УДК 517.946

М. В. Гончаренко, Е. Я. Хруслов
(Физ.-техн. ин-т низких температур НАН Украины, Харьков)

УСРЕДНЕННАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ УВЛАЖНЕННОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ*

We consider an initial boundary-value problem describing nonstationary vibrations of an elastic medium with a great number of small caverns that are filled with viscous incompressible fluid. We study the asymptotic behavior of a solution in the case where diameters of the caverns tend to zero, their number tends to infinity, and the caverns have "volume" location. We construct the homogenized equation that describes the leading term of asymptotics. This equation is a model of wave propagation in media such as wet soil, rocks, and some biological tissues.

Розглядається початково-крайова задача, що описує нестаціонарні коливання пружного середовища з великою кількістю дрібних каверн, які заповнені в'язкою нестислою рідиною. Вивчається асимптотична поведінка розв'язку, коли діаметри каверн прямують до нуля, їх кількість прямує до нескінченності та розташовуються вони „об'ємно". Побудовано усереднене рівняння, що описує головний член асимптотики. Це рівняння є моделлю розповсюдження хвиль у середовищах типу зволоженого грунту, гірських порід та деяких біологічних тканин.

1. Введение. Простейшей моделью увлажненной упругой среды является среда, содержащая мелкие каверны, заполненные вязкой несжимаемой жидкостью. А именно, пусть Ω — фиксированная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega$, а G_ε^α — подобласти в Ω с гладкими непересекающимися границами $\partial G_\varepsilon^\alpha$ — каверны. Размеры и количество подобластей G_ε^α зависят от малого параметра ε так, что при $\varepsilon \to 0$ диаметры G_ε^α стремятся к нулю, их количество $N(\varepsilon)$ стремится к ∞ и G_ε^α располагаются „объемно" в области Ω.

Предположим, что область $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{\alpha=1}^{N(\varepsilon)} \bar{G}_\varepsilon^\alpha$ занята упругой средой, а каверны G_ε^α заполнены вязкой несжимаемой жидкостью.

Нестационарные колебания упругой среды Ω_ε описываются уравнением

$$\rho_s \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} - L[u_\varepsilon] = 0, \tag{1.1}$$

где $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x,t)$ — вектор упругих смещений, $\rho_s = \mathrm{const}$ — плотность упругой среды и

$$L[u] = \sum_{n,p,q,r=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_n}(a_{npqr}\gamma_{qr}[u])e^p. \tag{1.2}$$

Здесь e^p — орт оси x_p,

$$\gamma_{qr}[u] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_q}{\partial x_r} + \frac{\partial u_r}{\partial x_q}\right)$$

— компоненты тензора деформации среды, а a_{npqr} — компоненты тензора упругости, имеющего свойства симметрии $a_{iklm} = a_{kilm} = a_{lmik} = a_{ikml}$ и положительной определенности, т. е.

$$\sum_{n,p,q,r=1}^{3} a_{npqr}t_{np}t_{qr} \geq C \sum_{n,p=1}^{3} |t_{np}|^2 \quad \forall \{t_{np}\}_{n,p=1}^{3}, \quad C > 0.$$

*Выполнена при частичной поддержке совместного украинско-французского гранта PICS.

Колебания жидкости в G_ε^α описываются линейными уравнениями Навье – Стокса

$$\rho_f \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} - \mu\Delta v_\varepsilon = \nabla p_\varepsilon, \quad \operatorname{div} v_\varepsilon = 0, \tag{1.3}$$

где $v_\varepsilon = v_\varepsilon(x,t)$ — скорость жидкости, p_ε — давление, $\rho_f = \mathrm{const}$ — плотность жидкости и $\mu = \mathrm{const}$ — ее динамическая вязкость.

На границах раздела $\bigcup_{\alpha=1}^{N(\varepsilon)} \partial G_\varepsilon^\alpha$ выполняются условия

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = v_\varepsilon, \tag{1.4}$$

$$T_f[v_\varepsilon] = T_s[u_\varepsilon]. \tag{1.5}$$

Здесь

$$T_f[v] = \mu \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}[v]\nu_i e^k - p\nu$$

— вектор напряжений на поверхности $\partial\Omega_\varepsilon$ в жидкости,

$$T_s[u] = \sum_{n,p,q,r=1}^{3} a_{npqr}\gamma_{qr}[u]\nu_n e^q \tag{1.6}$$

— вектор напряжений в упругой среде, ν — внешняя нормаль к поверхности $\partial G_\varepsilon^\alpha$.

Условие (1.4) означает совпадение на границе раздела векторов скоростей упругой и жидкой сред, а условие (1.5) — совпадение векторов напряжений.

Для определенности будем предполагать, что упругая среда закреплена на внешней границе $\partial\Omega$, т. е.

$$u_\varepsilon = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{1.7}$$

а начальные условия имеют вид

$$u_\varepsilon(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = U_\varepsilon^1(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \tag{1.8}$$

$$v_\varepsilon(x,0) = V_\varepsilon^1(x), \quad x \in G_\varepsilon = \bigcup_{\alpha=1}^{N(\varepsilon)} G_\varepsilon^\alpha, \tag{1.9}$$

где $U_\varepsilon^1 \in W_2^1(\Omega_\varepsilon)$, $V_\varepsilon^1 \in W_2^1(G_\varepsilon)$, $\operatorname{div} V_\varepsilon^1 = 0$, $U_\varepsilon^1 = V_\varepsilon^1$, $x \in \partial G_\varepsilon$.

Задача (1.1) – (1.9) имеет единственное решение $\{u_\varepsilon, v_\varepsilon\}$, состоящее из смещения u_ε упругой фазы и скорости v_ε жидкой фазы.

Целью данной работы является получение усредненной модели колебаний. Для этого изучается асимптотическое поведение решения задачи (1.1) – (1.9) при $\varepsilon \to 0$. Будет доказано, что при определенных условиях главный член асимптотики описывается вектор-функцией $u(x,t)$, являющейся решением следующего усредненного уравнения в области Ω:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{n,p,q,r=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\int_0^t A_{npqr}(x,t-\tau)\gamma_{qr}\left[\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau}\right] d\tau\right) e^p = 0, \tag{1.10}$$

где $\rho(x)$ — эффективная плотность среды, $\{A_{npqr}(x,t)\}$ — симметрическая тензор-функция, которая является эффективной характеристикой упругих и релаксационных сил увлажненной среды. Это уравнение и является усредненной моделью колебаний увлажненной упругой среды. Подобные вопросы рассматривались во многих работах в связи с изучением распространения волн в увлажненных почвах, горных породах, биологических тканях [1 – 4].

2. Уточненная постановка задачи и основной результат. Предположим, что расположение каверн локально близко к периодическому. Это означает, что каверны G_ε^α находятся в периодически расположенных параллелепипедах, имеют одинаковую форму, а диаметры и координаты центров масс каверн, находящихся в соседних параллелепипедах, отличаются на малую величину. А именно, предположим, что пространство $\mathbb{R}^3$ разрезано на параллелепипеды $\Pi_\varepsilon^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon |x_i - x_i^\alpha| \leq \leq (\theta_i\varepsilon)/2, i = 1,2,3\}$ с центрами в точках x^α и сторонами длиной $\theta_i\varepsilon$, ориентированными по координатным осям. В каждом параллелепипеде, принадлежащем области Ω, находится множество G_ε^α, являющееся гомотетическим сжатием фиксированного тела $G \in \mathbb{R}^3$ диаметром единица, с центром масс в начале координат и гладкой границей ∂G. Диаметры множеств G_ε^α $d_\varepsilon^\alpha = d(x^\alpha)\varepsilon$, центры масс находятся в точках $x^\alpha + a(x^\alpha)\varepsilon$, а ориентации задаются операторами вращения $P(x^\alpha)$ так, что

$$G_\varepsilon^\alpha = \left\{ x \in \Pi_\varepsilon^\alpha \colon P^{-1}(x^\alpha)\frac{x - x^\alpha - a(x^\alpha)\varepsilon}{d(x^\alpha)\varepsilon} \in G \right\}.$$

Будем предполагать, что функция $d(y)$, вектор-функция $a(y)$ и матрица $P(y)$ непрерывно дифференцируемы и выполняются неравенства

$$\max_{y\in\Omega}(|d(y)| + |a(y)|) < \min_i \frac{\theta_i(1-2\delta)}{2}, \quad \delta > 0.$$

Такую структуру композитной среды естественно называть локально периодической.

Введем обозначения

$$\Pi = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^3 \colon |\xi_i| < \frac{\theta_i}{2},\ i = 1,2,3 \right\},$$

$$G^y = \left\{ \xi \in \Pi \colon P^{-1}(y)\frac{\xi - a(y)}{d(y)} \in G,\ y \in \Omega \right\}.$$

Обозначим через $H^1_{\text{per}}[\Pi]$ замыкание по норме $W_2^1(\Pi)$ множества гладких Π-периодических функций (см. [5]).

Рассмотрим в параллелепипеде Π следующую краевую задачу („ячеечную” задачу):

$$\mu\Delta\tilde{v}^{np}(x,\lambda) = \nabla\tilde{p}, \quad \mathrm{div}\tilde{v}^{np}(x,\lambda) = 0, \quad x \in G^y, \tag{2.1}$$

$$\sum_{i,k,l,m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{iklm}\gamma_{lm}[\tilde{w}^{np}]\right)e^k = 0, \quad x \in \Pi \setminus G^y, \tag{2.2}$$

$$\tilde{v}^{np} = \tilde{w}^{np}, \quad x \in \partial G^y, \tag{2.3}$$

$$\mu \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}[\tilde{v}^{np}]\nu_i e^k - \tilde{p}\nu = \frac{1}{\lambda} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} a_{iklm}\gamma_{lm}[\tilde{w}^{np}]\nu_i e^k, \quad x \in \partial G^y, \tag{2.4}$$

$$\tilde{u}^{np} - \phi^{np} \in H^1_{\rm per}[\Pi], \tag{2.5}$$

где $\tilde{u}^{np} = \tilde{v}^{np}\chi_{G^y} + \tilde{w}^{np}(1 - \chi_{G^y})$, χ_{G^y} — характеристическая функция области G^y, а вектор-функция $\phi^{np}(x)$ определена равенством $\phi^{np} = \dfrac{1}{2}(x_n e^p + x_p e^n)$, λ — комплексный параметр, ${\rm Re}\lambda > 0$.

