер Варден [4] і Джекобсон [5] поширили дану теорему на різні класи комутативних і некомутативних кілець, а Тейхмюллер [6] одержав повний розв'язок для некомутативних областей головних ідеалів (а в іншому формулюванні — Асано [7]).

Всі ці результати сприяли введенню Капланським поняття кільця елементарних дільників. Нагадаємо, що матриця над асоціативним кільцем з одиницею має канонічну діагональну редукцію, якщо її можна звести до діагонального вигляду шляхом домноження зліва і справа на деякі обернені матриці відповідних розмірів, і при цьому кожен діагональний елемент є повним дільником наступного. Якщо кожна матриця над кільцем має канонічну діагональну редукцію, то таке кільце називається кільцем елементарних дільників [8].

Якщо дослідження комутативних кілець елементарних дільників велися досить систематично [9 – 12], то некомутативні кільця елементарних дільників досліджувалися фрагментарно [13, 14]. Крім наведених результатів вартий уваги результат Кона [15], який довів, що права головна область Безу є кільцем елементарних дільників. У роботі [16] побудовано приклад такої області Безу, причому зауважимо, що це приклад простої області Безу. Серед найновіших результатів варто відмітити [17], де показано, що проста область Безу є областю елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є 2-простою.

Одним із нових понять, яке ввійшло в теорію кілець з K-теорії і виявилось корисним при розв'язанні низки відкритих задач теорії кілець, є поняття стабільного рангу кільця. Зокрема, доведено, що стабільний ранг кільця елементарних дільників не перевищує 2 [18].

Отже, нехай R — проста область. Тоді для довільного ненульового елемента $a \in R$ отримаємо $RaR = R$, тобто існують елементи $u_1, u_2, \ldots, u_n$; $v_1, v_2, \ldots, v_n \in R$ такі, що

$$u_1 a v_1 + u_2 a v_2 + \ldots + u_n a v_n = 1.$$

Якщо для кожного ненульового елемента $a \in R$ існує натуральне число n таке, що $u_1 a v_1 + \ldots + u_n a v_n = 1$, до того ж число n є найменшим з усіх можливих, то область R називається n-простою. Зокрема, область R є 2-простою тоді і тільки тоді, коли для довільного ненульового елемента $a \in R$ існують елементи $u_1, u_2; v_1, v_2 \in R$ такі, що $u_1 a v_1 + u_2 a v_2 = 1$. Прикладом 2-простої області Оре є кільце від n-диференціювань [19].

Твердження 1. *Нехай R — 2-проста область. Тоді для довільних ненульових елементів $a, b \in R$ існують елементи $u_1, u_2; v_1, v_2 \in R$ такі, що*

$$u_1 a v_1 + u_2 b v_2 = 1.$$

Доведення. За умовою теореми елементи a, b є ненульовими і R — область, тоді $ab \neq 0$ і

$$RabR = R.$$

Оскільки R є 2-простою областю, то існують елементи $x_1, x_2; y_1, y_2 \in R$ такі, що

$$x_1 aby_1 + x_2 aby_2 = 1.$$

Покладемо $x_1 = u_1$, $by_1 = v_1$, $x_2 a = u_2$, $y_2 = u_2$ і отримаємо

$$u_1 a v_1 + u_2 b v_2 = 1,$$

що й потрібно було довести.

Позначимо через $U(R)$ групу обернених елементів області R.

Нагадаємо, що кільце R є кільцем стабільного рангу 1, якщо з того, що $aR + bR = R$ для довільних елементів $a, b \in R$, випливає існування елементів $t \in R$ і $u \in U(R)$ таких, що $a + bt = u$ [20].