Существует единственное (с точностью до постоянного вектора) решение этой задачи, и оно является аналитической функцией параметра λ в полуплоскости ${\rm Re}\,\lambda > 0$.

С помощью решения задачи (2.1)–(2.5) определим тензор $\{\tilde{A}_{npqr}(y,\lambda)\}$ по формуле

$$\tilde{A}_{npqr}(y,\lambda) = \frac{\mu}{2} \int\limits_{G^y} \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}[\tilde{v}^{np}]\gamma_{ik}[\tilde{v}^{qr}]dx +$$

$$+\frac{1}{\lambda} \int\limits_{\Pi\setminus G^y} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} a_{iklm}\gamma_{ik}[\tilde{w}^{np}]\gamma_{lm}[\tilde{w}^{qr}]dx. \tag{2.6}$$

Тензор $\{\tilde{A}_{npqr}(y,\lambda)\}$ аналитичен в области ${\rm Re}\,\lambda > 0$, причем $\overline{\tilde{A}_{npqr}(y,\lambda)} = \tilde{A}_{npqr}(y,\bar{\lambda})$ и справедлива оценка

$$|\tilde{A}_{npqr}(y,\lambda)| \le C|\lambda|^{-1}. \tag{2.7}$$

Он обладает симметрией $\tilde{A}_{iklm} = \tilde{A}_{kilm} = \tilde{A}_{lmik} = \tilde{A}_{ikml}$ и положительно определен при $\lambda > 0$.

Следовательно, существует обратное преобразование Лапласа

$$A_{npqr}(y,t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \tilde{A}_{npqr}(y,\lambda)e^{\lambda t}d\lambda, \tag{2.8}$$

причем $A_{npqr}(y,t) \in L_2(-\infty,\infty)$, $A_{npqr}(y,t) = 0$ при $t < 0$ и ${\rm Im}A_{npqr}(y,t) = 0$.

Чтобы сформулировать основной результат работы, введем вектор-функцию смещения среды

$$\hat{u}_\varepsilon(x,t) = u_\varepsilon(x,t)\chi_\varepsilon(x) + (1 - \chi_\varepsilon(x)) \int\limits_0^t v_\varepsilon(x,\tau)d\tau, \tag{2.9}$$

где $\chi_\varepsilon(x)$ — характеристическая функция области Ω_ε.

Теорема 1. *Пусть начальные скорости задачи* (1.1)–(1.9) *сходятся к вектор-функциям* $U^1 \in L_2(\Omega)$ *и* $V^1 \in L_2(\Omega)$ *так, что*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |U^1_\varepsilon - U^1|^2 dx = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{G_\varepsilon} |V^1_\varepsilon - V^1|^2 dx = 0.$$

Тогда вектор-функция смещения $\hat{u}_\varepsilon(x,t)$ (2.9) *сходится в* $L_2(\Omega_T)$ $(\Omega_T = \Omega \times \times [0,T])$ *к вектор-функции* $u(x,t)$, *являющейся решением начально-краевой задачи*

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{n,p,q,r=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\int_0^t A_{npqr}(x,t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \gamma_{qr}[u(x,\tau)] d\tau \right) e^p = 0, \tag{2.10}$$

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{2.11}$$

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = V(x), \tag{2.12}$$

где $\rho = \rho(x) = \rho_f \dfrac{|G^x|}{|\Pi|} + \rho_s \dfrac{|\Pi \setminus G^x|}{|\Pi|}$, $V = \dfrac{\rho_f}{\rho} \dfrac{|G^x|}{|\Pi|} V^1 + \dfrac{\rho_s}{\rho} \dfrac{|\Pi \setminus G^x|}{|\Pi|} U^1$, *а коэффициенты* $A_{npqr}(x,t)$ *определяются формулами* (2.6), (2.8).

Наметим кратко схему доказательства, которое проводится в пп. 3 – 6.

Вводя вектор скорости перемещений упругой среды $w_\varepsilon = \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}$ и переходя к преобразованиям Лапласа по времени $\tilde{w}_\varepsilon(x,\lambda)$, $\tilde{v}_\varepsilon(x,\lambda)$, $\tilde{p}_\varepsilon(x,\lambda)$ от скоростей $w_\varepsilon(x,t)$, $v_\varepsilon(x,t)$ и давления $p_\varepsilon(x,t)$, сводим начально-краевую задачу (1.1) – (1.9) к следующей стационарной краевой задаче, зависящей от параметра λ, $\operatorname{Re}\lambda > 0$:

$$\lambda \rho_s \tilde{w}_\varepsilon(x,\lambda) - \frac{1}{\lambda} L[\tilde{w}_\varepsilon] = \rho_s U_\varepsilon^1, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \tag{2.13}$$

$$\lambda \rho_f \tilde{v}_\varepsilon(x,\lambda) - \mu \Delta \tilde{v}_\varepsilon(x,\lambda) - \nabla \tilde{p}_\varepsilon = \rho_f V_\varepsilon^1, \quad x \in G_\varepsilon, \tag{2.14}$$

$$\operatorname{div} \tilde{v}_\varepsilon(x,\lambda) = 0, \quad x \in G_\varepsilon, \tag{2.15}$$

$$\tilde{w}_\varepsilon = \tilde{v}_\varepsilon, \quad x \in \partial G_\varepsilon, \tag{2.16}$$

$$T_f[\tilde{v}_\varepsilon] = \frac{1}{\lambda} T_s[\tilde{w}_\varepsilon], \quad x \in \partial G_\varepsilon, \tag{2.17}$$

$$\tilde{v}_\varepsilon = 0, \quad x \in \partial \Omega_\varepsilon. \tag{2.18}$$

При любом λ, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, существует единственное решение этой задачи, которое является аналитичным.

При вещественных положительных λ эта задача эквивалентна вариационной задаче

$$\Phi_{\varepsilon\lambda}[u_\varepsilon] \to \inf_{u_\varepsilon \in \overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)} \tag{2.19}$$

для функционала

$$\Phi_{\varepsilon\lambda}[u_\varepsilon] = \lambda \int_\Omega \rho_\varepsilon |u_\varepsilon|^2 dx + \frac{\mu}{2} \int_{G_\varepsilon} \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}^2[u_\varepsilon] dx +$$

$$+ \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} a_{iklm} \gamma_{ik}[u_\varepsilon] \gamma_{lm}[u_\varepsilon] dx + 2 \int_\Omega f_\varepsilon \cdot u_\varepsilon dx, \tag{2.20}$$

где $\overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)$ — пространство вектор-функций из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, соленоидальных в G_ε, $\rho_\varepsilon = \rho_s\chi_\varepsilon + \rho_f(1-\chi_\varepsilon)$ и $f_\varepsilon(x) = \rho_s U_\varepsilon^1 \chi_\varepsilon + \rho_f V_\varepsilon^1(1-\chi_\varepsilon)$. Здесь и далее точкой обозначается скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$.

В п. 3 исследуется асимптотическое поведение решения $u_\varepsilon(x,\lambda)$ вариационной задачи (2.19) при $\varepsilon \to 0$. Сначала рассматривается более общая структура увлажненной среды (не обязательно локально-периодическая). Для характеризации таких сред вводится специальная количественная характеристика — тензор $\{\tilde{A}_{iklm}(x,\lambda;\varepsilon,h,\gamma)\}_{i,k,l,m=1}^3$, определенный в кубах $K_x^h = K(x,h)$ с центрами в точках x и сторонами длиной h ($\varepsilon \ll h$). Предполагается, что существуют предел при $\varepsilon\to 0,\ h\to 0$ этой характеристики (тензор $\{\tilde{A}_{iklm}(x,\lambda)\}$, а также слабые пределы $\rho(x)$ и $f(x)$ плотности среды $\rho_\varepsilon(x)$ и импульса $f_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to 0$. При этих условиях доказывается, что решение задачи (2.19) сходится в $L_2(\Omega)$ к решению вариационной задачи

$$\Phi_\lambda[u] \to \inf_{u\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} \tag{2.21}$$

для функционала

$$\Phi_\lambda = \lambda\int_\Omega \rho|u|^2dx + \int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^3 \tilde{A}_{iklm}(x,\lambda)\gamma_{ik}[u]\gamma_{lm}[u]dx + 2\int_\Omega f\cdot u dx. \tag{2.22}$$

Далее в п. 4 рассматривается локально-периодическая структура и доказывается, что компоненты предельного тензора $\tilde{A}_{iklm}(x,\lambda)$ при $\lambda>0$ выражаются через решение ячеечной краевой задачи (2.1) – (2.5) по формуле (2.6) и, следовательно, могут быть аналитически продолжены на полуплоскость $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$.

Решение вариационной задачи (2.21), (2.22) является слабым решением краевой задачи

$$\lambda\rho u(x,\lambda) + \sum_{i,k,l,m=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\tilde{A}_{iklm}(x,\lambda)\gamma_{lm}[u]\right)e^k = f(x), \quad x\in\Omega, \tag{2.23}$$

$$u(x,\lambda) = 0, \quad x\in\Omega. \tag{2.24}$$

В п. 5 доказывается, что решение задачи (2.23), (2.24) может быть аналитически продолжено в комплексную полуплоскость $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ и к нему сходится решение задачи (2.13) – (2.18). С учетом аналитичности решений задач (2.13) – (2.18) и (2.23), (2.24) с помощью обратного преобразования Лапласа доказывается сходимость решения нестационарной задачи (1.1) – (1.9) к решению задачи (2.10) – (2.12).

3. Асимптотическое поведение решения $u_\varepsilon(x,\lambda)$ вариационной задачи (2.19). В этом пункте будем рассматривать расположение подобластей G_ε^α более общего вида (не обязательно локально периодическое). Предполагается только, что $r_\varepsilon^\alpha = \mathrm{dist}\left(G_\varepsilon^\alpha, \bigcup_{\beta,\beta\neq\alpha} G_\varepsilon^\beta \bigcup \partial\Omega\right)$ — расстояние от G_ε^α до ближайших соседей и границы $\partial\Omega$ — и d_ε^α — диаметры множеств G_ε^α — удовлетворяют следующим условиям:

$$d_\varepsilon^\alpha < Cr_\varepsilon^\alpha, \quad r_\varepsilon^\alpha = O(\varepsilon), \tag{3.1}$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от параметра ε.

Введем локальную количественную характеристику областей Ω_ε.

Пусть $K_h^\alpha = K(h, x^\alpha)$ — куб со стороной h и центром в точке $x^\alpha \in \Omega$, $R = \{R_{np}\}$ — произвольный тензор второго ранга в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим задачу минимизации

$$\tilde{E}^{\varepsilon,\gamma}_{x^\alpha,h,\lambda}[R] = \inf_{v_{\varepsilon\alpha}} E^{\varepsilon,\gamma}_{x^\alpha,h,\lambda}[v_{\varepsilon\alpha}, R] =$$

$$= \Bigg\{ \frac{\mu}{2} \int\limits_{K_h^\alpha \cap G_\varepsilon} \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}^2[v_{\varepsilon\alpha}]dx + \frac{1}{\lambda} \int\limits_{K_h^\alpha \cap \Omega_\varepsilon} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} a_{iklm}\gamma_{ik}[v_{\varepsilon\alpha}]\gamma_{lm}[v_{\varepsilon\alpha}]dx +$$

$$+ h^{-2-\gamma} \int\limits_{K_h^\alpha} \left| v_{\varepsilon\alpha} - \sum_{k,l=1}^{3} \phi^{kl}(x-z)R_{kl} \right|^2 \Bigg\}. \tag{3.2}$$

Здесь инфимум берется по всем вектор-функциям $v_{\varepsilon\alpha}$ из класса $J_\varepsilon(K_h^\alpha) = \{v_{\varepsilon\alpha} \in \in W_2^1(K_h^\alpha), \operatorname{div} v_{\varepsilon\alpha} = 0, x \in G_\varepsilon\}$, γ — произвольное число $0 < \gamma < 2$ (параметр штрафа), а вектор-функция $\phi^{kl}(x)$ задана формулой

$$\phi^{kl}(x) = \frac{1}{2}(x_k e^l + x_l e^k).$$

Существует единственная вектор-функция $v_{\varepsilon\alpha}(x,\lambda)$, доставляющая минимум (3.2). Обозначим через $v_{\varepsilon\alpha}^{np}$ вектор-функцию, минимизирующую (3.2) при $R = R^{np} \overset{\text{df}}{=} \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{2}(e^n \otimes e^p + e^p \otimes e^n)$. Тогда $v_{\varepsilon\alpha}(x,\lambda) = \sum_{n,p=1}^{3} R_{np} v_{\varepsilon\alpha}^{np}(x,\lambda)$ и, следовательно,

$$\tilde{E}^{\varepsilon,\gamma}_{x^\alpha,h,\lambda}[R] = \sum_{n,p,q,r=1}^{3} \tilde{A}_{npqr}(x^\alpha, \varepsilon, h, \lambda, \gamma) R_{np} R_{qr},$$

где

$$\tilde{A}_{npqr}(x^\alpha, \varepsilon, h, \lambda, \gamma) = \frac{\mu}{2} \int\limits_{K_h^\alpha \cap G_\varepsilon} \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}[v_{\varepsilon\alpha}^{np}]\gamma_{ik}[v_{\varepsilon\alpha}^{qr}]dx +$$

$$+ \frac{1}{\lambda} \int\limits_{K_h^\alpha \cap \Omega_\varepsilon} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} a_{iklm}\gamma_{ik}[v_{\varepsilon\alpha}^{np}]\gamma_{lm}[v_{\varepsilon\alpha}^{qr}]dx +$$

$$+ h^{-2-\gamma} \int\limits_{K_h^z} (v_{\varepsilon\alpha}^{np} - \phi^{np}(x - x^\alpha)) \cdot (v_{\varepsilon\alpha}^{qr} - \phi^{qr}(x - x^\alpha))dx \tag{3.3}$$

— компоненты симметрического и положительно определенного тензора $\{\tilde{A}_{npqr}(x^\alpha, \varepsilon, h, \lambda, \gamma)\}$ в $\mathbb{R}^3$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть для любого $x \in \Omega$ выполнены следующие условия:*

1) $\lim\limits_{h\to 0} \limsup\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\tilde{A}_{npqr}(x,\varepsilon,h,\lambda,\gamma)}{h^3} = \lim\limits_{h\to 0} \liminf\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\tilde{A}_{npqr}(x,\varepsilon,h,\lambda,\gamma)}{h^3} = = \tilde{A}_{npqr}(x,\lambda)\ \forall x \in \Omega,\ 0 < \gamma < 2;$

2) $\rho_\varepsilon(x) \to \rho(x)$, $f_\varepsilon(x) \to f(x)$ *слабо в* $L_2(\Omega)$ *при* $\varepsilon \to 0$, *где* $\tilde{A}_{npqr}(x, \varepsilon, h, \lambda, \gamma)$, $\rho(x) \in L_\infty(\Omega)$, $f(x) \in L_2(\Omega)$.

Тогда последовательность решений $\{u_\varepsilon(x, \lambda)\}$ *задачи* (2.19) *сходится в* $L_2(\Omega)$ *к вектор-функции* $u(x, \lambda)$, *являющейся решением вариационной задачи* (2.21).

Доказательство. Поскольку решение $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x, \lambda)$ задачи (2.19) минимизирует функционал $\Phi_{\varepsilon\lambda}[u_\varepsilon]$ в классе $\overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)$, то $\Phi_{\varepsilon\lambda}[u_\varepsilon] \leq \Phi_{\varepsilon\lambda}[0] = 0$ и, значит, выполняется неравенство

$$\lambda\mu \int\limits_{G_\varepsilon} \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}^2[u_\varepsilon]dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \sum_{n,p,q,r=1}^{3} a_{npqr}\gamma_{np}[u_\varepsilon]\gamma_{qr}[u_\varepsilon]dx \leq C\|f\|_{L_2(\Omega)}\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Отсюда, используя неравенства Корна и Фридрихса, получаем

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L_2(\Omega)},$$

где C не зависит от ε.

Таким образом, последовательность функций $\{u_\varepsilon(x, \lambda), \varepsilon \to 0\}$ слабо компактна в $W_2^1(\Omega)$ и, значит, можно выделить подпоследовательность $\{u_\varepsilon, \varepsilon = \varepsilon_k \to 0\}$, слабо сходящуюся в $W_2^1(\Omega)$ и сильно в $L_2(\Omega)$ к некоторой функции $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Докажем, что $u(x, \lambda)$ является решением задачи (2.21).

Сначала кратко опишем схему доказательства.

Покроем область Ω кубами $K_h^\alpha = K(x^\alpha, h)$ с центрами в точках x^α и ребрами длины h, $h \gg \varepsilon > 0$. Центры кубов образуют периодическую решетку с периодом $h - r$, где $0 < r < h^{1+\gamma/2}$. Для произвольной вектор-функции $w \in \overset{\circ}{C}{}^2(\Omega)$ по этому покрытию строим вектор-функцию сравнения $w_{\varepsilon h}(x)$, принадлежащую классу $\overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)$ и, следовательно, удовлетворяющую неравенству $\Phi_{\lambda\varepsilon}[u_\varepsilon] \leq \Phi[w_{\varepsilon h}]$. Учитывая конструкцию $w_{\varepsilon h}(x, \lambda)$, доказываем, что $\lim\limits_{h\to 0} \limsup\limits_{\varepsilon \to 0} \Phi_{\lambda\varepsilon}[w_{\varepsilon h}] \leq \Phi_\lambda[w]$ и, следовательно, справедлива оценка сверху

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \Phi_{\lambda\varepsilon}[u_\varepsilon] \leq \Phi_\lambda[w]. \tag{3.4}$$

В силу плотности $C_0^2(\Omega)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ эта оценка выполняется для любого $w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

С другой стороны, полагая $w(x, \lambda) = u(x, \lambda)$, где $u(x, \lambda)$ — слабый предел $u_\varepsilon(x, \lambda)$ по подпоследовательности $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$, получаем также оценку снизу

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \Phi_{\lambda\varepsilon}[u_\varepsilon] \geq \Phi_\lambda[u]. \tag{3.5}$$

Из (3.4), (3.5) следует, что $\Phi_\lambda[u] \leq \Phi_\lambda[w]$ $\forall w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Значит, вектор-функция $u(x, \lambda)$ минимизирует функционал Φ_λ в классе $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, т. е. является решением задачи (2.21).

При реализации этой схемы нам необходимы следующие леммы.

Лемма 1. *Если выполняются условия* (3.1), *то для достаточно малых* ε *существует разбиение единицы* $\{\varphi_\varepsilon^\alpha(x)\}$, *удовлетворяющее условиям*:

1) $\sum_\alpha \varphi_\varepsilon^\alpha(x) \equiv 1,\ x \in \Omega;$

2) $\varphi_\varepsilon^\alpha = 1,\ x \in K_h^\alpha \setminus \bigcup_{\beta,\beta\neq\alpha} K_h^\beta,\ \varphi_\varepsilon^\alpha = 0,\ x \notin K_h^\alpha,\ 0 \le \varphi_\varepsilon^\alpha \le 1;$

3) $\varphi_\varepsilon^\alpha = C_{i\varepsilon}^\alpha = \mathrm{const},\ 0 \le C_{i\varepsilon}^\alpha \le 1,\ x \in G_\varepsilon^i;$

4) $\left|\dfrac{\partial \varphi_\varepsilon^\alpha}{\partial x_i}\right| \le Cr^{-1},\ i = 1,2,3,$ *и постоянная* C *не зависит от* ε.