Твердження 2. *Нехай R — 2-проста область стабільного рангу 1. Тоді для довільних ненульових елементів $a, b \in R$ існують елементи $\alpha, \beta \in R$ і обернений елемент $w \in U(R)$ такі, що $a\alpha + wb\beta = 1$.*

Доведення. Оскільки R — 2-проста область, то згідно з твердженням 1 для довільних ненульових елементів $a, b \in R$ існують такі елементи $u_1, u_2; v_1, v_2 \in R$, що

$$u_1 a v_1 + u_2 a v_2 = 1,$$

звідки

$$u_1 aR + u_2 aR = R.$$

Оскільки R — область стабільного рангу 1, то існує такий елемент $x \in R$, для якого

$$u_1 a + u_2 bx \in U(R).$$

Звідси $Ra + Rbx = R$.

З того, що R — область стабільного рангу 1, отримуємо

$$a + ybx = u \in U(R)$$

для деякого елемента $y \in R$. Отже, $aR + bR = R$.

Знову ж з того, що R — область стабільного рангу 1, маємо

$$as + y = w \in U(R)$$

для деякого елемента $s \in R$. Звідси

$$y = w - as.$$

Тоді рівність $a + ybx = u$ при отриманому y набере вигляду

$$a + wbx - asbx = a(1 - sbx) + wbx = u.$$

Звідси одержимо

$$a(1 - sbx)u^{-1} + wbxu^{-1} = 1,$$

тобто

$$a\alpha + wb\beta = 1$$

для деяких елементів $\alpha, \beta \in R$ і оберненого елемента $w \in U(R)$.

Означення 1 [21]**.** *Область R називається правою (лівою) областю Оре, якщо для довільних ненульових елементів a, $b \in R$ $aR \bigcap bR \neq 0$ ($Ra \bigcap Rb \neq \neq \{0\}$). Область Оре — це область, яка є правою і лівою областю Оре одночасно.*

Означення 2 [21]**.** *Матриці A і B назвемо еквівалентними над областю R, якщо існують обернені матриці P і Q над R відповідних розмірів такі, що $B = PAQ$.*

Доведемо наступне твердження.

Твердження 3. *Нехай R — 2-проста область Оре стабільного рангу 1. Тоді для кожної матриці $A = (a_{ij})$ другого порядку, яка не є дільником нуля, існують рядок $(1, u)$ і стовпчик $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ такі, що*

$$(1, u) A \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = 1,$$

де e, $f \in R$, $u \in U(R)$.

Доведення. Оскільки R — область Оре і матриця A не є дільником нуля, то легко бачити, що існує матриця D над R порядку 2, яка також не є дільником нуля, така, що виконується рівність

$$AD = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix},$$

де $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$.

Згідно з твердженням 2 для елементів d_1, d_2 існують елементи u, c, d, до того ж u — обернений елемент, такі, що виконується рівність

$$d_1 c + d_2 d = 1.$$

Тоді

$$(1 \quad a)\, AD \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (1 \quad u) \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 1.$$

Покладемо

$$D \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

що доводить дане твердження.

Теорема 1. *Нехай* R — *2-проста область Оре стабільного рангу* 1. *Тоді для довільної матриці* A *порядку* n, *яка не є дільником нуля*, *існують такі обернені матриці* P, Q *відповідних розмірів*, *що*

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \Delta \end{pmatrix}.$$

Доведення проводимо методом математичної індукції. Розглянемо випадок $n = 2$. Згідно з твердженням 3 для матриці A існують елементи $u, e, f \in R$, до того ж u — обернений елемент, такі, що

$$(1 \quad u)\, A \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = 1.$$

Очевидно, що $Re + Rf = R$. Оскільки R — область стабільного рангу 1, то, враховуючи [5], рядок $(1 \quad u)$ і стовпчик $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ можна доповнити до обернених матриць P і Q відповідно. Звідси

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що елементарними перетвореннями рядків і стовпчиків матриця PAQ зводиться до вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}.$$

Це означає, що для матриці A існують такі матриці S і T, що

$$SAT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

Нехай $n = 3$, тобто матриця $A = (a_{ij})$ є матрицею третього порядку. Без обмеження загальності можна вважати, що підматриця