Лемма 2. *Пусть* $K_{h_1}^\alpha = K(h_1, x^\alpha)$ — *куб с центром в точке* x^α *и стороной длины* $h_1 = h - 2r,\ r = o(h)$. *Если выполняется условие* 1 *теоремы* 2, *то для вектор-функции* $v_{\varepsilon\alpha}^{np}(x,\lambda)$ *существуют оценки*

$$\int\limits_{(K_h^\alpha \setminus K_{h_1}^\alpha)\bigcap G_\varepsilon} \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}^2[v_{\varepsilon\alpha}^{np}]dx = o(h^3),$$

$$\int\limits_{K_h^z \setminus K_{h_1}^z} |v_{\varepsilon\alpha}^{np} - \phi^{np}|^2 dx = o(h^{5+\gamma}),$$

где $v_{\varepsilon\alpha}^{np}$ — *минимизант задачи* (3.2) *в кубе* K_h^α *при* $R = R^{np}$.

Лемма 1 доказана в [6], а лемма 2 доказывается точно так же, как в [7], с учетом положительной определенности тензора упругости $\{a_{iklm}\}$.

Для получения оценки (3.4) построим вектор-функцию

$$w_{\varepsilon h}(x,\lambda) = \sum_\alpha \left\{ w(x^\alpha) + \sum_{n,p=1}^{3} (\gamma_{np}[w](x^\alpha) v_\varepsilon^{np} + g_\varepsilon^{np}) \right\} \varphi_\varepsilon^\alpha(x), \tag{3.6}$$

где $w(x)$ — произвольная вектор-функция класса $C_0^2(\Omega)$, а $g_\varepsilon^{np}(x)$ определена равенствами

$$g_\varepsilon^{np} = \omega^{np}[w](x^\alpha)\psi^{np}(x - x^\alpha), \quad \omega^{np}[w] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_n}{\partial x_p} - \frac{\partial w_p}{\partial x_n}\right), \tag{3.7}$$

$$\psi^{np}(x) = \frac{1}{2}(x_n e^p - x_p e^n).$$

Поскольку $\mathrm{div} g_\varepsilon^{np} = 0,\ \mathrm{div} v_{\varepsilon\alpha}^{np} = 0$ при $x \in G_\varepsilon \bigcap K_h^\alpha$, то в силу свойств функций $\varphi_\varepsilon^\alpha(x)$ (см. лемму 1) вектор-функция $w_{\varepsilon h}$ принадлежит классу $\overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)$, а так как $u_\varepsilon(x,\lambda)$ минимизирует функционал $\Phi_{\lambda\varepsilon}$ в этом классе, то

$$\Phi_{\lambda\varepsilon}[u_\varepsilon] \le \Phi_{\lambda\varepsilon}[w_{\varepsilon h}].$$

Оценим функционал в правой части этого неравенства. Поскольку $w(x) \in \in C_0^2(\Omega)$, в любом кубе K_h^α справедливо равенство

$$w(x) = w(x^\alpha) + \sum_{n,p=1}^{3} \gamma_{np}[w](x^\alpha)\phi^{np}(x - x^\alpha) + \sum_{n,p=1}^{3} \omega^{np}[w](x^\alpha)\psi^{np}(x - x^\alpha) + O(h^2).$$

Используя это равенство и учитывая (3.6), (3.7), записываем $w_{\varepsilon h}(x)$ в виде

$$w_{\varepsilon h}(x,\lambda) = w(x) + \sum_{\alpha} \left\{ \sum_{n,p=1}^{3} (\gamma_{np}[w](x^{\alpha})(v_{\varepsilon\alpha}^{np} - \phi^{np}) - \delta_h^{\alpha}(x)) \right\} \varphi_{\varepsilon}^{\alpha},$$

где

$$|\delta_h^{\alpha}| = O(h^2), \quad |D\delta_h^{\alpha}| = O(h).$$

Подставляя $w_{\varepsilon h}(x)$ в функционал $\Phi_{\lambda\varepsilon}$ (2.20), получаем

$$\Phi_{\varepsilon\lambda}[w_{\varepsilon h}] = \lambda \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} |w|^2 dx +$$

$$+ \frac{\mu}{2} \sum_{\alpha} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} \sum_{n,p,q,r=1}^{3} \gamma_{np}[w](x^{\alpha}) \gamma_{qr}[w](x^{\alpha}) \int_{K_h^{\alpha} \bigcap G_{\varepsilon}} \gamma_{ik}[v_{\varepsilon}^{np}] \gamma_{ik}[v_{\varepsilon}^{qr}] dx +$$

$$+ \frac{1}{\lambda} \sum_{\alpha} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} \sum_{n,p,q,r=1}^{3} \gamma_{np}[w](x^{\alpha}) \gamma_{qr}[w](x^{\alpha}) \int_{K_h^{\alpha} \bigcap \Omega_{\varepsilon}} a_{npqr} \gamma_{np}[v_{\varepsilon}^{ik}] \gamma_{qr}[v_{\varepsilon}^{lm}] dx +$$

$$+2 \int_{\Omega} f_{\varepsilon} \cdot w dx + E(\varepsilon, h, r).$$

Здесь остаточный член $E(\varepsilon, s, h)$ мал, а именно, $\lim\limits_{h\to 0} \limsup\limits_{\varepsilon\to 0} E(\varepsilon, h, r) = 0$. Чтобы убедиться в этом, следует учесть, что $w(x) \in C_0^2(\Omega)$, кубы K_h^{α} пересекаются по слоям толщиной $h^{1+\gamma/2}$, $\gamma < 2$, с конечной кратностью, и использовать лемму 2.

Отсюда, учитывая определение тензора $\{\tilde{A}_{npqr}(x,\lambda,\varepsilon,h,\gamma)\}$ (см. (3.3)) и условия 2 и 3 теоремы 2, получаем

$$\lim_{h\to 0} \limsup_{\varepsilon\to 0} \Phi_{\varepsilon\lambda}[w_{\varepsilon h}] = \lambda \int_{\Omega} \rho |w|^2 dx +$$

$$+ \lim_{h\to 0} \limsup_{\varepsilon\to 0} \sum_{\alpha} \sum_{n,p,q,r=1}^{3} \gamma_{np}[w](x^{\alpha}) \gamma_{qr}[w](x^{\alpha}) \tilde{A}_{npqr}(x^{\alpha}, \lambda, \varepsilon, h, \gamma) +$$

$$+2 \int_{\Omega} f \cdot w dx.$$

Используя условие 1 теоремы 2, приходим к неравенству (3.4).

Теперь докажем оценку снизу. Пусть $\{u_{\varepsilon}(x,\lambda)\}$ — последовательность решений задачи (2.20), а $u(x,\lambda)$ — предел подпоследовательности $\{u_{\varepsilon}, \varepsilon = \varepsilon_k \to 0\}$ в $L_2(\Omega)$. Предположим сначала, что $u(x,\lambda) \in C_0^2(\Omega)$. В каждом кубе K_h^{α} построим вектор-функцию

$$u_{\varepsilon}^{\alpha}(x,\lambda) = u_{\varepsilon}(x,\lambda) - \left(u(x^{\alpha},\lambda) - \sum_{n,p=1}^{3} g_{\varepsilon}^{np}(x) \right), \tag{3.8}$$

где g_{ε}^{np} задана равенствами (3.7) только с заменой $w(x)$ на $u(x)$.

Нетрудно убедиться, что u_ε^α принадлежит классу $\overset{\circ}{J}_\varepsilon(K_h^\alpha)$ и, следовательно, согласно определению тензора $\{\tilde{A}_{npqr}(x,\lambda,\varepsilon,h,\gamma)\}$

$$E_{x^\alpha,h,\lambda}^{\varepsilon\gamma}[u_\varepsilon^\alpha, R] \geq \sum_{n,p,q,r=1}^{3} \tilde{A}_{npqr}(x^\alpha,\lambda,\varepsilon,h,\gamma) R_{np} R_{qr}.$$

Выберем здесь $R_{np} = \gamma_{np}[u](x^\alpha)$. Поскольку $\gamma_{np}[g_\varepsilon^{np}] = 0$ и, следовательно, $\gamma_{np}[u_\varepsilon^\alpha] = \gamma_{np}[u_\varepsilon]$, имеем

$$\frac{\mu}{2} \int\limits_{K_h^\alpha \bigcap G_\varepsilon} \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}^2[u_\varepsilon] dx + \frac{1}{\lambda} \int\limits_{K_h^\alpha \bigcap \Omega_\varepsilon} \sum_{n,p,q,r=1}^{3} a_{npqr} \gamma_{np}[u_\varepsilon] \gamma_{qr}[u_\varepsilon] dx +$$

$$+ \int\limits_{K_h^\alpha} \left| u_\varepsilon^\alpha - \sum_{n,p=1}^{3} \gamma_{np}[u](x^\alpha) \phi^{np}(x - x^\alpha) \right|^2 dx \geq$$

$$\geq \sum_{n,p,q,r=1}^{3} \tilde{A}_{npqr}(x^\alpha,\lambda,\varepsilon,h,\gamma) \gamma_{np}[u](x^\alpha) \gamma_{qr}[u](x^\alpha). \tag{3.9}$$

Рассмотрим последнее слагаемое в левой части неравенства. Используя определения вектор-функций u_ε^α и $g_\varepsilon^{np}(x)$, получаем

$$\int\limits_{K_h^\alpha} \left| u_\varepsilon^\alpha - \sum_{n,p=1}^{3} \gamma_{np}[u](x^\alpha) \phi^{np}(x - x^\alpha) \right|^2 dx \leq \int\limits_{K_h^\alpha \bigcap \Omega} |u_\varepsilon - u|^2 dx + \int\limits_{K_h^\alpha \bigcap \Omega} |\delta_h^\alpha|^2 dx.$$

Поскольку $u_\varepsilon \to u$ в $L_2(\Omega)$, с учетом оценок для δ_h^α имеем

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon_k \to 0} \int\limits_{K_h^\alpha} \left| u_\varepsilon^\alpha - \sum_{n,p=1}^{3} \gamma_{np}[u](x^\alpha) \phi^{np}(x - x^\alpha) \right|^2 dx = O(h^7).$$

Тогда согласно (3.4) и (3.9)

$$\Phi_{\varepsilon\lambda}[u_\varepsilon] \geq \int\limits_{\Omega} \rho_\varepsilon |u_\varepsilon|^2 dx + \sum_{\alpha} \sum_{n,p,q,r=1}^{3} \tilde{A}_{npqr}(x^\alpha,\lambda,\varepsilon,h,\gamma) \gamma_{np}[u](x^\alpha) \gamma_{qr}[u](x^\alpha) +$$

$$+2 \int\limits_{\Omega} f_\varepsilon \cdot u_\varepsilon dx + E_1(\varepsilon, h).$$

Учитывая гладкость $u(x)$ и сходимость $u_\varepsilon(x)$ к $u(x)$ в $L_2(\Omega)$, получаем оценку снизу (3.5). Мы доказали эту оценку в предположении, что $u(x,\lambda) \in C_0^2(\Omega)$.

Для завершения доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $w(x)$ *— произвольная функция из* $W_2^1(\Omega)$. *Если выполнено условие теоремы* 2, *то существует последовательность вектор-функций* $\{w_\varepsilon(x) \in \overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega), \varepsilon = \varepsilon_k \to 0\}$ *такая, что*:

1) $w_\varepsilon(x)$ *сходится к* $w(x)$ *слабо в* $W_2^1(\Omega)$ *и сильно в* $L_2(\Omega)$;

2) $\|w_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \|w\|_{L_2(\Omega)}$, *где* C *— постоянная, не зависящая от* ε *и* $w(x)$.

Доказательство этой леммы следует из оценки (3.4) при подходящем выборе $h = h(\varepsilon)$ (см., например, лемму 5.1 в [7, с. 406]).

Поскольку слабый предел решений задачи (3.4) $u(x,\lambda) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, существуют такие вектор-функции $u_\delta(x,\lambda) \in C_0^2(\Omega)$, что

$$\|u - u_\delta\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \delta. \tag{3.10}$$

Определим вектор-функцию $w_\delta(x,\lambda) = u_\delta(x,\lambda) - u(x,\lambda)$, и по ней построим вектор-функцию $w_{\delta\varepsilon}(x,\lambda)$ согласно лемме 3. Тогда $w_{\delta\varepsilon}(x,\lambda)$ сходится к вектор-функции $w_\delta(x,\lambda)$ слабо в $W_2^1(\Omega)$ и сильно в $L_2(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$ и

$$\|w_{\delta\varepsilon}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C\|w_\delta\|_{W_2^1(\Omega)} = \|u - u_\delta\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Пусть $u_{\delta\varepsilon}(x,\lambda) = u_\varepsilon(x,\lambda) + w_{\delta\varepsilon}(x,\lambda)$. Ясно, что $u_{\delta\varepsilon}(x,\lambda) \in \overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)$, $u_{\delta\varepsilon}$ сходится к u_δ слабо в $W_2^1(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$ и справедлива оценка

$$\|u_{\delta\varepsilon} - u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \delta. \tag{3.11}$$

Для функций $u_{\delta\varepsilon}$ и u_δ неравенство (3.5) доказано. Переходя в нем к пределу по $\delta \to 0$ и учитывая (3.10), (3.11), приходим к неравенству (3.5).

Таким образом мы доказали, что предельная (по подпоследовательности) вектор-функция $u(x,\lambda)$ является решением вариационной задачи (3.4). Поскольку, в силу положительной определенности тензора $\{\tilde{A}_{npqr}(x,\lambda)\}$, эта задача имеет единственное решение, $u(x,\lambda)$ является решением по любой подпоследовательности.

Теорема 2 доказана.

4. Локально-периодическая структура среды. В этом пункте мы предполагаем, что структура области локально близка к периодической. А именно, расположение каверн такое, как описано в п. 2. Покажем, что в этом случае условие 1 теоремы 2 выполняется, причем предельный тензор описывается формулой (2.6), где (v^{np}, u^{np}) — решение задачи (2.1)–(2.5).

Построим концентрические с Π_ε^ν параллелепипеды

$$\Pi_\varepsilon^{\pm\nu} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \colon |x_i - x_i^\nu| \leq (\theta_i\varepsilon)\frac{1 \pm h^\sigma}{2}, i = 1,2,3 \right\},$$

где $0 < \sigma < \gamma/4$, $\varepsilon \ll h \ll 1$, и свяжем с ними разбиение единицы $\{\varphi_\varepsilon^{\nu h}(x)\}$, удовлетворяющее таким условиям: $\varphi_\varepsilon^{\nu h}(x) = 1$ при $x \in \Pi_\varepsilon^{-\nu}$, $\varphi_\varepsilon^{\nu h}(x) = 0$ при $x \notin \Pi_\varepsilon^{+\nu}$, $\sum_\nu \varphi_\varepsilon^{\nu h} = 1$, $|D^k \varphi_\varepsilon^{\nu h}(x)| \leq \dfrac{C}{\varepsilon^{|k|} h^{\sigma|k|}}$, $|k| = 0,1$.

Будем предполагать, что множества G_ε^ν не пересекаются с границей ∂K_h^α и принадлежат кубу K_h^α вместе с соответствующими параллелепипедами Π_ε^ν.

Рассмотрим ячеечную задачу (2.1)–(2.5) при $y = x^\nu$. Введем вектор-функцию $\hat{u}^{np}(x,y)$ такую, что $\hat{u}^{np}(x,y) = \tilde{w}^{np}(x)$ при $x \in \Pi \setminus G^y$ и $\hat{u}^{np}(x,y) = \tilde{v}^{np}(x)$ при $x \in G^y$. Для функции $\hat{u}^{np}(x,y)$ можно получить оценку

$$|D_y D_x^k \hat{u}^{np}(x,y)| < C, \quad x \in \Pi^{+\delta} \setminus \Pi^{-\delta}, \quad |k| = 0,1, \tag{4.1}$$

где $\Pi^{\pm\delta} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : |x_i| < \theta_i \dfrac{1 \pm \delta}{2}, i = 1,2,3 \right\}$, а C не зависит от $y \in \Omega$.

Будем искать минимизант $v^{np}_{\varepsilon\alpha}(x)$ в задаче (3.2) при $R = R^{np}$ в виде

$$v^{np}_{\varepsilon\alpha}(x) = V^{np}_{\varepsilon}(x, x^{\alpha}) + \zeta_{\varepsilon\alpha}(x), \tag{4.2}$$

где $V^{np}_{\varepsilon}(x,y) = \phi^{np}(x-y) + \varepsilon \sum_{\nu} \left(\hat{u}^{np}\left(\dfrac{x-x^{\nu}}{\varepsilon}\right) - \phi^{np}\left(\dfrac{x-x^{\nu}}{\varepsilon}\right)\right) \varphi^{\nu h}_{\varepsilon}(x)$.

Вектор-функция $\zeta_{\varepsilon\alpha}(x)$ должна минимизировать в классе $\overset{\circ}{J}_{\varepsilon}(K^{\alpha}_{h})$ функционал

$$\tilde{\Phi}_{\varepsilon\lambda}[\zeta_{\varepsilon\alpha}] = \frac{\mu}{2} \int\limits_{K^{\alpha}_{h} \bigcap G_{\varepsilon}} \sum_{i,k=1}^{3} \gamma^{2}_{ik}[\zeta_{\varepsilon\alpha}] dx +$$

$$+ \frac{1}{\lambda} \int\limits_{K^{\alpha}_{h} \bigcap \Omega_{\varepsilon}} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} a_{iklm} \gamma_{ik}[\zeta_{\varepsilon\alpha}] \gamma_{lm}[\zeta_{\varepsilon\alpha}] dx + h^{-2-\gamma} \int\limits_{K^{\alpha}_{h}} |\delta_{\varepsilon\alpha}|^{2} dx +$$

$$+ \frac{2}{\lambda} \int\limits_{K^{\alpha}_{h} \bigcap \Omega_{\varepsilon}} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} a_{iklm} \gamma_{ik}[V^{np}_{\varepsilon}] \gamma_{lm}[\zeta_{\varepsilon\alpha}] dx + \mu \int\limits_{K^{\alpha}_{h} \bigcap G_{\varepsilon}} \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}[\zeta_{\varepsilon\alpha}] \gamma_{ik}[V^{np}_{\varepsilon}] dx +$$

$$+ h^{-2-\gamma} \int\limits_{K^{\alpha}_{h}} (\zeta_{\varepsilon\alpha}, V^{np}_{\varepsilon} - \phi^{np}) dx.$$

Представим функционал $\Phi_{\varepsilon\lambda}[\zeta_{\varepsilon\alpha}]$ в виде

$$\Phi_{\varepsilon\lambda}[\zeta_{\varepsilon\alpha}] = \|\zeta_{\varepsilon\alpha}\|^{2}_{h} - 2 \int\limits_{K^{\alpha}_{h}} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{iklm} \gamma_{lm}[V^{np}_{\varepsilon}]) e^{k} \zeta_{\varepsilon\alpha} dx +$$

$$+ 2 \int\limits_{\partial K^{\alpha}_{h}} (T_s[V^{np}_{\varepsilon}], \zeta_{\varepsilon\alpha}) d\Gamma + 2h^{-2-\gamma} \int\limits_{K^{\alpha}_{h}} (\zeta_{\varepsilon\alpha}, V^{np}_{\varepsilon} - \phi^{np}) dx, \tag{4.3}$$

где

$$\|\zeta_{\varepsilon\alpha}\|^{2}_{h} = \frac{\mu}{2} \int\limits_{K^{\alpha}_{h} \bigcap G_{\varepsilon}} \sum_{i,k=1}^{3} \gamma^{2}_{ik}[\zeta_{\varepsilon\alpha}] dx +$$

$$+ \frac{1}{\lambda} \int\limits_{K^{\alpha}_{h} \bigcap \Omega_{\varepsilon}} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} a_{iklm} \gamma_{ik}[\zeta_{\varepsilon\alpha}] \gamma_{lm}[\zeta_{\varepsilon\alpha}] dx + h^{-2-\gamma} \int\limits_{K^{\alpha}_{h}} |\zeta_{\varepsilon\alpha}|^{2} dx,$$

а $T_s[u]$ определено равенством (1.6).