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

матриці A не є дільником нуля. Тоді згідно з твердженням 3 виконується рівність

$$(1 \quad u \quad 0)\, A \begin{pmatrix} e - e(a_{13} + ua_{23}) \\ f - f(a_{13} + ua_{23}) \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Очевидно, що рядок $(1 \quad u \quad 0)$ можна доповнити до оберненої матриці P. Зауважимо, що $R\big(e - e(a_{13} + ua_{23})\big) + R\big(f - f(a_{13} + ua_{23})\big) = R$. Оскільки R — область стабільного рангу 1, то згідно з [18] стовпчик

$$\begin{pmatrix} e - e(a_{13} + ua_{23}) \\ f - f(a_{13} + ua_{23}) \\ 1 \end{pmatrix}$$

можна доповнити до оберненої матриці Q. Звідси

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що матриця PAQ елементарними перетвореннями рядків і стовпчиків зводиться до вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

Оскільки A не є дільником нуля, то матриця

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

теж не є дільником нуля, а отже, за доведеним вище, зводиться до вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця A зводиться до вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix},$$

що й потрібно було довести.

Індукція за розмірами матриці завершує доведення.

1. *Smith H. J. S.* On systems of linear indeterminate equations and congruences // Phil. Trans. Roy. Soc. London. – 1861. – **151**, № 2. – P. 293 – 326.
2. *Dickson L. E.* Algebras and their arithmetics. – Chicago: Univ. Chicago Press, 1923.
3. *Wedderburn J. H. M.* Non-commutative domains of integrity // J. reine und angew. Math. – 1932.– **167**, № 1. – S. 129 – 141.
4. *Van der Warden B. L.* Moderne algebra. – Berlin; New York: Springer, 1930.
5. *Jacobson N.* Pseudo-linear transformation // Ann. Math. – 1937. – № 38. – P. 484 – 507.
6. *Teichmuller O.* Der Elementarteilsatz für neichtkommutative Ringe // Abh. Preuss. Acad. Wiss. Phys.-Math. K 1. – 1937. – S. 169 – 177.

7. *Asano K.* Neichtkommutative Hauptidealringe // Acta. Sci. – Paris: Hermann, 1938. – Ind. 696.
8. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66**. – P. 464 – 491.
9. *Gerstein L.* A local to approach to matrix equivalence // Linear Algebra and Appl. – 1977. – **16**. – P. 221 – 232.
10. *Gillman L., Henricsen M.* Some remarks about elementary divisor rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – **82**. – P. 362 – 365.
11. *Henricsen M., Jerison M.* The space of minimal primes of a commutative ring // Ibid. – 1965.– **115**. – P. 110 – 130.
12. *Lam T. Y.* A crash course on stable range, cancellation, substitution and exchange. – Berkeley CA: Univ. California, 1972.
13. *Забавский Б. В.* О некомутативных кольцах с элементарными делителями // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 6. – С. 847 – 850.
14. *Zabavsky B. V.* Diagonalization of matrices // Мат. студ. – 2005. – **23**, № 1. – С. 3 – 10.
15. *Cohn P. M.* On the structure of the GL_2 of a ring // Publ. Math. I.H.E.S. – 1966. – № 30. – P. 5 – 59.
16. *Cohn P. M.* Rings of a transfinite weak algorithm // Bull. London Math. Soc. – 1969. – № 1. – P. 55 – 59.
17. *Забавский Б. В.* Простые кольца элементарных делителей // Мат. студ. – 2004. – **22**, № 2. – С. 129 – 133.
18. *Zabavsky B. V.* Diagonalizability theorem for matrices over ring with finite stable range // Algebra and Discrete Math. – 2005. – № 1. – P. 134 – 148.
19. *Olszewski J.* On ideals of product of rings // Demonstr. math. – 1994. – **27**, № 1. – P. 1 – 7.
20. *Vaserstein L. N.* The stable rank of rings and dimensionality of topological spaces // Funct. Anal. and Appl. – 1971. – N 5. – P. 102 – 110.
21. *Кон П.* Свободные кольца и их связи. – М.: Мир, 1976.

Одержано 22.06.09,
після доопрацювання — 23.07.10