Поскольку $\Phi_{\varepsilon\lambda}[\zeta_{\varepsilon\alpha}] \leq \Phi_{\varepsilon\lambda}[0] = 0$, то

$$\|\zeta_{\varepsilon\alpha}\|^{2}_{h} \leq 2 \left| \int\limits_{\partial K^{\alpha}_{h}} (T_s[V^{np}_{\varepsilon}], \zeta_{\varepsilon\alpha}) d\Gamma \right| + 2 \left| h^{-2-\gamma} \int\limits_{K^{\alpha}_{h}} (\zeta_{\varepsilon\alpha}, V^{np}_{\varepsilon} - \phi^{np}) dx \right| +$$

$$+2\left|\int\limits_{K_h^\alpha}\sum_{i,k,l,m=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{iklm}\gamma_{lm}[V_\varepsilon^{np}])e^k\zeta_{\varepsilon\alpha}dx\right| = I_1 + I_2 + I_3. \qquad (4.4)$$

С помощью оценки (4.1), учитывая свойства разбиения единицы, при $x \in \in \Pi_\nu^{+\varepsilon}\bigcap\Pi_\mu^{+\varepsilon}$ имеем

$$\left\|\sum_{i,k,l,m=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{iklm}\gamma_{lm}[V_\varepsilon^{np}])e^k\right\|_{L_2(K_h^\alpha\bigcap\Omega_\varepsilon)} \le Ch^{\frac{3-3\sigma}{2}},$$

и, значит,

$$I_3 \le Ch^{\frac{5+\gamma-3\sigma}{2}}\|\zeta_{\varepsilon\alpha}\|_h. \qquad (4.5)$$

Учитывая определение вектор-функции V_ε^{np}, получаем оценку для I_2:

$$I_2 \le 2h^{-2-\gamma}\|V_\varepsilon^{np} - \phi^{np}\|_{L_2(K_h^\alpha)}\|\zeta_{\varepsilon\alpha}\|_h \le C_1\varepsilon h^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}\|\zeta_{\varepsilon\alpha}\|_h. \qquad (4.6)$$

Далее, оценивая I_1 с помощью неравенства Шварца, записываем $I_1 \le \le \|T_s[V_\varepsilon^{np}]\|_{L_2(\partial K_h^\alpha)}\|\zeta_{\varepsilon\alpha}\|_{L_2(\partial K_h^\alpha)}$. Нетрудно убедиться, что $\|T_s[V_\varepsilon^{np}]\|_{L_2(\partial K_h^\alpha)} \le \le C_2 h$ и, значит,

$$I_1 \le C_2 h\|\zeta_{\varepsilon\alpha}\|_{L_2(\partial K_h^\alpha)}. \qquad (4.7)$$

Для оценки поверхностного интеграла $\|\zeta_{\varepsilon\alpha}\|_{L_2(\partial K_h^\alpha)}$ воспользуемся следующей леммой [7].

Лемма 4. *Пусть K — куб в $\mathbb{R}^n$ со стороной h, а $w(x)$ — произвольная функция из $W_2^1(K)$. Тогда выполняется неравенство*

$$\int\limits_{\partial K}|w|^2 d\Gamma \le 2n\left[\kappa\int\limits_K|\nabla w|^2dx + \left(\frac{4}{\kappa}+\frac{1}{h}\right)\int\limits_K|w|^2dx\right],$$

где ∂K — граница куба, κ — любое положительное число.

Согласно этой лемме

$$\|\zeta_{\varepsilon\alpha}\|^2_{L_2(\partial K_h^\alpha)} \le 6\left[\kappa\int\limits_{K_h^\alpha}|\nabla\zeta_{\varepsilon\alpha}|^2dx + \left(\frac{4}{\kappa}+\frac{1}{h}\right)\int\limits_{K_h^\alpha}|\zeta_{\varepsilon\alpha}|^2dx\right].$$

Полагая $\kappa = h^{1+\gamma/2}$, находим

$$\|\zeta_{\varepsilon\alpha}\|_{L_2(\partial K_h^\alpha)} \le C_3 h^{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{4}}\|\|\zeta_{\varepsilon\alpha}\|_h. \qquad (4.8)$$

Из (4.4) с помощью (4.5) – (4.8) получаем

$$\|\zeta_{\varepsilon\alpha}\|_h^2 \le C(I_1+I_2+I_3) \le Ch^{3+\gamma/2}. \qquad (4.9)$$

Таким образом, функция $V_\varepsilon^{np}(x,y)$ при достаточно малых ε и h аппроксимирует решение задачи (3.2). Подставив $v_{\varepsilon\alpha}^{np}(x)$ в формулу (3.3) для тензора $\{\tilde{A}_{npqr}(y,\varepsilon,h,\lambda,\gamma)\}$ и выделив главные слагаемые, квадратичные относительно $\gamma_{ik}[V_\varepsilon^{np}]$, а остальные оценив с учетом леммы 2 и (4.9), получим

$$\lim_{h\to 0}\liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{\tilde{A}_{npqr}(y,\varepsilon,h,\lambda,\gamma)}{h^3}=\lim_{h\to 0}\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\tilde{A}_{npqr}(y,\varepsilon,h,\lambda,\gamma)}{h^3}=$$

$$=\frac{\mu}{2}\int\limits_{F^y}\sum_{i,k=1}^{3}\gamma_{ik}[\tilde{v}^{np}]\gamma_{ik}[\tilde{v}^{qr}]dx+\frac{1}{\lambda}\int\limits_{\Pi\setminus F^y}\sum_{i,k,l,m=1}^{3}a_{iklm}\gamma_{ik}[\tilde{w}^{np}]\gamma_{lm}[\tilde{w}^{qr}]dx,$$

откуда и следует формула (2.6).

5. Существование и аналитичность решения задач (2.13) – (2.17) и (2.1) – (2.3).

5.1. Рассмотрим сначала задачу (2.13) – (2.17). Введем $\overset{\circ}{H}_\varepsilon$ — гильбертово пространство комплекснозначных вектор-функций из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, соленоидальных в областях $G_\varepsilon^i,\ i=1,2,\ldots,N(\varepsilon)$, с нормой

$$\|u\|^2=\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}dx+\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^{3}u_i\bar{u}_i dx.$$

Нетрудно убедиться, что вектор-функция $u_\varepsilon(x)$, определенная равенствами $u_\varepsilon=\tilde{w}_\varepsilon$ при $x\in\Omega_\varepsilon$ и $u_\varepsilon=\tilde{v}_\varepsilon$ при $x\in G_\varepsilon$, где $\{\tilde{w}_\varepsilon,\tilde{v}_\varepsilon\}$ — решение задачи (2.13) – (2.18), удовлетворяет равенству

$$\mathcal{A}_{\varepsilon,\lambda}[u_\varepsilon,v_\varepsilon]=\mathcal{F}_\varepsilon[v_\varepsilon]\quad\forall v_\varepsilon\in\overset{\circ}{H}_\varepsilon. \tag{5.1}$$

Здесь $\mathcal{A}_{\varepsilon,\lambda}[u_\varepsilon,v_\varepsilon]$ — полуторалинейная форма

$$\mathcal{A}_{\varepsilon,\lambda}[u_\varepsilon,v_\varepsilon]=\lambda\int\limits_\Omega\rho_\varepsilon u_\varepsilon\cdot\bar{v}_\varepsilon dx+\frac{\mu}{2}\int\limits_{G_\varepsilon}\sum_{i,k=1}^{3}\gamma_{ik}[u_\varepsilon]\gamma_{ik}[\bar{v}_\varepsilon]dx+$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\sum_{i,k,l,m=1}^{3}a_{iklm}\gamma_{ik}[u_\varepsilon]\gamma_{lm}[\bar{v}_\varepsilon]dx, \tag{5.2}$$

а $\mathcal{F}_\varepsilon[v_\varepsilon]$ — антилинейный функционал

$$\mathcal{F}_\varepsilon[v_\varepsilon]=\int\limits_\Omega f_\varepsilon\cdot\bar{v}_\varepsilon dx. \tag{5.3}$$

Функция ρ_ε и вектор-функция f_ε введены в (2.20).

Назовем слабым решением задачи (2.13) – (2.18) вектор-функцию из $\overset{\circ}{H}_\varepsilon$, которая удовлетворяет тождеству (5.1).

Форма $\mathcal{A}_{\varepsilon,\lambda}[u_\varepsilon,v_\varepsilon]$ ограничена в пространстве $\overset{\circ}{H}_\varepsilon$, т. е.

$$|\mathcal{A}_{\varepsilon\lambda}[u_\varepsilon,v_\varepsilon]|\le C\|u_\varepsilon\|\|v_\varepsilon\|,$$

где постоянная $C>0$ зависит от $\lambda,\ \mathrm{Re}\lambda>0,\ \rho_\varepsilon,\ \mu$ и $\{a_{iklm}\}$.

Рассмотрим $\mathcal{A}_{\varepsilon\lambda}[u_\varepsilon,u_\varepsilon]$. Легко видеть, что выполняется неравенство

$$|\mathcal{A}_{\varepsilon\lambda}[u_\varepsilon,u_\varepsilon]|\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{Re}\lambda\int\limits_\Omega\rho_\varepsilon|u_\varepsilon|^2dx+\frac{\mu}{2}\int\limits_{G_\varepsilon}\sum_{i,k=1}^{3}|\gamma_{ik}[u_\varepsilon]|^2dx+\right.$$

$$+\frac{\mathrm{Re}\lambda}{|\lambda|^2}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\sum_{i,k,l,m=1}^{3}a_{iklm}\gamma_{ik}[u_\varepsilon]\gamma_{lm}[\bar{u}_\varepsilon]dx\Bigg). \tag{5.4}$$

Отсюда, учитывая положительную определенность тензора $\{a_{iklm}\}$ и применяя неравенство Корна [8], получаем

$$|\mathcal{A}_{\varepsilon\lambda}[u_\varepsilon,u_\varepsilon]|\geq C\|u_\varepsilon\|^2.$$

Здесь постоянная $C>0$ не зависит от u_ε.

Таким образом, форма $\mathcal{A}_{\varepsilon,\lambda}[u_\varepsilon,v_\varepsilon]$ ограничена и коэрцитивна, а функционал $\mathcal{F}_\varepsilon[v_\varepsilon]$, очевидно, ограничен в $\overset{\circ}{H}_\varepsilon$. Следовательно, согласно теореме Лакса – Мильграма [1] задача (5.1) имеет единственное решение при любом λ, $\mathrm{Re}\,\lambda>0$. Поскольку форма $\mathcal{A}_{\varepsilon,\lambda}[u_\varepsilon,v_\varepsilon]$ аналитически зависит от λ, то и решение u_ε задачи (5.1) будет аналитично по λ в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ (см. [9]).

Отметим еще, что из (5.1) – (5.4) следуют оценки

$$\|u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}\leq\frac{C_1}{\mathrm{Re}\,\lambda}, \tag{5.5}$$

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}\leq\frac{C|\lambda|}{\mathrm{Re}\,|\lambda|}. \tag{5.6}$$

5.2. Рассмотрим теперь задачу (2.1) – (2.5) при $\mathrm{Re}\,\lambda>0$. Пусть $\varphi(x)$ — гладкая функция на Π такая, что $\varphi(x)\equiv0$ на Π^- и $\varphi(x)\equiv1$ на $\Pi^+\setminus\Pi$. Здесь $\Pi^\pm$ — растянутые в $\dfrac{1}{\varepsilon}$ раз параллелепипеды $\Pi_\varepsilon^{\pm\nu}$ с центром $x^\nu=y$.

Положим $u^{np}=\tilde{v}^{np}\chi_{G^y}+(\tilde{w}^{np}-\phi^{np}(x)\varphi(x))(1-\chi^{np})$, где $\{\tilde{v}^{np},\tilde{w}^{np}\}$ — решение задачи (2.1) – (2.5). Тогда $u^{np}(x)$ является решением задачи

$$\lambda\mu\Delta u^{np}(x)=\nabla p^{np},\quad \mathrm{div}u^{np}(x)=0,\quad x\in G^y, \tag{5.7}$$

$$\sum_{i,k,l,m=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{iklm}\gamma_{lm}[u^{np}]\right)e^k=\sum_{i,k,l,m=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{iklm}\gamma_{lm}[\phi^{np}\varphi]\right)e^k,\quad x\in\Pi\setminus G^y, \tag{5.8}$$

$$u^{np+}=u^{np-},\quad x\in\partial G^y, \tag{5.9}$$

$$\mu\sum_{i,k=1}^{3}\{\gamma_{ik}[u^{np}]\}^-\nu_ie^k-p^-\nu=\frac{1}{\lambda}\sum_{i,k,l,m=1}^{3}a_{iklm}\{\gamma_{lm}[u^{np}]\}^+\nu_ie^k,\quad x\in\partial G^y, \tag{5.10}$$

$$u^{np}\in H^1_{\mathrm{per}}(\Pi), \tag{5.11}$$

где знаками $\pm$ обозначены пределы значений функций на границе раздела ∂G^y: знак – соответствует области G^y, а + — области $\Pi\setminus G^y$.

Дополним задачу (5.7) – (5.11) условием

$$\int\limits_{\Pi}u^{np}dx=0 \tag{5.12}$$

и обозначим через $\hat{H}^1_{\rm per}(\Pi)$ множество вектор-функций из $H^1_{\rm per}(\Pi)$, соленоидальных в G^y и удовлетворяющих условию (5.12).

Назовем слабым решением задачи (5.7) – (5.12) вектор-функцию из $\hat{H}^1_{\rm per}(\Pi)$, удовлетворяющую тождеству

$$\mathcal{A}[u,v]=\langle g,v\rangle \quad \forall v\in \hat{H}^1_{\rm per}(\Pi), \tag{5.13}$$

где

$$\mathcal{A}[u,v]=\frac{\mu}{2}\int\limits_{G^y}\sum_{i,k=1}^{3}\gamma_{ik}[u]\gamma_{ik}[\bar v]dx+\frac{1}{\lambda}\int\limits_{\Pi\setminus G^y}\sum_{i,k,l,m=1}^{3}a_{iklm}\gamma_{ik}[uw]\gamma_{lm}[\bar v]dx \tag{5.14}$$

— полуторалинейная форма,

$$\langle g,v\rangle=\int\limits_{\Pi\setminus G^y}\sum_{i,k,l,m=1}^{3}a_{iklm}\gamma_{ik}[\phi^{np}\varphi]\gamma_{lm}[\bar v]dx \tag{5.15}$$

— антилинейный функционал в пространстве $\hat{H}^1_{\rm per}(\Pi)$.

Как и в предыдущем случае, устанавливаем, что форма $\mathcal{A}[w,v]$ ограничена и коэрцитивна при $\mathrm{Re}\,\lambda>0$, а функционал $\langle g,v\rangle$ ограничен в $\hat{H}^1_{\rm per}(\Pi)$. При этом используется неравенство Корна для Π-периодических вектор-функций, удовлетворяющих (5.12) [8]. В силу теоремы Лакса – Мильграма существует единственное решение $u^{np}(x,\lambda)$ задачи (5.13), которое аналитично при $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ [9].

Установим теперь оценку для $u^{np}(x,\lambda)$. Полагая в (5.13) $u=v=u^{np}$ и учитывая (5.14), (5.15), получаем

$$\frac{\mu}{2}\int\limits_{G^y}\sum_{i,k=1}^{3}|\gamma_{ik}[u^{np}]|^2dx+\frac{\mathrm{Re}\lambda+|\mathrm{Im}\lambda|}{|\lambda|^2}\int\limits_{\Pi\setminus G^y}\sum_{i,k,l,m=1}^{3}a_{iklm}\gamma_{ik}[u^{np}]\gamma_{lm}[\bar u^{np}]dx\le$$

$$\le\frac{2}{|\lambda|}\left(\int\limits_{\Pi\setminus G^y}\sum_{i,k,l,m=1}^{3}a_{iklm}\gamma_{ik}[\phi^{pq}\varphi]\gamma_{lm}[\phi^{pq}\varphi]dx\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\Pi\setminus G^y}\sum_{i,k,l,m=1}^{3}a_{iklm}\gamma_{ik}[u^{np}]\gamma_{lm}[\bar u^{np}]dx\right)^{1/2}.$$

Отсюда следуют оценки

$$\int\limits_{G^y}\sum_{i,k=1}^{3}|\gamma_{ik}[u^{np}]|^2dx\le C\frac{1}{|\lambda|}, \tag{5.16}$$

$$\int\limits_{\Pi\setminus G^y}\sum_{i,k,l,m=1}^{3}a_{iklm}\gamma_{ik}[u^{np}]\gamma_{lm}[\bar u^{np}]dx\le C. \tag{5.17}$$

Решение $\{\tilde{w}^{np}, \tilde{v}^{np}\}$ задачи (2.1)–(2.5), определенное равенствами $\tilde{w}^{np} = u^{np}(1-\chi_{G^y}) + \phi^{np}\varphi$, $\tilde{v}^{np} = u^{np}\chi_{G^y}$, имеет соответствующие аналитические свойства и оценки. Поэтому из (2.6) следует, что тензор $\{\tilde{A}_{npqr}(x,\lambda)\}$ положительно определен при $\lambda > 0$, аналитичен по λ при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и имеет место оценка (2.7). Кроме того, он обладает симметриями $\tilde{A}_{iklm} = \tilde{A}_{kilm} = \tilde{A}_{lmik} = \tilde{A}_{ikml}$ и $\overline{\tilde{A}_{iklm}[\lambda]} = \tilde{A}_{iklm}[\bar{\lambda}]$.

6. Доказательство основной теоремы. Как было показано в п. 4, для локально периодической структуры выполняется условие 1 теоремы 2 и предельный тензор $\{\tilde{A}_{npqr}(x,\lambda)\}$ определяется формулой (2.6). Нетрудно убедиться, что выполняются также условия 2 теоремы 2 и при этом предельная плотность среды определяется равенством $\rho(x) = \rho_f \dfrac{|G^x|}{|\Pi|} + \rho_s \dfrac{\Pi \setminus |G^x|}{|\Pi|}$, а предельная плотность начального импульса — равенством $f(x) = \rho(x)U(x)$, где $U(x) = \dfrac{\rho_f}{\rho}\dfrac{|G^x|}{|\Pi|}V^1 + \dfrac{\rho_s}{\rho}\dfrac{\Pi\setminus|G^x|}{|\Pi|}U^1$. Поэтому согласно теореме 2 решение вариационной задачи (2.19), (2.20) (т. е. решение краевой задачи (2.13)–(2.18) при $\lambda > 0$) сходится слабо в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и, значит, сильно в $L_2(\Omega)$, к вектор-функции $w(x,\lambda) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, которая является решением вариационной задачи (2.21), (2.22). Следовательно, $w(x,\lambda)$ удовлетворяет тождеству

$$\lambda \int\limits_\Omega \rho w \cdot \zeta dx + \int\limits_\Omega \sum_{n,p,q,r}^{3} \tilde{A}_{npqr}(x,\lambda)\gamma_{np}[w]\gamma_{qr}[\zeta] dx = \int\limits_\Omega \rho U \cdot \zeta dx. \tag{6.1}$$

Если вектор-функцию $\zeta(x)$ выбрать достаточно гладкой (например, $\zeta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap \cap W_2^2(\Omega)$), то тождество (6.1) можно преобразовать к виду

$$\lambda \int\limits_\Omega \rho w(x,\lambda)\cdot\zeta(x)dx - \int\limits_\Omega w(x,\lambda)\cdot \sum_{n,p,q,r}^{3} \frac{\partial}{\partial x_n}(\tilde{A}_{npqr}(x,\lambda)\gamma_{qr}[\zeta])e^p dx =$$

$$= \int\limits_\Omega \rho U(x)\cdot\zeta(x)dx. \tag{6.2}$$

Поскольку решение $u_\varepsilon(x,\lambda) = \{\tilde{w}_\varepsilon(x), \tilde{v}_\varepsilon(x)\}$ задачи (2.13)–(2.18) аналитично по λ, $\mathrm{Re}\lambda > 0$, и выполняются оценки (5.5), (5.6), из теоремы Витали следует, что $u_\varepsilon(x,\lambda)$ сходится и при комплексных λ, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, к аналитической функции $w(x,\lambda)$, которая при $\lambda > 0$ совпадает с решением задачи (2.21), (2.22). При этом сходимость имеет место в метрике $L_2(\Omega)$ и в слабой топологии $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ равномерно по λ на каждом компактном множестве из полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Следовательно, $w(x,\lambda) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ $(\forall\lambda,\ \mathrm{Re}\lambda > 0)$ и, так как тензор $\{\tilde{A}_{npqr}(x,\lambda)\}$ аналитичен по λ $(\mathrm{Re}\lambda > 0)$, $w(x,\lambda)$ удовлетворяет тождествам (6.1), (6.2) и при комплексном λ. Кроме того, для $w(x,\lambda)$ выполняются оценки вида (5.5), (5.6).

Рассмотрим вектор-функцию

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{w(x,\lambda)}{\lambda} e^{\lambda t} d\lambda. \tag{6.3}$$

В силу аналитичности $w(x,\lambda)$ и оценки (5.5) этот интеграл сходится в смысле $L_2(\mathbb{R}; L_2(\Omega))$ и $u(x,t)=0$ при $t<0$. Покажем, что $u(x,t)$ является обобщенным решением задачи (1.1)–(1.9).

Умножим тождество (6.2) на функцию $\dfrac{e^{\lambda t}}{2\pi i\lambda^2}\eta''(t)$, где $\eta(t)\in C_0^2(-T,T)$, и проинтегрируем по λ вдоль прямой $(\sigma-i\infty,\sigma+i\infty)$ и по t от 0 до T. Тогда, учитывая (2.8) и (6.3), после несложных преобразований получаем

$$\int\limits_{\Omega_T}\rho(x)u(x,t)\cdot\zeta(x)\eta''(t)dxdt-$$

$$-\int\limits_{\Omega_T}\int\limits_0^t\sum_{n,p,q,r=1}^3\frac{\partial}{\partial x_n}(A_{npqr}(x,t-\tau)\gamma_{qr}[\zeta(x)\eta'(t)])u(x,\tau)\cdot e^p d\tau dxdt=$$

$$=\int\limits_{\Omega}V(x)\cdot\zeta(x)\eta(0)dx. \tag{6.4}$$

Поскольку линейные комбинации вектор-функций $\zeta(x)\eta(t)$ $(\zeta\in W_2^2(\Omega)\cap\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\eta\in W_2^2(0,T)$, $\eta(T)=\eta'(T)=0)$ плотны в метрике $W_2^2(\Omega_T)$ в множестве вектор-функций $\psi(x,t)\in W_2^2(\Omega_T)$, удовлетворяющих условию $\psi(x,T)==\dfrac{\partial\psi}{\partial t}(x,T)=0$, $\psi(x,t)|_{\partial\Omega\times[0,T]}=0$, из (6.4) следует равенство

$$\int\limits_{\Omega_T}\rho u\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}dxdt-$$

$$-\int\limits_{\Omega_T}\left[\int\limits_0^t\sum_{n,p,q,r=1}^3\frac{\partial}{\partial x_n}\left(A_{npqr}(x,t-\tau)\gamma_{qr}\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]\right)u(x,\tau)\cdot e^p d\tau\right]dxdt=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\rho V\cdot\psi(x,0)dx. \tag{6.5}$$

Это равенство вместе с условием $u(x,t)|_{\partial\Omega\times[0,T]}=0$ означает, что $u(x,t)$ является обобщенным решением задачи (2.10)–(2.12).

Осталось показать, что вектор-функция смещения $\hat{u}_\varepsilon(x,t)$ (2.9) сходится при $\varepsilon\to 0$ к $u(x,t)$ в метрике $L_2(\Omega_T)$.

Прежде всего заметим, что для решения $\{u_\varepsilon, v_\varepsilon\}$ задачи (2.21), (2.22) имеет место равенство

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\rho_s\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right)^2dx+\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}\gamma_{np}[u_\varepsilon]\gamma_{qr}[u_\varepsilon]dx+$$

$$+\int\limits_{G_\varepsilon}\rho_f v_\varepsilon^2dx+\int\limits_0^t\int\limits_{G_\varepsilon}\sum_{n,p=1}^3\gamma_{np}^2[v_\varepsilon]dxd\tau=$$

$$= \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \rho_s (U_\varepsilon^1)^2 dx + \int\limits_{G_\varepsilon} \rho_f (V_\varepsilon^1)^2 dx. \tag{6.6}$$

Отсюда, учитывая положительную определенность тензора $\{a_{npqr}\}$ и используя неравенство Корна, получаем, что вектор-функция смещения $\hat{u}_\varepsilon(x,t)$ (2.9) ограничена равномерно по ε в метрике $W_2^1(\Omega_T)$. Следовательно, множество вектор-функций $\hat{u}_\varepsilon(x,t)$ компактно в $L_2(\Omega_T)$ и поэтому достаточно доказать, что $\hat{u}_\varepsilon(x,t)$ сходится к $u(x,t)$ слабо в $L_2(\Omega_T)$.

Возьмем произвольные $\zeta \in L_2(\Omega)$ и $\eta \in C_0^2[0,T]$. Из определения $\hat{u}_\varepsilon(x,t)$ (2.9) следует, что

$$\int\limits_0^t \hat{u}_\varepsilon(x,s)ds = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{u_\varepsilon(x,\lambda)}{\lambda^2} e^{\lambda t} d\lambda.$$

Учитывая это, с помощью интегрирования по частям получаем

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \hat{u}_\varepsilon \cdot \zeta \eta dx dt = \int\limits_\Omega \int\limits_0^T \int\limits_0^t \hat{u}_\varepsilon \cdot \zeta ds \eta' dx dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Omega \int\limits_0^T \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{u_\varepsilon}{\lambda^2} \cdot \zeta e^{\lambda t} d\lambda \eta' dt dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{\lambda^2} \int\limits_\Omega \zeta \cdot u_\varepsilon(x,\lambda) dx \int\limits_0^T e^{\lambda t} \eta' dt d\lambda. \tag{6.7}$$

Здесь замена порядка интегрирования законна, так как в силу оценок (5.5), (5.6) выполняются неравенства

$$\int\limits_\Omega |u_\varepsilon \cdot \zeta| dx \le C_1, \quad \int\limits_0^T |e^{\lambda t} \eta'| dt \le C_2$$

и, значит, последний интеграл в (6.7) сходится абсолютно.

Аналогичным образом, учитывая (6.3), получаем

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega u \cdot \zeta \eta dx dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{\lambda^2} \int\limits_\Omega w \cdot \zeta dx \int\limits_0^T e^{\lambda t} \eta' dt d\lambda. \tag{6.8}$$

Как было показано в начале этого пункта, $u_\varepsilon(x,\lambda)$ сходится к $w(x,\lambda)$ в метрике $L_2(\Omega)$ равномерно по λ на любом компактном множестве из полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda >$ > 0. Поэтому в правых частях (6.7) и (6.8) можно выполнить предельный переход под знаком интеграла. В результате получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \hat{u}_\varepsilon \cdot \zeta \eta dx dt = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega u \cdot \zeta \eta dx dt. \tag{6.9}$$

Поскольку линейные комбинации вектор-функций $\zeta(x)\eta(t)$ плотны в $L_2(\Omega_T)$, из (6.9) следует, что вектор-функция $\hat{u}_\varepsilon(x,t)$ сходится слабо в $L_2(\Omega_T)$ к вектор-функции $u(x,t)$.

Теорема 1 доказана.

1. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. – М.: Мир, 1984. – 472 с.
2. *Sanchez-Hubert J.* Asymptotic study of the macroscopic behaviour of solid liquid mixture // Math. Meth. Appl. Sci. – 1980. – № 2. – P. 1 – 11.
3. *Gilbert R. P., Mikelić A.* Homogenizing the acoustic properties of the seabed // J. Nonlinear Anal. – 2000. – **40**. – P. 185 – 212.
4. *Мейерманов А. М.* Метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах // Сиб. мат. журн. – 2007. – **48**, № 3. – С. 646 – 667.
5. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. М.* Усреднение дифференциальных операторов. – М.: Физматгиз., 1998. – 325 с.
6. *Фенченко В. Н.* Асимптотика потенциала электростатического поля в областях с мелкозернистой границей // Исследования по теории операторов и их приложения: Сб. научн. трудов ФТИНТ АН Украины. – Киев: Наук. думка, 1979. – С. 129 – 147.
7. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Усредненные модели микронеоднородных сред. – Киев: Наук. думка, 2005. – 189 с.
8. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 312 с.
9. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 563 с.

Получено 23.03.09,
после доработки — 07.07.10